Título	Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en la hidráulica.
Autor / Adscripción	Francisco Javier Aparicio Mijares Instituto Mexicano de Tecnología del Agua Moisés Berezowsky Verduzco Instituto de Ingeniería, UNAM
Publicación	Ingeniería Hidráulica en México, 4(2): 40-45
Fecha de publicación	1989
Resumen	Se presenta una derivación de las ecuaciones integrales y diferenciales de continuidad y cantidad de movimiento en una, dos y tres dimensiones, basada en un único principio general de conservación. Esta derivación trata de evitar las confusiones que suelen ocurrir en cursos y textos de hidráulica acerca del origen e identidad de las ecuaciones que se manejan en casos particulares. Durante la derivación se identifican con claridad las hipótesis simplificatorias necesarias que llevan a las ecuaciones usuales y, en consecuencia, se pone en relieve su aplicabilidad a los problemas prácticos.
Identificador	http://hdl.handle.net/123456789/888

Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en la hidráulica

Francisco Javier Aparicio Mijares[1]

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, CNA

Moisés Berezowsky Verduzco

Instituto de Ingeniería, UNAM

Se presenta una derivación de las ecuaciones integrales y diferenciales de continuidad y cantidad de movimiento en una, dos y tres dimensiones, basada en un único principio general de conservación. Esta derivación trata de evitar las confusiones que suelen ocurrir en cursos y textos de hidráulica acerca del origen e identidad de las ecuaciones que se manejan en casos particulares. Durante la derivación se identifican con claridad las hipótesis simplificatorias necesarias que llevan a las ecuaciones usuales y, en consecuencia, se pone en relieve su aplicabilidad a los problemas prácticos.

En los cursos y textos de hidráulica, tanto en el nivel de licenciatura como en el de posgrado, se suelen presentar las ecuaciones fundamentales del movimiento de los fluidos y, en particular, del agua, de forma que se llegue lo más rápidamente posible a la ecuación tal como se usará después en ese curso o texto en particular. Esta manera de proceder lleva implícito el riesgo de que el alumno o lector no comprenda –porque no le es posible– las hipótesis simplificadoras que fueron necesarias para plantear la ecuación que se le señala, lo que a su vez puede provocar la aplicación incorrecta de la ecuación en un contexto diferente al de su deducción. Esto sucede con mucha frecuencia. Incluso, como cada curso y cada texto presentan sus ecuaciones en la forma que más les conviene, la confusión puede llegar al extremo de creer que existen varias ecuaciones de continuidad, cuando en realidad no son más que diferentes versiones de una misma ley natural. De hecho, como se trata de mostrar en este trabajo, muchas de las leyes naturales estudiadas en la hidráulica y otras disciplinas pueden deducirse a partir de un único principio general de conservación. Además, el planteamiento simplificado desde el principio de una ecuación dada, involucra severos problemas cuando se generaliza, lo que lleva a que aun personalidades reconocidas, inventen conceptos sin ningún significado físico para justificar la generalización.

Este trabajo pretende contribuir a la atenuación de los problemas descritos. Para ello, se presenta primero el principio general de conservación en sus versiones integral y diferencial en una, dos y tres dimensiones. Luego se deducen las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento simplificándolas en cada caso –a través de las hipótesis necesarias para lograr dicha simplificación– hasta llegar a las formas usuales en la hidráulica práctica. Por falta de espacio, las ecuaciones de energía y de conservación de contaminantes se dejarán para un artículo posterior. Se ha procurado incluir únicamente las ecuaciones más representativas de cada grupo, pues una descripción exhaustiva rebasaría los límites de este artículo.

Principio general de conservación

Las ideas básicas de este capítulo se deben a Kinsman (1972) aunque en Bear (1972) se encuentra un tratamiento similar.

Versiones integrales

Sea ρ la densidad másica de un sistema fluido, esto es, de un conjunto de fluidos y propiedades asociadas que se mueven simultáneamente, que en adelante se llamará simplemente *densidad*. Si q es la cantidad de alguna propiedad intensiva del fluido, escalar y arbitraria, el producto ρq será la cantidad de dicha propiedad por unidad de volumen.

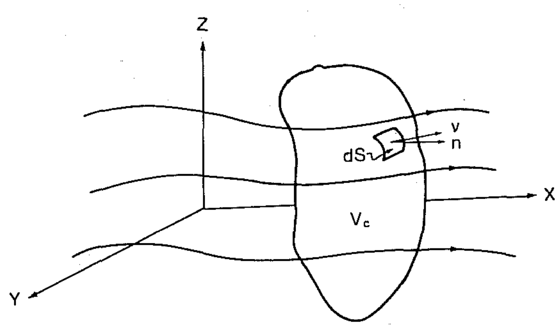
Considérese ahora un volumen de control V_c en el seno del fluido (véase ilustración 1); la cantidad de la propiedad que pasa a través de un área diferencial dS en la unidad de tiempo es $\rho q \overline{v} \cdot \overline{n}$, donde $\overline{v}$ es el vector velocidad y $\overline{n}$ es un vector unitario normal a dS dirigido hacia afuera de V_c. Entonces, la cantidad neta de la propiedad que pasa por toda la superficie S que envuelve a V_c en la unidad de tiempo es

$$Q_{\rho q} = \int_{sc} \rho q \overline{v} \cdot \overline{n} dS \tag{1}$$

Nótese que $Q_{\rho q}$ representa la *salida* neta de la propiedad.

Por otra parte, la cantidad de la propiedad existente en un elemento de volumen dV_c en cualquier instante es $\rho q dV_c$ y su variación en el

1. Volumen de control en un fluido



tiempo es $(\partial/\partial t)$ $(\rho q dV_c)$. Por tanto, la variación temporal de la cantidad total en V_c será

$$M_{\rho q} = \int_{vc} \frac{\partial(\rho q)}{\partial t} dV_c \tag{2}$$

Finalmente, la propiedad estudiada se puede crear o destruir dentro del volumen de control. Si se denota como $D[\rho q]$ a su tasa de creación por unidad de volumen y de tiempo (destrucción si es negativa), la creación de la propiedad en todo el volumen de control por unidad de tiempo se expresa como

$$C_{\rho q} = \int_{vc} D[\rho q] dV_c \tag{3}$$

Las cantidades $Q_{\rho q}$, $M_{\rho q}$ y $C_{\rho q}$ se relacionan mediante la identidad

$$Q_{\rho q} + M_{\rho q} \equiv C_{\rho q} \tag{4}$$

esto es, usando las ecuaciones (1) a (3),

$$\int_{sc} \rho q \overline{v} \cdot \overline{n} dS + \int_{vc} \frac{\partial(\rho q)}{\partial t} dV_c = \\ = \int_{vc} D[\rho q] dV_c \tag{5}$$

o bien, si se utiliza el teorema de la divergencia de Gauss (vgr., Kreyszig, 1972) para convertir la integral de superficie del primer término de la ecuación (5) en integral de volumen,

$$\int_{vc} div(\rho q \overline{v}) dV_c + \int_{vc} \frac{\partial(\rho q)}{\partial t} dV_c = \\ = \int_{vc} D[\rho q] dV_c \tag{6}$$

donde $div(\overline{u})$ es la divergencia del vector $\overline{u}$.

La número (6) es la ecuación general integral tridimensional de conservación de la propiedad arbitraria.

En casos como los de flujo en llanuras de inundación, esteros o lagos someros, en que las dimensiones verticales características del flujo son mucho menores que las horizontales –cuando el flujo es delgado– es posible aceptar la bidimensionalidad del escurrimiento; consecuentemente, $v_z = 0$, $\partial(\rho q v_z)/\partial z = 0$ y $\rho q v_x$ (donde v_x representa el componente de la velocidad en la dirección x, etc.), $\rho q v_y$, ρq y sus derivadas, además de $D[q]$, son independientes de z. En ese caso, al integrar la ecuación (6) en z, desde z_1 hasta z_2, se puede obtener la ecuación integral de conservación de la propiedad arbitraria en dos dimensiones:

$$\int_t \int_y [\rho q v_x h]_x dy dt + \int_t \int_x [\rho q v_y h]_y dx dt +$$
$$+ \int_x \int_y [\rho q h]_t dy dx = \int_t \int_x \int_y h D[\rho q] dy dx dt \qquad (7)$$

donde $h = z_2 - z_1$ es el tirante y $[f]\alpha \equiv (f)\alpha_2 - (f)\alpha_1$. La ecuación se ha integrado en el tiempo.

En otros casos, como en ríos o canales rectos, se puede aceptar, además, que el flujo es unidimensional, es decir, que $v_y = 0$, $\partial(\rho q v_y)/\partial y = 0$ y que $\rho q v_x$, ρq, sus derivadas y $D[\rho q]$ son independientes de y, así como las hipótesis conducentes a la ecuación (7). En este caso, $\overline{v}$ es un escalar y la ecuación (6) se puede integrar en x y y, donde resulta la siguiente ecuación integral unidimensional de conservación de la propiedad arbitraria:

$$\int_t [\rho q v A]_x dt + \int_x [\rho q A]_t dx =$$
$$= \int_t \int_x A D[\rho q] dx dt = 0 \qquad (8)$$

donde A es el área hidráulica.

Versiones diferenciales

Si se acepta que el volumen de control utilizado es de dimensiones diferenciales, la ecuación (6) se puede escribir como

$$div(\rho q \overline{v}) + \frac{\partial(\rho q)}{\partial t} - D[\rho q] = 0 \qquad (9)$$

que es la versión diferencial tridimensional de la ecuación de conservación. Usando las mismas hipótesis que condujeron a las ecuaciones (7) y (8), es posible obtener las ecuaciones diferenciales bidimensional y unidimensional de conservación de la propiedad arbitraria, que son, respectivamente,

$$\frac{\partial(\rho q v_x h)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q v_y h)}{\partial y} +$$
$$+ \frac{\partial(\rho q h)}{\partial t} - h D[\rho q] = 0 \qquad (10)$$

y

$$\frac{\partial(\rho q v A)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho q A)}{\partial t} - A D[\rho q] = 0 \qquad (11)$$

Ecuación de continuidad

En el planteamiento de la ecuación de continuidad, la propiedad en estudio es la masa. Entonces:

$$q = \frac{masa}{masa} = 1 \qquad (12)$$

Versiones integrales

Al sustituir el valor de q de la ecuación (12) en las ecuaciones (6), (7) y (8) e integrar la primera en el tiempo, se pueden obtener, respectivamente, las ecuaciones integrales de conservación de la masa en tres, dos y una dimensiones:

$$\int_t \int_{vc} div(\rho \overline{v}) dV_c dt + \int_{vc} [\rho]_t dV_c =$$
$$= \int_t \int_{vc} D[\rho] dV_c dt \qquad (13)$$

$$\int_t \int_y [\rho v_x h]_x dy dt + \int_t \int_x [\rho v_y h]_y dx dt +$$
$$+ \int_x \int_y [\rho h]_t dy dx = \int_t \int_x \int_y h D[\rho] dy dx dt \qquad (14)$$

$$\int_t [\rho Q]_x dt + \int_x [\rho A]_t dx = \int_t \int_x A D[\rho] dx dt = 0 \qquad (15)$$

donde Q es el gasto, $Q = vA$.

Si además se acepta que el fluido es incompresible, o sea, ρ = cte, y que no hay creación de masa, la ecuación (15) resulta

$$\int_t [Q]_x dt + \int_x [A]_t dx = 0 \qquad (16)$$

Finalmente, si el flujo es permanente, $[A]_t = 0$ y

$$Q = cte \qquad (17)$$

que es la ecuación de continuidad en su forma más simple posible.

Versiones diferenciales

De igual manera, usando $q = 1$ en la ecuación (9) se obtiene

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + div(\rho\overline{v}) - D[\rho] = 0 \tag{18}$$

o bien, si el fluido es incompresible y la creación de masa es nula, resulta la ecuación clásica de continuidad:

$$div(\overline{v}) = 0 \tag{19}$$

Así mismo, las ecuaciones diferenciales bidimensional y unidimensional de continuidad resultan respectivamente:

$$\frac{\partial(\rho v_x h)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y h)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} - hD[\rho] = 0 \tag{20}$$

y

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} - AD[\rho] = 0 \tag{21}$$

Una de las posibles interpretaciones del término de creación de masa se tiene cuando existe un gasto lateral por unidad de longitud q_ℓ; en ese caso, por ejemplo, la ecuación (21) se escribiría, para un fluido incompresible, como

$$\frac{\partial(Q)}{\partial x} + \frac{\partial(A)}{\partial t} - q_\ell = 0 \tag{22}$$

Nótese que, con $q_\ell = 0$ y flujo permanente, la ecuación (22) se reduce a la (17).

Ecuación de cantidad de movimiento

En este caso la propiedad en estudio es la cantidad de movimiento, que por definición es el producto de la masa por la velocidad (Daily y Harleman, 1975). Dado que q es una cantidad escalar, resulta necesario definir una cantidad de movimiento para cada dirección. Entonces, para la dirección x, q es

$$q = \frac{mv_x}{m} = v_x \tag{23}$$

donde m es la masa. En adelante, se trabajará con la cantidad de movimiento en la dirección x, en el entendido de que existen tres ecuaciones de cantidad de movimiento, una para cada dirección.

Versiones integrales

Si se sustituye la ecuación (23) en las (6) a (8) resultan las ecuaciones integrales de cantidad de movimiento en tres, dos y una dimensiones, respectivamente. Por ejemplo, esta última es

$$\int_t [\rho v^2 A]_x dt + \int_x [\rho v A]_t dx =$$

$$= \int_t \int_x AD[\rho v] dx dt = 0 \tag{24}$$

La creación –negativa o positiva– de cantidad de movimiento se produce por las fuerzas externas que actúan sobre el volumen de control. En aplicaciones hidráulicas bidimensionales o unidimensionales, estas fuerzas comúnmente son las de presión, gravedad y resistencia. La primera está dada por

$$D_P[\rho v_x] = -\partial p/\partial x \tag{25}$$

donde p es la presión y el subíndice denota la fuente de creación de cantidad de movimiento. La fuerza de gravedad se puede expresar en la forma siguiente:

$$D_g[\rho v_x] = \rho g_x \tag{26}$$

donde g_x es el componente de la aceleración gravitatoria en la dirección x. La ecuación (26) se puede escribir también como

$$D_g[\rho v_x] = \rho g S_{ox} \tag{27}$$

donde g es la aceleración gravitatoria y S_{ox} es la pendiente del fondo en la dirección x. La fuerza de resistencia al flujo se puede expresar, en forma análoga, como

$$D_f[\rho v_x] = -\rho g S_{fx} \tag{28}$$

donde S_{fx} es la pendiente de *fricción* en dirección x y el signo negativo indica que la *fricción* destruye la cantidad de movimiento.

Además de las anteriores, existen otras fuerzas externas como la de Coriolis, la debida a la viscosidad, etc., que no se discutirán aquí. Por ejemplo, al utilizar las ecuaciones (25) a (28) en una versión bidimensional de la ecuación integral de cantidad de movimiento, y aceptando que las presiones se distribuyen hidrostáticamente en la vertical, se puede obtener:

$$\int_t \int_y [\rho v_x^2 h]_x dy dt + \int_t \int_x [\rho v_x v_y h]_y dx dt +$$

$$+ \int_x \int_y [\rho v_x h]_t dy dx = - \int_t \int_y [\rho q \frac{h^2}{2}] dy dt +$$

$$+ \int_t \int_x \int_y \rho g h (S_{ox} - S_{fx}) dy dx dt = 0 \qquad (29)$$

Existe también una ecuación similar para la dirección y.

Versiones diferenciales

La versión diferencial de la ecuación tridimensional de cantidad de movimiento se obtiene al sustituir la ecuación (23) en la (9):

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v_x \overline{v}) - D[\rho v_x] = 0 \qquad (30)$$

con ecuaciones similares para y y z. Al desarrollar el término de divergencia de la ecuación (30) y sustituir en ésta la ecuación (19) se obtiene:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} +$$

$$+ \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = D[\rho v_x] \qquad (31)$$

La creación de cantidad de movimiento en un flujo tridimensional puede considerarse compuesta, en términos generales, por el conjunto de esfuerzos aplicados a las caras de un volumen de control cúbico como el mostrado en la ilustración 2. Así, en la dirección x, dicha creación se compone de el cambio del esfuerzo normal neto en esa dirección, $\partial \sigma_x / \partial x$, y de las variaciones de los esfuerzos tangenciales netos, $\partial \tau_{yx} / \partial y$ y $\partial \tau_{zx} / \partial z$. Además, debe tomarse en cuenta la fuerza gravitatoria en esa dirección, ρg_x. Con lo anterior, la ecuación (31) se escribe como

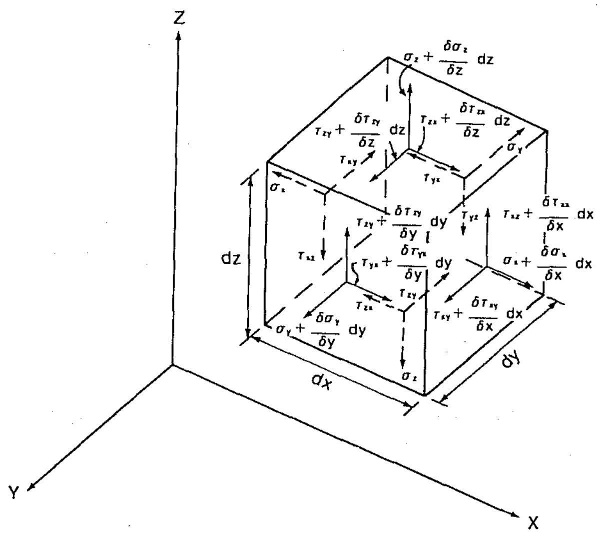
$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} =$$

$$= \rho g_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \qquad (32)$$

Se puede demostrar (Daily y Harleman, 1975) que:

$$\sigma_x = -p + 2\rho\nu \frac{\partial v_x}{\partial x} \qquad (33)$$

2. Volumen de control cúbico



$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \rho\nu[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}] \qquad (34)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \rho\nu[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}] \qquad (35)$$

donde ν es la viscosidad cinemática del fluido. Sustituyendo las ecuaciones (33) y (35) en la (32) y utilizando nuevamente la ecuación (19), se puede obtener, para un fluido incompresible, la ecuación de Navier–Stokes en la dirección x:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} =$$

$$= g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}] \qquad (36)$$

Por otro lado, si se usa de nuevo el concepto de *fricción*, más usual en flujos bidimensionales y unidimensionales, las ecuaciones correspondientes resultan, respectivamente,

$$\frac{\partial(v_x h)}{\partial t} + \frac{\partial(v_x^2 h)}{\partial x} + \frac{\partial(v_x v_y h)}{\partial y} =$$

$$= h g_x - \frac{h}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - g h S_{fx} \qquad (37)$$

y

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Q^2/A + g I_1)}{\partial x} = g A (S_o - S_f) \qquad (38)$$

donde $\quad I_1 = \int_y \int_z p\, dz\, dy \qquad (39)$

Conviene notar que en ciertos casos no es válido desarrollar las derivadas espaciales que aparecen en las ecuaciones (37) y (38); por ejemplo, en presencia de un salto hidráulico, el término Q^2/A es continuo y diferenciable en la dirección x, mientras que la velocidad, el tirante y, por lo tanto, el área, no lo son por separado. Lo mismo ocurre en los casos en que exista otro tipo de discontinuidades, como las ondas de choque (Aparicio, 1986).

Conclusiones

La derivación de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento y de otras leyes naturales estudiadas en hidráulica y otras disciplinas –basadas *en un único principio general* de conservación– permite identificar con claridad cuándo una ecuación de las usuales es aplicable a un caso particular y cuáles son sus limitaciones. Por ello, la derivación presentada en este trabajo tiene ventajas didácticas importantes respecto a las usadas normalmente en textos y cursos de hidráulica.

Referencias

Aparicio, J. "Ondas de choque y simulación numérica de flujo supercrítico", *XII Congreso Latinoamericano de Hidráulica*, v. 1, pp. 45–55, São Paulo, Brasil, 1986.

Bear, J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*, American Elsevier,Nueva York, 1972.

Daily, J.W. Harleman, D.R.F. *Dinámica de los fluidos*, Trillas,México, 1975.

Kinsman, B. "Estuarine Hydrodynamics. A series of ten lectures to be given at the Universidad Nacional Autónoma de México", manuscrito no publicado, 1972.

Kreyszig, E. *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley, Nueva York,1972.

[1] Se hace un reconocimiento a José Luis Acosta, quien se encargó de la edición preliminar del artículo.