

Artículo publicado en el Repositorio Institucional del IMTA

<i>Título</i>	Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados.
<i>Autor / Adscripción</i>	<p>Carlos Fuentes Instituto Mexicano de Tecnología del Agua</p> <p>Fernando Brambila Universidad Nacional Autónoma de México</p> <p>Michel Vauclin Laboratoire d'Etude des Transferts en Hydrologie et Environnement</p> <p>Jean-Yves Parlange Cornell University</p> <p>Randel Haverkamp Laboratoire d'Etude des Transferts en Hydrologie et Environnement</p>
<i>Publicación</i>	Ingeniería Hidráulica en México, 16(2): 119-137
<i>Fecha de publicación</i>	2001
<i>Resumen</i>	<p>En este trabajo se estudia, desde un punto de vista teórico, la conductividad hidráulica que interviene en la ley de Darcy generalizada a los suelos no saturados. La relación entre el contenido volumétrico de agua y la conductividad hidráulica se establece a partir de la hipótesis de que las leyes de Poiseuille y Darcy describen el movimiento del agua en los niveles microscópico y macroscópico, respectivamente.</p>
<i>Identificador</i>	<a href="http://hdl.handle.net/123456789/729">http://hdl.handle.net/123456789/729</a>

# Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados

Carlos Fuentes

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Fernando Brambila

Universidad Nacional Autónoma de México

Michel Vauclin

Laboratoire d'Etude des Transferts en Hydrologie et Environnement

Jean-Yves Parlange

Cornell University

Randel Haverkamp

Laboratoire d'Etude des Transferts en Hydrologie et Environnement

*En este trabajo se estudia, desde un punto de vista teórico, la conductividad hidráulica que interviene en la ley de Darcy generalizada a los suelos no saturados. La relación entre el contenido volumétrico de agua y la conductividad hidráulica se establece a partir de la hipótesis de que las leyes de Poiseuille y Darcy describen el movimiento del agua en los niveles microscópico y macroscópico, respectivamente. En la emergencia de la ley macroscópica, a partir de la ley microscópica, se hace la distinción entre los radios de poro que definen la porosidad areal y la porosidad volumétrica. Las relaciones entre los radios y las porosidades han sido establecidas a partir de los conceptos de la tortuosidad de las trayectorias del movimiento del agua y de la correlación entre los poros. Conceptos que tienen como base una relación entre la porosidad volumétrica total y la dimensión fractal del suelo. Esta distinción ha permitido obtener un modelo conceptual de la conductividad hidráulica, al cual se le han introducido las hipótesis clásicas relativas a los pesos de los radios en la resistencia ofrecida al movimiento del agua por el suelo, gracias a lo cual se tienen diferentes modelos particulares. Una simplificación de estos modelos ha conducido a reencontrar los modelos clásicos propuestos en la literatura. Las correcciones empíricas aportadas a los modelos clásicos de la conductividad hidráulica relativa a la conductividad hidráulica a saturación se justifican en el formalismo de la geometría fractal. Las correcciones dependen del valor de la dimensión fractal de cada suelo.*

**Palabras clave:** ley de Poiseuille, ley de Laplace, tortuosidad, dimensión fractal, porosidad volumétrica, porosidad areal.

## Introducción

La mayor parte de los modelos conceptuales de la conductividad hidráulica que aparece en la ley de Darcy generalizada a los suelos no saturados están basa-

dos en la ley de Poiseuille. Se encuentra una primera familia de modelos en los trabajos de Purcell (1949), Gates y Lietz (1950), y Childs y Collis-George (1950). Estos modelos están fundados en imágenes de medios porosos asimilados a tubos cilíndricos o esferas,

proporcionadas por la geometría de Euclides, o en consideraciones probabilísticas. Se encuentra también una segunda familia de modelos en los trabajos de Burdine (1953), Fatt y Dykstra (1951), Millington y Quirk (1961), Mualem (1976), etcétera. La segunda familia es, en términos generales, la misma que la primera, pero con correcciones empíricas. Los autores justifican sus correcciones diciendo que la geometría del suelo es lo suficientemente irregular o "tortuosa" para que modelos geométricos simplistas expliquen todo. ¿Tienen razón?

Una tentativa de unificación de los modelos geométricos de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados es propuesta por Mualem y Dagan (1978). Estos autores consideran que los "modelos geométricos" son, de hecho, modelos probabilísticos porque pueden ser deducidos a partir del modelo probabilístico propuesto por Childs y Collis-George (1950). Mualem y Dagan logran deducir la parte conceptual de los modelos, pero no proporcionan una explicación concisa para las correcciones empíricas introducidas.

El objetivo de este trabajo es la aplicación del formalismo de la geometría fractal para justificar las correcciones empíricas aportadas a los modelos anteriormente citados.

Para alcanzar el objetivo se expone el concepto de tortuosidad, introducida para corregir la ley de Poiseuille. Después se deducen los principales modelos clásicos a partir de los modelos extremos propuestos por Purcell (1949), y Childs y Collis-George (1950). Enseguida se exponen brevemente los conceptos necesarios de la geometría fractal para explicar las correcciones empíricas. Finalmente se deduce un conjunto de modelos de la conductividad hidráulica, incluidos aquellos presentados en la literatura, tomando como base los trabajos de Mualem y Dagan (1978) y Fuentes *et al.* (1996, 1998).

### El concepto de tortuosidad

Los modelos que relacionan la conductividad hidráulica con la geometría del medio poroso se fundamentan en dos leyes: a) la ley de Darcy en la escala "macroscópica", y b) la ley de Poiseuille en la escala "microscópica". Adicionalmente, para definir el tamaño del capilar que interviene en la última, se utiliza la ley de Laplace.

La ley de Darcy unidimensional vertical establece que el gasto por unidad de superficie de suelo o flujo ( $q$ ), es proporcionado por:

$$q = -K \frac{\partial H}{\partial z} \quad (1)$$

donde  $K$  es un coeficiente denominado conductividad hidráulica del suelo;  $H$  es el potencial hidráulico, igual a la suma del potencial de presión del agua en el suelo, expresado como la altura de una columna equivalente de agua ( $\psi$ ), y el potencial gravitacional, asimilado a la coordenada vertical ( $z$ ).

La ley de Poiseuille establece que la velocidad media ( $v$ ) en un tubo de radio  $R$  es proporcionada por:

$$v = -C_f \frac{\rho_w g}{\eta} R^2 \frac{\partial H}{\partial z} \quad (2)$$

donde  $\rho_w$  es la densidad del agua;  $\eta$ , su coeficiente de viscosidad dinámica, y  $g$  la aceleración gravitacional.

En la ecuación 2 se ha introducido un coeficiente de forma adimensional ( $C_f$ ) que toma en cuenta la forma irregular del perímetro de los poros: en un poro circular  $C_f = 1/8$ . Si  $R$  es tomado como el radio hidráulico,  $C_f$  es llamado coeficiente de Koseny (Bear, 1972):  $C_f = 0.5$  para un círculo;  $C_f = 0.562$  para un cuadrado;  $C_f = 0.597$  para un triángulo equilátero, y  $C_f = 0.667$  para una placa.

La ley de Laplace relaciona la presión del agua en el suelo con un radio de poro, definido por:

$$R = - \frac{2\sigma \cos(\alpha)}{\rho_w g \psi} \quad (3)$$

donde  $\sigma$  es la tensión superficial en la interfaz agua-aire y  $\alpha$  es el ángulo de contacto formado por esta interfaz con las partículas del suelo.

El concepto de *tortuosidad* en la teoría clásica de la conductividad ha sido introducido para corregir la ley de Poiseuille (por ejemplo, Dullien, 1979). La tortuosidad se define como:

$$T = \frac{dz_f}{dz} \geq 1 \quad (4)$$

donde  $z_f$  representa la trayectoria "real" que sigue el agua en el medio poroso (ver ilustración 1).

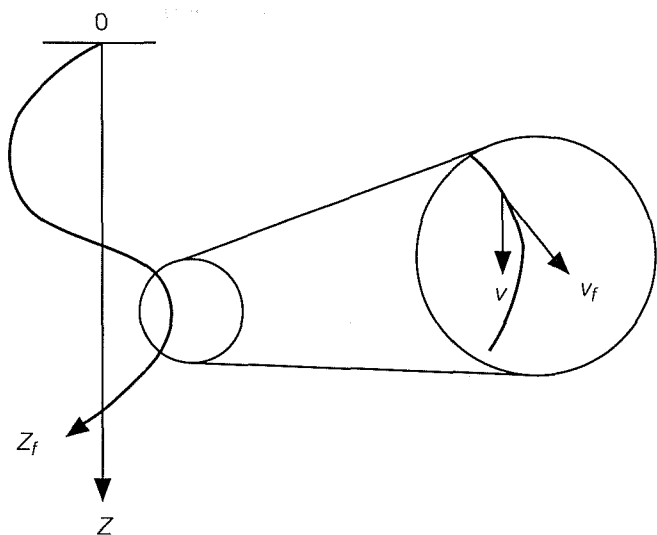
Las velocidades en el sentido de Poiseuille sobre la trayectoria rectilínea ( $v$ ) y sobre la trayectoria tortuosa ( $v_f$ ) se definen de la manera siguiente:

$$v = \frac{dz}{dt}, \quad v_f = \frac{dz_f}{dt} \quad (5)$$

donde  $t$  es el tiempo.

La combinación de las ecuaciones 4 y 5 conduce a la siguiente relación entre las dos velocidades y la tortuosidad:

**Ilustración 1.** El concepto de tortuosidad: a) la velocidad  $v$  es referenciada a la trayectoria  $z$  del movimiento; b) la velocidad  $v_f$  es referenciada a la trayectoria "tortuosa" del movimiento.



$$T = \frac{v_f}{v} \geq 1 \quad (6)$$

La velocidad tortuosa se define con la fórmula de Poiseuille, evaluando el gradiente hidráulico sobre la trayectoria tortuosa, es decir:

$$v_f = -C_f \frac{\rho_w g}{\eta} R^2 \frac{\partial H}{\partial z_f} \quad (7)$$

La relación entre el gradiente evaluado sobre la trayectoria rectilínea ( $\partial H/\partial z$ ) y sobre la trayectoria tortuosa ( $\partial H/\partial z_f$ ) se deduce a partir de la ecuación 4:  $\partial H/\partial z = T(\partial H/\partial z_f)$ . Con esta relación, y considerando la ecuación 6, se encuentra la velocidad rectilínea corregida por el efecto de tortuosidad:

$$v = -C_f \frac{\rho_w g}{\eta} \left(\frac{R}{T}\right)^2 \frac{\partial H}{\partial z} \quad (8)$$

La comparación entre las ecuaciones 2 y 8 permite deducir que la velocidad rectilínea está de hecho determinada no por el radio del capilar ( $R$ ) que acompaña a la trayectoria tortuosa, sino por un radio perpendicular a la trayectoria rectilínea ( $R_s$ ). De la ilustración 2 se infiere que:

$$T = \frac{v_f}{v} = \frac{R}{R_s} \quad (9)$$

La ecuación 8 toma la forma:

$$v = -C_f \frac{\rho_w g}{\eta} R_s^2 \frac{\partial H}{\partial z} \quad (10)$$

es decir, la corrección a la ley de Poiseuille original consiste simplemente en la introducción del radio perpendicular que le corresponde a la trayectoria rectilínea. Esta observación es muy importante, ya que en ocasiones no se toma en cuenta que el radio que determina la presión del agua en el suelo es, en general, diferente del radio que determina la velocidad "macroscópica" del agua en el suelo.

La relación entre las escalas microscópica y macroscópica, es decir entre la ley de Poiseuille y la ley de Darcy, se obtiene bajo el razonamiento siguiente: considérese el movimiento en la dirección del eje  $z$  y hágase un corte perpendicular al eje; se obtienen dos secciones de área total  $A_T$  cada una. El gasto o volumen que atraviesa un área elemental  $dA$  en la unidad de tiempo es  $dQ = vdA$ . El gasto con respecto al área total correspondiente es proporcionado por  $dq = vd\omega$ , donde  $dq = dQ/A_T$  y  $d\omega = dA/A_T$ ,  $q$  es el flujo o velocidad de Darcy y  $d\omega$  es una fracción del área de los poros relativa al área total de la sección transversal del suelo.

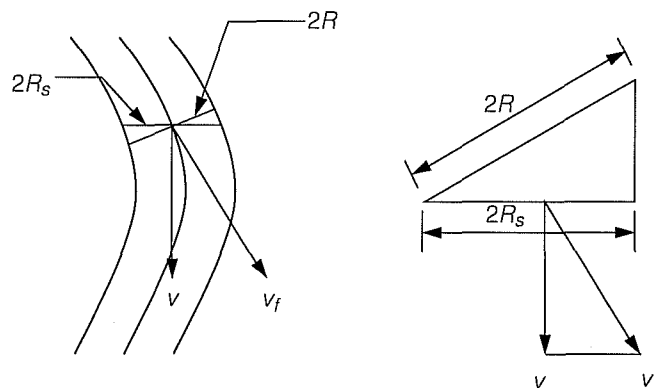
El flujo total, con la ayuda de la ecuación 10, se obtiene de la siguiente manera:

$$q = \int_{\Omega} vd\omega = -C_f \frac{\rho_w g}{\eta} \frac{\partial H}{\partial z} \int_{\Omega} R_s^2 d\omega \quad (11)$$

donde  $\Omega$  representa el dominio de los poros llenos con agua.

Es importante observar que  $\omega$  es una medida del área perpendicular a la dirección macroscópica expuesta por los poros, es decir  $\omega$  está relacionada con  $R_s$ , mientras que la medida del volumen de los poros ( $V$ ) relativa al volumen total de suelo ( $V_T$ ), denotada por  $\theta$  y definida de manera que  $d\theta = dV/V_T$  está relacionada con el radio perpendicular a la trayectoria tortuosa ( $R$ ). El área total de los poros expuestos, relativa

**Ilustración 2.** Los triángulos semejantes formados por los radios y las velocidades.



al área total del corte perpendicular del suelo, o porosidad areal total ( $\mu$ ), es proporcionada por:

$$\int_{\Omega_T} d\omega = \mu \quad (12)$$

y el volumen total de los poros relativo al volumen total del suelo considerado, o porosidad volumétrica total ( $\phi$ ), es proporcionado por:

$$\int_{\Omega_T} d\theta = \phi \quad (13)$$

donde  $\Omega_T$  representa el dominio total de los poros.

La identificación de las ecuaciones 1 y 11 proporciona una expresión conceptual de la conductividad hidráulica:

$$K = C_f \frac{\rho_w g}{\eta} \int_{\Omega} R_s^2 d\omega \quad (14)$$

Es cómodo separar los diferentes efectos sobre la conductividad hidráulica debidos a las propiedades del fluido y la geometría del suelo, introduciendo el coeficiente de permeabilidad ( $k$ ), denominado también permeabilidad intrínseca, definido de modo que  $K = k\rho_w g/\eta$ , esto es:

$$k = C_f \int_{\Omega} R_s^2 d\omega \quad (15)$$

El valor de la permeabilidad, cuando el conjunto de los poros está totalmente lleno con agua, es llamado permeabilidad total o saturada ( $k_s$ ) y está definido por:

$$k_s = C_f \int_{\Omega_T} R_s^2 d\omega \quad (16)$$

La permeabilidad con respecto a este valor, o permeabilidad relativa ( $k_r$ ), se define por:

$$k_r = k/k_s = \int_{\Omega} R_s^2 d\omega / \int_{\Omega_T} R_s^2 d\omega \quad (17)$$

La interpretación de las diferentes variables en la ecuación 17, así como la manera de integrarla han conducido a numerosos modelos que describen la conductividad hidráulica, como se puede constatar en la literatura (Purcell, 1949; Gates y Lietz, 1950; Childs y Collis-George, 1950; Burdine, 1953; Fatt y Dykstra, 1951; Marshall, 1958; Wyllie y Gardner, 1958; Millington y Quirk, 1961; Kunze *et al.*, 1968; Mualem, 1976). Mualem y Dagan (1978) hacen una revisión de estos modelos.

Teniendo como marco de referencia la *geometría fractal* (Rieu y Sposito, 1991a, b; Fuentes *et al.*; 1998; Olescho *et al.*, 1997) se analizarán las correcciones empíricas introducidas desde hace medio siglo en la búsqueda desenfadada del "mejor modelo" de predicción de la permeabilidad.

Los principales modelos clásicos de la conductividad presentados en la literatura se deducen a partir de los dos modelos extremos propuestos por Purcell (1949)-Gates y Lietz (1950) y Childs y Collis-George (1950).

### Los modelos clásicos de la conductividad hidráulica

#### Modelos extremos

- El modelo de Purcell

Purcell (1949) observa que en un sistema de capilares paralelos en donde el factor de tortuosidad es independiente del tamaño de poro, el factor de tortuosidad es el mismo para cada capilar ( $T = T_o = \text{constante}$ ) y que el área de flujo o porosidad areal es igual a la porosidad volumétrica ( $\theta$ ), es decir:

$$d\omega(r) = d\theta(r) = f(r)dr \quad (18)$$

donde  $f(r)$  es la función densidad de la porosidad volumétrica.

La introducción de la ecuación 18 en la ecuación 15 con  $R_s = r/T_o$  permite obtener la permeabilidad:

$$k(\theta) = \frac{C_f}{T_o^2} \int_0^{\theta} r^2 d\theta \quad (19)$$

donde:

$$\theta(R) = \int_0^R f(r)dr \quad (20)$$

Cuando  $\theta = \phi$  se obtiene de la ecuación 19 la permeabilidad total ( $k_s$ ). Gates y Lietz (1950) sugieren multiplicar la ecuación 19 por una función empírica del contenido de agua ( $\theta$ ) para reproducir los datos experimentales de la permeabilidad.

- El modelo de Childs y Collis-George

Childs y Collis-George (1950) atacan el problema de la estimación de  $k(\theta)$  desde un punto de vista probabilístico: sean dos secciones paralelas de suelo situadas en  $x$  e  $y$  sobre la trayectoria rectilínea, y considérese

que la función densidad de la porosidad volumétrica  $f(r)$  es la misma en las dos secciones e iguales al área de flujo. Si  $r$  y  $p$  designan los radios de los poros de la primera y la segunda sección, respectivamente, la probabilidad del intervalo que contiene  $r$  es precisamente igual al área representada por  $d\theta(r) = f(r)dr$  y la probabilidad del intervalo que contiene a  $p$  sobre la otra sección es igual a  $d\theta(p) = f(p)dp$ . La probabilidad de que los poros representados por estos intervalos se encuentren de una manera completamente aleatoria en una posición ( $z$ ) intermedia a  $x$  e  $y$  es el producto de las dos probabilidades. El producto de las áreas elementales  $d\theta(r)$  y  $d\theta(p)$  representa el área común de flujo:

$$d\omega(r, p) = d\theta(r)d\theta(p) = f(r)dr f(p)dp \quad (21)$$

Considerando la ecuación 21 y asumiendo  $R_s = R/T_0$ , con  $T_0 =$  constante, la permeabilidad definida por la ecuación 15 toma la forma:

$$k = \frac{C_f}{T_0^2} \iint_{\Omega} R^2 d\theta(r)d\theta(p) = \frac{C_f}{T_0^2} \iint_{\Omega} R^2 f(r)dr f(p)dp \quad (22)$$

Para evaluar la integral de la ecuación 22, los autores suponen que la resistencia al flujo es determinada por el poro que tiene el tamaño más pequeño. La representación integral de esta hipótesis es proporcionada por Brutsaert (1967) y ulteriormente refinada por Mualem (1976). La hipótesis se traduce como sigue:

$$R = \min(r, p) \quad (23)$$

La hipótesis de la ecuación 23 permite expresar la ecuación 22 del modo siguiente:

$$k(\theta) = \frac{2C_f}{T_0^2} \int_0^{\theta} [\theta - \vartheta] r^2 d\vartheta \quad (24)$$

donde  $\theta(R)$  está definida por la ecuación 20. Para los detalles de la integración ver Brutsaert (1967) y Mualem (1976).

Mualem y Dagan (1978) señalan que el modelo de Purcell puede ser formalmente deducido del modelo de Childs y Collis-George si el área común de flujo dada por la ecuación 21 es redefinida como  $d\omega(r, p) = f(r)dr \delta(p - r)dp$ , donde  $\delta$  designa la densidad de Dirac.

En términos probabilísticos, el modelo de Purcell representa una correlación completa entre las dos secciones, mientras que el de Childs y Collis-George representa una decorrelación completa.

La introducción del grado de saturación  $S(R)$  definida de manera que:

$$\theta(R) = \phi S(R) \quad (25)$$

y tal que  $0 \leq S(R) \leq 1$ , en las ecuaciones 19 y 24 permite deducir:

$$k_s = \left[ \frac{C_f}{T_0^2} \int_0^1 r^2 dS \right] \phi \quad (26)$$

$$k_s = \left[ \frac{2C_f}{T_0^2} \int_0^1 (1-S)r^2 dS \right] \phi^2 \quad (27)$$

es decir, en el modelo de Purcell,  $k_s$  es proporcional a  $\phi$ , mientras que en el de Childs y Collis-George  $k_s$  es proporcional a  $\phi^2$ . Estos dos modelos representan los comportamientos extremos posibles.

### Modelos particulares

- El modelo de Burdine

El modelo propuesto por Burdine (1953) para la permeabilidad relativa se deduce de la ecuación 17, con la hipótesis de Purcell (1949), definida por la ecuación 18, haciendo  $R_s = r/T$ , e introduciendo la relación empírica para la tortuosidad  $T(R) = T_0 [\phi/\theta(R)]$ , obtenida mediante calibración del modelo sobre los datos experimentales, suponiendo que la tortuosidad es una función únicamente del radio de poro mayor, es decir de la humedad:

$$k_r(\theta) = \left( \frac{\theta}{\phi} \right)^2 \left[ \int_0^{\theta} r^2 d\vartheta \right] / \left[ \int_0^{\phi} r^2 d\vartheta \right] \quad (28)$$

representa una corrección al modelo de Purcell (1949).

- El modelo de Fatt y Dykstra

Fatt y Dykstra (1951) proponen una ecuación alternativa, partiendo de la hipótesis de una dependencia en potencia entre la tortuosidad y el radio de los poros:

$$T(r) = cr^b \quad (29)$$

donde  $c$  y  $b$  son dos constantes positivas.

Con la introducción de  $R_s = r/T = r^{1+b}/c$  y de la hipótesis de Purcell, definida por la ecuación 18 en la ecuación 15, se deduce el modelo de Fatt y Dykstra de la permeabilidad relativa:

$$k_r(\theta) = \int_0^{\theta} r^{2(1+b)} d\vartheta / \int_0^{\phi} r^{2(1+b)} d\vartheta \quad (30)$$

El modelo de Fatt y Dykstra representa otra corrección al modelo de Purcell (1949). Los autores obtienen un valor de  $b$  cercano a  $1/2$  a través de la calibración del modelo de la ecuación 30 sobre los datos experimentales de algunos suelos. Sin embargo, ellos reconocen que esta potencia varía en función del tipo de suelo.

- El modelo de Wyllie y Gardner

El razonamiento de Wyllie y Gardner (1958) tiene un cierto parecido con el de Childs y Collis-George (1950). Ellos suponen que la probabilidad del encuentro de una sección con poros de radios  $r$  con los poros de una sección vecina es proporcional a  $\theta(R)f(r)$ . La probabilidad acumulada es proporcional a  $\theta(R) \int_0^R f(r)dr = \theta^2(R)$ .

Wyllie y Gardner consideran que esta probabilidad representa la reducción del área de los capilares de radio  $r$  por un factor proporcional a  $\theta(R)$ . El modelo de la permeabilidad correspondiente se deduce de la ecuación 15, definiendo  $R_s \propto r\sqrt{\theta(R)}/T_0$  con  $T_0 =$  constante, y considerando la hipótesis de Purcell (1949) definida por la ecuación 18, es decir:

$$k(R) = \frac{C_f}{T_0^2} c \int_0^R \left( r\sqrt{\theta(R)} \right)^2 \theta(R) f(r) dr \quad (31)$$

donde  $c$  es un coeficiente de proporcionalidad.

Los autores deducen precisamente la expresión de la permeabilidad relativa propuesta por Burdine. El modelo de Wyllie y Gardner es considerado como la justificación teórica del modelo semiempírico de Burdine.

- El modelo de Millington y Quirk

Millington y Quirk (1961) exploran un enfoque intermedio entre los modelos de Purcell y de Childs y Collis-George. Ellos consideran una correlación parcial entre las dos secciones. El factor de correlación es introducido en el área total, es decir:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty d\omega(r, \rho) = \theta^m \quad (32)$$

con  $1 < m < 2$ . Recuérdese que  $m = 1$  corresponde al modelo de Purcell y  $m = 2$ , al modelo de Childs y Collis-George.

Millington y Quirk proponen un método para estimar el parámetro  $m$ , razonando de manera similar a Childs

y Collis-George (1950). Haciendo la porosidad areal de cada sección igual a  $\phi^s$ , el área común de flujo es  $\phi^s \phi^s = \phi^{2s}$ , es decir  $m = 2s$  y  $1/2 < s < 1$ . Teniendo en cuenta que el área de flujo es menor que el área de cada sección,  $0 < \phi^{2s} < \phi^s < 1$ , ellos argumentan que el área de los sólidos deberá ser la mayor posible para que sea el complemento del área de flujo, la toman como  $(1 - \phi)^s$  y, en consecuencia  $\phi^{2s} = 1 - (1 - \phi)^s$ . Los autores seleccionan un valor "medio"  $s = 2/3$ , es decir  $m = 4/3$ . Después deducen una fórmula de  $k_s$  bajo la hipótesis de que el área común de flujo es proporcionada por una modificación de la ecuación 21, y considerando la ecuación 25  $d\omega(r, \rho) = \phi^{4/3} dS(\rho) dS(r)$ . Integrando la ecuación de la permeabilidad con las mismas hipótesis hechas por Childs y Collis-George, los autores obtienen el modelo de  $k_s$  siguiente (ver ecuación 27):

$$k_s = \frac{2C_f}{T_0^2} \phi^{4/3} \int_0^1 [1 - S] r^2 dS \quad (33)$$

De acuerdo con Mualem (1976), el modelo de Millington y Quirk que proporciona la permeabilidad relativa se obtiene generalizando la ecuación 33:

$$k_r(\theta) = \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^{4/3} \left[ \int_0^\theta (\theta - \vartheta) r^2 d\vartheta \right] / \left[ \int_0^\phi (\phi - \vartheta) r^2 d\vartheta \right] \quad (34)$$

Este modelo representa entonces una corrección al modelo de Childs y Collis-George (ecuación 24).

Kunze *et al.* (1968) reemplazan empíricamente el exponente  $4/3$  de la ecuación 21 por la unidad.

El modelo de Mualem

Mualem (1976), a diferencia de Childs y Collis-George (1950), proporciona un poco más de peso al poro grande en la resistencia del medio poroso al flujo. El modelo se deduce de la ecuación 15, considerando que  $R$  es la media geométrica de los radios de las dos secciones, es decir  $R_s^2 = r\rho/T^2$ . El modelo de la permeabilidad relativa se deduce aceptando la hipótesis de Childs y Collis-George (1950) definida por la ecuación 21, a saber:

$$k_r(\theta) = \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^{1/2} \left[ \int_0^\theta r d\vartheta \right] / \left[ \int_0^\phi r d\vartheta \right] \quad (35)$$

donde el término  $(\theta/\phi)^{1/2}$  representa una corrección empírica que incluye los efectos de tortuosidad y de correlación entre las secciones; la potencia  $1/2$  es aproximada.

Citar todas las referencias en las cuales este modelo ha sido utilizado desde su publicación en 1976 está fuera de cuestión, ya que la lista sería muy larga. Nos limitaremos a hacerle un análisis ulteriormente.

Los modelos clásicos de la permeabilidad expuestos líneas arriba serán establecidos a partir de los conceptos de la geometría fractal. Para comenzar se introduce la conceptualización fractal del radio perpendicular a la trayectoria rectilínea ( $R_g$ ), posteriormente se mostrarán ciertas hipótesis simplificadoras, con el objetivo de comprender mejor las diferencias entre los modelos, que algunas veces serán muy sutiles.

### El suelo como un objeto fractal

Para explicar las correcciones empíricas en los modelos clásicos de la conductividad hidráulica, se introducen algunos conceptos básicos de la geometría fractal.

#### Definiciones

*El tamaño de un subconjunto cubierta.* Se define el tamaño  $|U| = r$  de un subconjunto  $U$  no vacío de  $\mathfrak{R}^E$ , donde  $E$  es la dimensión de Euclides (aquí  $E = 3$ ) y  $\mathfrak{R}$ , el conjunto de los números reales, como el límite de las distancias más grandes entre todo par de puntos  $x$  e  $y$  en  $U$ :  $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$ . Si  $\{U_j\}_r$  es una colección contable (finita o infinita) de conjuntos, cuyos tamaños son inferiores o iguales a  $r$ , que cubre un conjunto  $F$ , así  $F$  es un subconjunto de la unión de los conjuntos  $U_j$ , con  $0 < |U_j| = r_j \leq r$ , se dice que  $\{U_j\}$  es una  $r$ -cubierta de  $F$ .

*La medida de Lebesgue.* Para un subconjunto  $F$  de  $\mathfrak{R}^E$  se define para cada  $r > 0$  la medida siguiente:

$$L_r^E(F) = \inf \left\{ \sum_j r_j^E : r_j = |U_j|; \{U_j\}, r\text{-cubierta de } F \right\} \quad (36)$$

La medida  $E$ -dimensional de Lebesgue del conjunto  $F$ , denotada por  $L^E(F)$ , se define como el límite de la ecuación 36 cuando  $r$  tiende a cero:

$$L^E(F) = \lim_{r \rightarrow 0} L_r^E(F) \quad (37)$$

Existen subconjuntos del conjunto de los números reales, cuya cantidad de elementos es igual al propio conjunto de los números reales y que su medida de Lebesgue es cero. El ejemplo clásico es el conjunto perfecto de Cantor, un subconjunto del intervalo  $[0, 1]$ . Este conjunto tiene entre sus propiedades la de no contener ningún intervalo, esto es, el conjunto de Cantor está formado sólo por puntos y cada uno de ellos es de acumulación.

Se hace notar que la medida de Lebesgue no hace diferencia entre un punto aislado y el conjunto de Cantor; los dos conjuntos tienen medida de Lebesgue cero y es deseable poder hacer una diferencia entre estos dos conjuntos. También existen conjuntos que sin contener ningún intervalo tienen medida de Lebesgue positiva, como los llamados conjuntos "gordos" de Cantor que están formados sólo por puntos de acumulación.

Por lo tanto es conveniente definir una medida más "fina" que la de Lebesgue y que haga diferencia entre puntos aislados y el "polvo" de Cantor. Una medida capaz de diferenciar *fractales*.

*La medida de Hausdorff.* Para un subconjunto  $F$  de  $\mathfrak{R}^E$  se puede definir para cada  $r > 0$  la siguiente medida (Falconer, 1990):

$$H_r^S(F) = \inf \left\{ \sum_j r_j^S : r_j = |U_j|; \{U_j\}, r\text{-cubierta de } F \right\} \quad (38)$$

donde  $S$  es un número no negativo, no necesariamente entero.

Cuando se está interesado en minimizar, para cada cubierta de  $F$  de tamaños inferiores o iguales a  $r$ , la suma de los tamaños de los conjuntos cubiertas a la potencia  $S$ , la clase de cubiertas admisibles de  $F$  se reduce a medida que  $r$  disminuye (Falconer, 1990); esto implica que el *infimum* de la suma disminuye y tiende a un límite cuando  $r$  tiende a cero. Es decir:

$$H^S(F) = \lim_{r \rightarrow 0} H_r^S(F) \quad (39)$$

donde  $H^S(F)$  es la medida  $S$ -dimensional de Hausdorff del conjunto  $F$ .

*La dimensión de Hausdorff-Besicovich.* Un gráfico de  $H^S(F)$  en función de  $S$  ( $0 \leq S \leq E$ ) muestra que existe un valor crítico de  $S$  donde la medida de Hausdorff salta de  $\infty$  a 0 (Falconer, 1990). Este valor crítico es llamado dimensión de Hausdorff-Besicovich del conjunto  $F$ .

*La dimensión fractal de Mandelbrot.* Si  $F$  es cubierta por una colección finita de conjuntos ( $j = 1, 2, \dots, N_r$ ) de la misma forma y tamaño ( $r$ ), de las ecuaciones 38 y 39 se obtiene:

$$H^D = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ N_r r^D \right] \quad (40)$$

Usando esta relación y la continuidad de la función logaritmo, Mandelbrot (1983) define una nueva dimensión como sigue:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{\log(N_r)}{\log(H/r)} \right] \quad (41)$$



Se puede demostrar que se satisface la desigualdad siguiente:  $\dim(\text{Hausdorff-Besicovich}) \leq (\dim(\text{Mandelbrot}))$ . La dimensión de Mandelbrot es fácil de calcular y usualmente aproxima rápidamente la dimensión de Hausdorff-Besicovich, de difícil cálculo.

La ecuación 40 indica que si el suelo se considera como un objeto fractal, el número de conjuntos cubiertas de tamaño  $r$  es inversamente proporcional a  $r^D$  cuando  $r \rightarrow 0$ , es decir:

$$N_r = \left(\frac{H}{r}\right)^D \quad (42)$$

Se pueden construir conjuntos en los cuales el número de conjuntos cubiertas de radio  $r$  satisfaga de manera exacta la fórmula 42 para todo  $r$ , por ejemplo:

a) El polvo de Cantor:

$$E = 1, L = 0, H = 1, D = \log(2)/\log(3) \cong 0.6309$$

b) El tapiz de Sierpinski:

$$E = 2, L = 0, H = 1, D = \log(8)/\log(3) \cong 1.8928$$

c) La esponja de Menger:

$$E = 3, L = 0, H = 1, D = \log(20)/\log(3) \cong 2.7268$$

En estos conjuntos:

$$N_r = \left(\frac{1}{r}\right)^D \quad (43)$$

$$D = \frac{\log(N_r)}{\log(1/r)} \quad (44)$$

*Volumen del cuerpo paralelo.*

Se define el cuerpo  $r$ -paralelo  $P_r$  de un conjunto  $F$  por  $P_r(F) = \{x \in \mathfrak{R}^E : |x - y| \leq r, y \in F\}$ . El volumen del cuerpo paralelo se obtiene como el producto del volumen del conjunto cubierta, es decir  $cr^E$  donde  $c$  es un coeficiente de forma ( $c = 1$  si las cubiertas son paralelepípedos), y del número de cubiertas, esto es,  $\text{vol}_E(P_r) = N_r cr^E$ . Considerando la ecuación 42, se obtiene cuando  $r \rightarrow 0$ :

$$\text{vol}_E(P_r) = cH^E \left(\frac{r}{H}\right)^{E-D} \quad (45)$$

La fórmula 45 puede ser utilizada para estimar la dimensión fractal a partir del volumen del cuerpo paralelo. Es decir:

$$D = E - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log[\text{vol}_E(P_r)/cH^E]}{\log(r/H)} \quad (46)$$

Notemos que el volumen del cuerpo paralelo del fractal no es igual al volumen de la cáscara, esta última definida por  $C_r(F) = \{x \in \mathfrak{R}^E - F : |x - y| \leq r, y \in F\}$ .

*La masa contenida en los conjuntos cubiertas.* La masa en la geometría de Euclides es proporcional al volumen de los conjuntos cubiertas  $m_r \propto r^E$ . En la geometría fractal,  $E$  se reemplaza por la dimensión fractal (Mandelbrot, 1983)  $m_r \propto r^D$ . De esta relación se puede inferir que la medida de Hausdorff, definida por las ecuaciones 38 y 39 con  $S = D$  es, de hecho, una medida de masa. Esta proporción se transforma en una igualdad con el auxilio de la escala  $H$ , definida por la ecuación 40:  $m_r = m_H (r/H)^D$ , donde  $m_H$  es la masa correspondiente a  $r = H$ . Puesto que en la ecuaciones 40 y 45 se han considerado conjuntos cubiertas de la misma forma, se tiene  $m_H = \rho_H cH^E$ , donde la densidad  $\rho_H$  corresponde a  $r = H$ . En otros términos, se puede establecer que cuando  $r \rightarrow 0$ :

$$m_r = \rho_H cH^E \left(\frac{r}{H}\right)^D \quad (47)$$

Si la masa se expresa como  $m_r = \rho_r cr^E$ , la densidad ( $\rho_r$ ), considerando la ecuación 47, queda definida por ( $r \rightarrow 0$ ):

$$\rho_r = \rho_H \left(\frac{H}{r}\right)^{E-D} \quad (48)$$

De acuerdo con las ecuaciones 42, 45, 47 y 48, se satisfacen los límites siguientes:

$$\rho_H cH^E = \lim_{r \rightarrow 0} [N_r m_r] \quad (49)$$

$$\rho_H cH^E = \lim_{r \rightarrow 0} [\rho_r \text{vol}_E(P_r)] \quad (50)$$

Se puede definir una densidad ( $\langle \rho_r \rangle$ ), de modo que la masa contenida en los conjuntos cubiertas sea obtenida a partir del volumen del cuerpo paralelo. Cuando  $r \rightarrow 0$ :

$$m_r = \langle \rho_r \rangle \text{vol}_E(P_r) \quad (51)$$

donde:

$$\langle \rho_r \rangle = \rho_H \left(\frac{r}{H}\right)^{2D-E} \quad (52)$$

La relación superficie-volumen de Mandelbrot. Puesto que el volumen ( $V$ ) es proporcional a  $L^3$  y el área ( $A$ ) a  $L^2$ , donde  $L$  representa una longitud,  $V^{1/3}$  es proporcional a  $A^{1/2}$  en la geometría de Euclides. De acuerdo con Mandelbrot, en la geometría fractal  $V^{1/3}$  es proporcional a  $A^{1/D}$ , donde  $D$  es la dimensión fractal (Mandelbrot, 1983). Esta proporción puede ser generalizada de la manera siguiente:

$$sup_E(F) \propto [vol_E(F)]^{D/E} \quad (53)$$

La equivalencia superficie-masa. El volumen de cada conjunto cubierta es proporcionado por  $cr^F$ . De la ecuación 53 se obtiene la proporción:  $sup_E(U) \propto r^D$ . Considerando la ecuación 47 se establece la equivalencia siguiente:

$$m_E(F) \propto sup_E(F) \quad (54)$$

Cuando se reemplaza la masa por la superficie en las ecuaciones 47 a 52, la densidad  $\rho_H$ , en lugar de representar el contenido de masa en una unidad de volumen, representa el contenido de superficie en una unidad de volumen correspondiente a  $r = H$ .

#### Relación entre la dimensión fractal y la porosidad

Para explicar las correcciones empíricas introducidas en los modelos de Purcell y Childs y Collis-George de la permeabilidad, nos apoyaremos en el enfoque de Millington y Quirk (1961). Especialmente se ofrecerá una justificación de la expresión  $(1 - \phi)^s + \phi^{2s} = 1$  en el contexto de la geometría fractal.

Considerando al suelo como un objeto fractal, se puede aplicar la ecuación 47 de la manera siguiente: si  $\phi_s = 1 - \phi$  representa el volumen de los sólidos relativo al volumen total de suelo (o "solidicidad volumétrica"), entonces el área de los sólidos relativa al área total del suelo (o "solidicidad areal"),  $\mu_s$ , será igual a  $\phi_s^s$ , con  $s = D/E$ . Siguiendo la idea probabilística, hagamos un corte perpendicular a la dirección macroscópica del movimiento para obtener dos secciones paralelas situadas en  $x$  e  $y$  del eje del escurrimiento. Sobre cada sección, el área de los poros es, según la ecuación 47, igual a  $\phi^s$ . La probabilidad total del encuentro de las secciones ( $\mu$ ) en un punto intermedio es el área de flujo  $\mu = \phi^s \phi^s = \phi^{2s}$ .

Puesto que  $\phi_s + \phi = 1$  y  $\mu_s + \mu = 1$  se establece la relación fundamental siguiente:

$$(1 - \phi)^s + \phi^{2s} = 1 \quad \text{con} \quad s = D/E \quad (55)$$

en otros términos se tiene:

$$\text{Solidicidad areal:} \quad \mu_s = 1 - \mu = (1 - \phi)^s = \phi_s^s \quad (56)$$

$$\text{Porosidad areal:} \quad \mu = \phi^s \phi^s = \phi^{2s} \quad (57)$$

A partir de la ecuación 55 se puede demostrar que se satisface la desigualdad  $\mu \leq \phi$ . De la misma ecuación se deducen los comportamientos extremos de la función  $s(\phi)$ :

$$\text{Para } \phi \rightarrow 0: \quad s(\phi) = 1/2 + \ln 2 / \{2[1 + \ln(1/\phi)]\} \quad (57.1)$$

$$\text{Para } \phi \rightarrow 1: \quad s(\phi) = 1 - \ln 2 / \{\ln[1/(1 - \phi)]\} \quad (57.2)$$

$$\text{De donde:} \quad \frac{1}{2} < s < 1 \quad (57.3)$$

Las ecuaciones 55 y 57 establecen que la dimensión fractal de los suelos ( $E = 3$ ) satisface  $3/2 < D < 3$ . Según estos resultados, se puede inferir que: a) el modelo de la permeabilidad de Purcell (ecuación 19) es representativo de los suelos donde la porosidad es pequeña, como en los suelos arenosos, y b) el modelo de la permeabilidad de Childs y Collis-George (ecuación 24) es representativo de los suelos donde la porosidad es grande, como en los suelos arcillosos.

Algunos valores importantes de la dimensión fractal y de la porosidad se obtienen en los siguientes casos:

1. Para el valor de Millington y Quirk  $s = 2/3$  ( $E = 3 \Rightarrow D = 2$ ), se puede demostrar, a partir de la ecuación 55, que la porosidad volumétrica ( $\phi$ ) satisface el polinomio siguiente:

$$\phi^9 + 3\phi^7 - 6\phi^6 + 3\phi^5 - 12\phi^4 + 40\phi^3 - 60\phi^2 + 39\phi - 8 = 0 \quad (58)$$

La raíz en el intervalo (0, 1) es  $\phi \cong 0.3671$ , lo que conduce a  $\mu \cong 0.2628$ .

2. Si la porosidad volumétrica es igual a la solidicidad volumétrica, es decir,  $\phi = \phi_s = 1/2$ , entonces de la ecuación 55:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^{2s} = \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s = 1 \quad (59)$$

haciendo  $x = (1/2)^s$  se obtiene la ecuación que define la proporción áurea (Huntley, 1970):  $x^2 + x - 1 = 0$ . La raíz positiva proporciona:

La solidicidad areal:

$$\mu_s = \left(\sqrt{5} - 1\right)/2 \cong 0.6180$$

La dimensión fractal:

$$s = \log_2 \left[ \left( 1 + \sqrt{5} \right) / 2 \right] \cong 0.6942. (E = 3 \Rightarrow D \cong 2.0827)$$

La porosidad areal:

$$\mu = \left[ \left( \sqrt{5} - 1 \right) / 2 \right]^2 \cong 0.3820$$

3) Si la porosidad areal es igual a la solidicidad areal, es decir  $\mu = \mu_s = 1/2$ , entonces de la ecuación 55:

$$\left( \frac{1}{2} \right)^{1/s} + \left( \frac{1}{2} \right)^{1/2s} = \left( \frac{1}{4} \right)^{1/2s} + \left( \frac{1}{2} \right)^{1/2s} = 1 \quad (60)$$

haciendo  $x = (1/2)^{1/2s}$ , se obtiene de nuevo la ecuación  $x^2 + x - 1 = 0$ , que define la proporción áurea. La raíz positiva proporciona:

La porosidad volumétrica:

$$\phi = \left[ \left( \sqrt{5} - 1 \right) / 2 \right] \cong 0.6180$$

La dimensión fractal:

$$s = 1 / \left\{ 2 \log_2 \left[ \left( 1 + \sqrt{5} \right) / 2 \right] \right\} \cong 0.7202. (E = 3 \Rightarrow D \cong 2.1606)$$

La solidicidad volumétrica:

$$\phi_s = \left[ \left( 3 - \sqrt{5} \right) / 2 \right] \cong 0.3820$$

### Las densidades

Teniendo en cuenta la estructura de la ecuación 56, la superficie de los sólidos contenida en las cubiertas, considerando la ecuación 54, es proporcionada por:

$$m_s(r) = \rho_s c H_s^E \left( \frac{r}{H_s} \right)^{E-D} \quad (61)$$

cuando  $r \rightarrow 0$ , donde  $c H_s^E = V_s$  es el volumen total de los sólidos y  $\rho_s$  es la densidad total de los sólidos. La densidad de los sólidos correspondiente a  $r$  se obtiene de la ecuación 48 ( $r \rightarrow 0$ ):

$$\rho_s(r) = \rho_s \left( \frac{H_s}{r} \right)^{E-D} \quad (62)$$

Las ecuaciones 42 y 45 correspondientes a los sólidos se escriben, cuando  $r \rightarrow 0$ , como sigue:

$$N_s(r) = \left( \frac{H_s}{r} \right)^D \quad (63)$$

$$\text{vol}_E(P_r) = c H_s^E \left( \frac{r}{H_s} \right)^{E-D} \quad (64)$$

De manera análoga y de acuerdo con la estructura de la ecuación 57, la superficie de los poros contenida en las cubiertas, considerando la ecuación 54, es proporcionada por:

$$m_v(r) = \rho_v c H_v^E \left( \frac{r}{H_v} \right)^{2D} \quad (65)$$

cuando  $r \rightarrow 0$ , donde  $c H_v^E = V_v$  es el volumen total de los poros y  $\rho_v$  es la densidad total de los poros. La densidad de los poros correspondiente a  $r$ , cuando  $r \rightarrow 0$ , se obtiene de la ecuación 52:

$$\rho_v(r) = \rho_v \left( \frac{r}{H_v} \right)^{2D-E} \quad (66)$$

Puesto que el volumen total de suelo ( $V_t = c H_t^E$ ) es igual a la suma de los volúmenes totales de los sólidos ( $V_s = c H_s^E$ ) y de los poros ( $V_v = c H_v^E$ ), se establece que:

$$H_s^E + H_v^E = H_t^E \quad (67)$$

$$\phi_s = \frac{H_s^E}{H_t^E} \quad (68)$$

$$\phi = \frac{H_v^E}{H_t^E} \quad (69)$$

La suma de la superficie total de los sólidos ( $M_s$ ) y la superficie total de los poros ( $M_v$ ) es igual a la superficie total del suelo ( $M_t$ ). Dada la equivalencia entre la superficie y la masa establecida en la ecuación 54 se tiene  $M_s = \rho_s c H_s^E$ ,  $M_v = \rho_v c H_v^E$  y  $M_t = \rho_t c H_t^E$  donde  $\rho_s$  es la densidad de los sólidos,  $\rho_v$  es la densidad de los poros y  $\rho_t$  es la densidad total del suelo. Las ecuaciones 68 y 69 permiten establecer:

$$\rho_s (1 - \phi) + \rho_v \phi = \rho_t \quad (70)$$

La comparación de las ecuaciones 55 y 70 permite obtener las definiciones siguientes de las densidades totales:

$$\rho_s = \rho_t \phi_s^{s-1} = \rho_t \left( \frac{H_s}{H_t} \right)^{D-E} \quad (70.1)$$

$$\rho_v = \rho_t \phi^{2s-1} = \rho_t \left( \frac{H_v}{H_t} \right)^{2D-E} \quad (70.2)$$

Se puede ver que la ecuación 70.1 es análoga a la ecuación 62 y que la ecuación 70.2 es análoga a la ecuación 66.

*Las porosidades parciales*

*Relación entre las porosidades volumétrica y areal parciales.* Cuando los poros no se encuentran totalmente llenos con agua, la relación entre las porosidades areal y volumétrica definida por la ecuación 57 debe ser generalizada a las porosidades parciales. Puesto que  $\theta$  es la porosidad volumétrica parcial (o contenido volumétrico de humedad cuando los poros contienen agua), se define  $\omega$  como la porosidad areal parcial (o área común de flujo) correspondiente (ver las ecuaciones 18 y 21). La relación entre la porosidad areal parcial ( $\omega$ ) y la porosidad volumétrica parcial ( $\theta$ ) se obtiene a partir de la ecuación 57:

$$\omega = \theta^{2s} \quad \text{con} \quad 0 \leq \omega \leq \mu \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq \phi \quad (71)$$

donde, de manera análoga a la ecuación 20, se puede definir:

$$\omega(R_s) = \int_0^{R_s} g(r_s) dr_s \quad (72)$$

en la cual  $g(r_s)$  es la función densidad de la porosidad areal.

*La porosidad volumétrica parcial en el suelo.* En el trabajo pionero de Brooks y Corey (1964) se argumenta experimentalmente que la relación entre el contenido volumétrico de agua y la presión del agua, llamada curva característica de humedad o curva de retención, es bien representada por una función potencia cuando la presión es pequeña, es decir  $\theta(\psi) \propto 1/|\psi|^\lambda$ , cuando  $\psi \ll 0$ , y  $\lambda > 0$ . Considerando lo anterior y la ley de Laplace definida por la ecuación 3, la relación entre la porosidad volumétrica parcial y el radio de poro es bien representada por una función en potencia, esto es  $\theta(R) \propto R^\lambda$  cuando  $R \rightarrow 0$ ; la potencia  $\lambda$  es llamada "índice de poros". Definiendo un tamaño de poro crítico ( $R_o$ ) asociado con una presión crítica en el sentido de Brooks y Corey y a la porosidad volumétrica total, se puede escribir la porosidad volumétrica parcial en función del poro de tamaño  $R$ , con la ayuda de la ecuación 25, de la siguiente manera:

$$\theta(R) = \phi S(R/R_o) \quad (73.1)$$

donde la función  $S(r)$  está definida por:

$$S(p) = p^\lambda \quad (73.2)$$

Puesto que  $R$  es el radio perpendicular a la trayectoria tortuosa y  $R_s$  es el radio perpendicular a la trayectoria rectilínea en un punto dado, es razonable suponer que la contribución relativa a la porosidad volumétrica por el primero es la misma contribución relativa a la porosidad areal por el segundo. En otros términos, se puede escribir una relación análoga a la ecuación 73 para la porosidad areal:

$$\omega(R_s) = \mu S(R_s/R_{so}) \quad (74)$$

donde el radio  $R_{so}$  corresponde al radio  $R_o$ .

La combinación de las ecuaciones 73 y 74, considerando las ecuaciones 57 y 71, permite establecer la relación siguiente entre  $R_s$  y  $R$ :

$$\frac{R_s}{R_{so}} = \left( \frac{R}{R_o} \right)^{2s} \quad (75)$$

*La semiporosidad areal*

Se introduce el concepto de "semiporosidad" areal, útil para la integración del modelo de la ecuación 15. Según la ecuación 57, la porosidad areal o probabilidad en  $x$  e  $y$  es definida respectivamente por  $\mu_x = \phi_x^{2s_x}$  y  $\mu_y = \phi_y^{2s_y}$ , donde  $s_x$  y  $s_y$  son las dimensiones fractales relativas a la dimensión de Euclides en los puntos  $x$  e  $y$  respectivamente, calculadas en función de  $\phi_x$  y  $\phi_y$  con la utilización de la ecuación 55; estas porosidades pueden ser diferentes si el suelo es heterogéneo. La porosidad areal en  $z$  intermedio a  $x$  e  $y$  es dada por  $\mu = \sqrt{\mu_x \mu_y}$ . En otros términos, la porosidad areal o probabilidad en  $z$  es el resultado de una "parte" de la probabilidad en  $x$  igual a  $\sqrt{\mu_x}$  y de otra "parte" en  $y$  igual a  $\sqrt{\mu_y}$ . Llamaremos a esta parte de la probabilidad una semiprobabilidad o una semiporosidad areal, que será denotada por  $\phi$  y definida por:

$$\phi = \sqrt{\mu} = \phi^s \quad (76)$$

La relación entre la semiporosidad areal parcial, denotada por  $\omega$ , y la porosidad volumétrica parcial ( $\theta$ ) se obtiene a partir de la generalización de la ecuación 76, es decir:

$$\omega = \sqrt{\omega} = \theta^s \quad \text{con} \quad 0 \leq \omega \leq \phi \quad (77)$$

La semiporosidad areal total ( $\phi$ ) satisface la relación siguiente:

$$\int_{\Omega_T} d\omega = \phi \quad (78)$$

Para caracterizar las dos secciones situadas en  $x$  e  $y$  sobre la trayectoria rectilínea, se utiliza la notación  $(r_s, \rho_s)$  para designar los tamaños que definen la porosidad areal parcial y la notación  $(\tilde{r}_s, \tilde{\rho}_s)$  para designar los "semitamaños", que definen la semiprobabilidad parcial o semiporosidad areal parcial ( $\omega$ ). De acuerdo con las ecuaciones 75 y 77:

$$\frac{\tilde{R}_s}{\tilde{R}_{so}} = \sqrt{\frac{R_s}{R_{so}}} = \left(\frac{R}{R_o}\right)^s \quad (79)$$

donde  $\tilde{R}_{so}$  corresponde a  $R_{so}$ .

De las ecuaciones 73 a 79, se sigue:

$$\omega(\tilde{R}_s) = \phi S(\tilde{R}_s/\tilde{R}_{so}) \quad (80)$$

### La tortuosidad local

La tortuosidad local, es decir la tortuosidad en función de cada tamaño de poro ( $r$ ), se deduce con la introducción de la ecuación 75 en la ecuación 9:

$$T(r) = T_o \left(\frac{R_o}{r}\right)^\delta \quad \text{con} \quad 0 < \delta = 2s - 1 < 1 \quad (81)$$

donde  $T_o = R_o/R_{so}$ .

Se debe observar que la forma de la ecuación 81 justifica en el formalismo fractal la ecuación empírica 29 propuesta por Fatt y Dysktra (1951). Se debe también observar que con el valor  $s = 1/2$  ( $\delta = 0$ ) se deduce de la ecuación 81  $T = T_o = \text{constante}$ , resultado compatible con el modelo extremo propuesto por Purcell, deducido a partir de un sistema de capilares paralelos y aplicable cuando la porosidad tiende a cero. En el modelo extremo propuesto por Childs y Collis-George, aplicable para los suelos en donde la porosidad tiende a la unidad, es necesario introducir la corrección por tortuosidad con  $s = 1$  ( $\delta = 1$ ). Es importante señalar que  $T^E(r)$ , ecuación 81, es inversamente proporcional a la densidad  $\rho_v(r)$ , definida por la ecuación 66.

### Modelos de la conductividad hidráulica

Las semiporosidades areales parciales en los puntos  $x$  e  $y$  sobre la trayectoria rectilínea son representadas respectivamente por  $\omega_x$  y  $\omega_y$ . El área de flujo en un punto intermedio se define por:

$$d\omega(\tilde{r}_s, \tilde{\rho}_s) = d\omega_x(\tilde{r}_s) d\omega_y(\tilde{\rho}_s) \quad (82)$$

La integral de la ecuación 15, que define la permeabilidad, toma la forma:

$$k = C_f \int_{\Omega} [R_s(\tilde{r}_s, \tilde{\rho}_s)]^2 d\omega_x(\tilde{r}_s) d\omega_y(\tilde{\rho}_s) \quad (83)$$

donde  $\tilde{r}_s$  (o  $\tilde{\rho}_s$ ) está relacionado con  $r_s$  (o  $\rho_s$ ) a través de la ecuación 79.

Las interpretaciones del radio  $R_s$  que interviene en esta expresión conducen a diferentes modelos de la permeabilidad.

#### Modelo del "poro pequeño"

Utilicemos la hipótesis de la ecuación 23 de Childs y Collis-George para los radios perpendiculares a la trayectoria rectilínea:

$$R_s = \min(r_s, \rho_s) \quad (84)$$

La integración de la ecuación 83 es por lo tanto análoga a la de la ecuación 22, es decir:

$$k = C_f \left[ \int_{\tilde{\rho}_s=0}^{\tilde{\rho}_s=\tilde{R}_s} \int_{\tilde{r}_s=0}^{\tilde{r}_s=\tilde{\rho}_s} r_s^2 d\omega_x(\tilde{r}_s) d\omega_y(\tilde{\rho}_s) + \int_{\rho_s=0}^{\rho_s=\tilde{R}_s} \int_{\tilde{r}_s=\tilde{\rho}_s}^{\tilde{r}_s=\tilde{R}_s} \rho_s^2 d\omega_x(\tilde{r}_s) d\omega_y(\tilde{\rho}_s) \right] \quad (85)$$

Para un suelo homogéneo ( $\omega_x = \omega_y = \omega$ ) es fácil demostrar, haciendo cambios de variables y de orden de integración, que las integrales son iguales. Dicho de otra manera:

$$k = 2C_f \int_0^{\tilde{R}_s} [\omega(\tilde{R}_s) - \omega(\tilde{r}_s)] r_s^2 d\omega(\tilde{r}_s) \quad (86)$$

#### Modelo de la media geométrica

Adoptemos la hipótesis original debida a Mualem (1976), que considera el radio volumétrico  $R$  como la media geométrica de  $r$  y  $\rho$ , para los radios areales:

$$R_s^2 = r_s \rho_s \quad (87)$$

La ecuación 83 de la permeabilidad se transforma en:

$$k = C_f \int_0^{\tilde{R}_s} r_s d\omega_x(\tilde{r}_s) \int_0^{\tilde{R}_s} \rho_s d\omega_y(\tilde{\rho}_s) \quad (88)$$

Si el suelo es homogéneo se tiene evidentemente ( $\omega_x = \omega_y = \omega$ ):

$$k = C_f \left[ \int_0^{\tilde{R}_s} r_s d\omega_x(\tilde{r}_s) \right]^2 \quad (89)$$

*Modelo del "poro neutro"*

Cuando se considera que no hay preferencia por los radios,

$$R_s = r_s \quad \text{o} \quad R_s = \rho_s, \quad (90)$$

se obtiene a partir de la ecuación 83:

$$k = C_f \varpi_x(\bar{R}_s) \int_0^{\bar{R}_s} \rho_s^2 d\varpi_y(\bar{\rho}_s) = C_f \varpi_y(\bar{R}_s) \int_0^{\bar{R}_s} r_s^2 d\varpi_x(\bar{r}_s) \quad (91)$$

Si el suelo es homogéneo se tiene ( $\varpi_x = \varpi_y = \varpi$ ):

$$k = C_f \varpi(\bar{R}_s) \int_0^{\bar{R}_s} r_s^2 d\varpi(\bar{r}_s) \quad (92)$$

*Modelo del "poro grande"*

Consideremos finalmente que el poro de radio más grande determina la resistencia al flujo, en otros términos:

$$\begin{aligned} R_s &= \rho_s & \text{si} & \quad r_s < \rho_s \\ R_s &= r_s & \text{si} & \quad \rho_s < r_s \end{aligned} \quad (93)$$

es decir  $R_s = \max(r_s, \rho_s)$ .

Con esta hipótesis, la ecuación 83 conduce a:

$$\begin{aligned} k = C_f & \left[ \int_{\bar{r}_s=0}^{\bar{r}_s=\bar{R}_s} \int_{\bar{\rho}_s=0}^{\bar{\rho}_s=\bar{r}_s} r_s^2 d\varpi_x(\bar{r}_s) d\varpi_y(\bar{\rho}_s) \right. \\ & \left. + \int_{\bar{\rho}_s=0}^{\bar{\rho}_s=\bar{R}_s} \int_{\bar{r}_s=0}^{\bar{r}_s=\bar{\rho}_s} \rho_s^2 d\varpi_x(\bar{r}_s) d\varpi_y(\bar{\rho}_s) \right] \quad (94) \end{aligned}$$

y realizando la primera integral, a:

$$k = C_f \left[ \int_0^{\bar{R}_s} r_s^2 \varpi_y(\bar{r}_s) d\varpi_x(\bar{r}_s) + \int_0^{\bar{R}_s} \rho_s^2 \varpi_x(\bar{\rho}_s) d\varpi_y(\bar{\rho}_s) \right] \quad (95)$$

Para el suelo homogéneo se tiene ( $\varpi_x = \varpi_y = \varpi$ ):

$$k = 2C_f \int_0^{\bar{R}_s} r_s^2 \varpi(\bar{r}_s) d\varpi(\bar{r}_s) \quad (96)$$

*Resumen de modelos de la conductividad*

El tamaño de poro se toma en la literatura como aquel que satisface la ley de Laplace. Los modelos para estimar la conductividad hidráulica relativa a partir de la curva de retención,  $\psi(\theta)$ , se obtienen de las ecuaciones 86, 89, 92 y 96, considerando las ecuaciones 3, 75 y 81, a saber:

El modelo del "poro pequeño":

$$\frac{K(\theta)}{K_s} = \int_0^\theta \frac{\theta^s - \vartheta^s}{[\psi(\vartheta)]^{4s}} \vartheta^{s-1} d\vartheta \quad \Bigg/ \quad \int_0^\phi \frac{\phi^s - \vartheta^s}{[\psi(\vartheta)]^{4s}} \vartheta^{s-1} d\vartheta \quad (97)$$

El modelo de la "media geométrica":

$$\frac{K(\theta)}{K_s} = \left[ \int_0^\theta \frac{\vartheta^{s-1} d\vartheta}{[\psi(\vartheta)]^{2s}} \quad \Bigg/ \quad \int_0^\phi \frac{\vartheta^{s-1} d\vartheta}{[\psi(\vartheta)]^{2s}} \right]^2 \quad (98)$$

El modelo del "poro neutro":

$$\frac{K(\theta)}{K_s} = \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^s \left[ \int_0^\theta \frac{\vartheta^{s-1} d\vartheta}{[\psi(\vartheta)]^{4s}} \quad \Bigg/ \quad \int_0^\phi \frac{\vartheta^{s-1} d\vartheta}{[\psi(\vartheta)]^{4s}} \right] \quad (99)$$

El modelo del "poro grande":

$$\frac{K(\theta)}{K_s} = \int_0^\theta \frac{\vartheta^{2s-1}}{[\psi(\vartheta)]^{4s}} d\vartheta \quad \Bigg/ \quad \int_0^\phi \frac{\vartheta^{2s-1}}{[\psi(\vartheta)]^{4s}} d\vartheta \quad (100)$$

En estos modelos se puede incorporar el contenido volumétrico de agua residual ( $\theta_r$ ), definido por Brooks y Corey (1964), de manera que  $K(\theta_r) = 0$ , reemplazando  $\theta$  por el contenido volumétrico de agua  $\theta_{ef} = \theta - \theta_r$ , y  $\phi$  por la porosidad volumétrica efectiva  $\phi_{ef} = \phi - \theta_r$ . La dimensión fractal relativa correspondiente se deberá calcular reemplazando  $\phi$  en la ecuación 55 por la porosidad efectiva ( $\phi_{ef}$ ). En otras palabras, el contenido volumétrico de agua residual se adiciona a la solidicidad volumétrica total:  $\phi_{sef} = 1 - \phi_{ef} = \phi_s + \theta_r$ .

*Comparación de los modelos*

La integración analítica de los cuatro modelos expuestos es elemental con las ecuaciones 80 y 81, considerando las ecuaciones 73 a 77 o con el formalismo de Brooks y Carey. Estas ecuaciones ponen en evidencia de una manera simple las principales diferencias entre los modelos de la permeabilidad. A partir de las ecuaciones 97 a 100 se puede demostrar que la conductividad relativa resultante es la misma; las diferencias entre los modelos radican en las expresiones para la conductividad total. En otros términos se obtiene:

1) La permeabilidad relativa:

$$\frac{k(\theta)}{k_s} = \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^\beta \quad \text{con} \quad \beta = 2s(2/\lambda + 1) \quad (101)$$

2) La permeabilidad total:

$$k_s = C_f \Lambda \mu R_{so}^2 = \frac{C_f}{T_o^2} \Lambda \phi^{2s} R_o^2 \quad (102)$$

en donde el factor de ponderación  $\Lambda$  es diferente para cada modelo. Denotando a  $\Lambda$  por  $\Lambda_p$  para el modelo del poro pequeño (ecuación 86),  $\Lambda_g$  para el modelo de la media geométrica de los tamaños de los poros (ecuación 89),  $\Lambda_N$  para el modelo del poro neutro (ecuación 92),  $\Lambda_G$  para el modelo del poro grande (ecuación 96), se tiene:

$$\Lambda_p = \frac{1}{2[2/\lambda + 1/2][2/\lambda + 1]}, \quad \Lambda_g = \frac{1}{[2/\lambda + 1]^2}, \quad (103)$$

$$\Lambda_N = \frac{1}{2[2/\lambda + 1/2]}, \quad \Lambda_G = \frac{1}{2/\lambda + 1}$$

A partir de la ecuación 103 se puede verificar que se satisfacen las desigualdades  $\Lambda_p < \Lambda_g < \Lambda_N < \Lambda_G$ ; las igualdades corresponden a los extremos ( $\lambda \rightarrow 0, \infty$ ). Cuando  $\lambda \rightarrow 0$  se tiene el comportamiento:  $\Lambda_p = \lambda^2/8 < \Lambda_g = \lambda^2/4 < \Lambda_N = \lambda/4 < \Lambda_G = \lambda/2$ . Los valores de  $k_s$  correspondientes satisfacen:

$$k_{sp} < k_{sg} < k_{sN} < k_{sG} \quad (104)$$

Se observará que la ecuación 101 generaliza la ecuación deducida por Irmay (1954),  $\beta = 3$ , a partir de la teoría de Koseny para el flujo saturado. La forma ya había sido obtenida anteriormente por Averyanov (1950) a partir de la resolución de la ecuación de Navier-Stokes para el movimiento del agua en un tubo, en el cual el agua es ubicada sobre la pared del tubo y el aire en su centro; la solución formal correspondiente es  $k_r(S) = S(3S - 2) - 2(1 - S)^2 \ln(1 - S)$ , donde  $S = \theta/\phi$ . Suponiendo que la integral total de esta solución es igual a la integral total de la función 101, Averyanov obtiene  $\beta = 7/2 = 3.5$ . Yuster (1951) deduce  $\beta = 2$ , suponiendo que el aire se mueve con el mismo gradiente que el agua en el modelo de Averyanov. Corey (1954) sugiere un valor empírico de  $\beta = 4$ . Brooks y Corey (1964) establecen la misma forma con la introducción de su modelo de  $\theta(\psi)$  en el modelo de la ecuación 28 de Burdine, ellos obtienen  $\beta = 2/\lambda + 3$ .

### Los modelos clásicos dentro de la geometría fractal

A continuación se establecen los modelos clásicos de la literatura a partir de los cuatro modelos conceptuales expuestos líneas arriba.

### La correlación global

Para obtener la estructura de los modelos clásicos vamos a introducir una hipótesis simplificadora. Observemos que la porosidad areal dada por la ecuación 84 puede ser expresada en función de los radios volumétricos  $(r, \rho)$ , es decir  $d\omega(r, \rho) = s^2 [\theta(r)]^{s-1} [\theta(\rho)]^{s-1} d\theta(r) d\theta(\rho)$ . Bajo la hipótesis de que la función multiplicativa de las diferenciales de  $\theta(r)$  y  $\theta(\rho)$  puede ser reemplazada por una media que depende sólo del límite superior, esto es de  $R$ , se obtiene:

$$d\omega(r, \rho; R) = [\theta(R)]^{2s-2} d\theta(r) d\theta(\rho) \quad (105)$$

$$= [\theta(R)]^{2s-2} f(r) f(\rho) dr d\rho$$

en donde se ha eliminado el término  $s^2$  para satisfacer las ecuaciones 12 y 71, a saber:

$$\int_0^R \int_0^R d\omega(r, \rho; R) = \omega = \theta^{2s} \quad (106)$$

### La tortuosidad global

La hipótesis compatible con la anterior es la hipótesis de que la tortuosidad es una función solamente del radio mayor, esto es, solamente de la humedad. Esta tortuosidad global resulta de la combinación de las ecuaciones 73 y 81:

$$T(R) = T_o \left[ \frac{\phi}{\theta(R)} \right]^\gamma \quad \text{con} \quad \gamma = \frac{\delta}{\lambda} \quad (107)$$

En varios trabajos reportados en la literatura (Rieu y Sposito, 1991a, b) se ha sugerido que la porosidad volumétrica parcial es proporcional al volumen del cuerpo paralelo  $\theta(R) \propto R^{E-D}$ . Si tal es el caso, se deduce que:

$$\lambda = E - D = E(1 - s) \quad (108)$$

Se debe notar sin embargo que el resultado de la ecuación 75 es independiente del significado de  $\lambda$  proporcionado por la ecuación 108.

De la ecuación 9 se tiene  $R_s(r, \rho; \theta) = R(r, \rho)/T(\theta)$ . La ecuación 107 conduce a:

$$R_s(r, \rho; \theta) = \frac{1}{T_o} \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^\gamma R(r, \rho) \quad (109)$$

La introducción de las ecuaciones 105 y 109 en la ecuación 15 permite expresar la permeabilidad de la manera siguiente:

$$k = \frac{C_f}{T_o^2} \phi^{2s-2} \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^p \int_{\Omega} [R(r,\rho)]^2 d\theta(r)d\theta(\rho) \quad (110)$$

donde:

$$\bar{\rho} = (2s - 2) + (2\gamma) \quad (111)$$

en esta potencia, el primer sumando representa los efectos globales de la correlación de los poros, mientras que el segundo representa los efectos globales debidos a la tortuosidad de las trayectorias de flujo.

Los modelos de la permeabilidad que resultan al introducir las cuatro hipótesis de la sección anterior son, respectivamente, los siguientes.

*Modelo del "poro pequeño"  $R(r,\rho) = \min(r,\rho)$*

La permeabilidad parcial:

$$k(\theta) = \frac{2C_f}{T_o^2} \phi^{2s-2} \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^p \int_0^\theta [\theta - \vartheta] r^2 d\vartheta \quad (112)$$

La permeabilidad total:

$$k_s = \frac{2C_f}{T_o^2} \phi^{2s-2} \int_0^\theta [\theta - \vartheta] r^2 d\vartheta = \frac{2C_f}{T_o^2} \phi^{2s} \int_0^1 [1-S] r^2 dS \quad (113)$$

La permeabilidad relativa:

$$\frac{k(\theta)}{k_s} = \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^p \left[ \int_0^\theta [\theta - \vartheta] r^2 d\vartheta \right] / \left[ \int_0^\theta [\phi - \vartheta] r^2 d\vartheta \right] \quad (114)$$

Este es el modelo de Childs y Collis-George (1950) con un factor de corrección.

*Modelo de la "media geométrica"  $[R(r,\rho)]^2 = r\rho$*

La permeabilidad parcial:

$$k(\theta) = \frac{C_f}{T_o^2} \phi^{2s-2} \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^p \left[ \int_0^\theta r d\vartheta \right]^2 \quad (115)$$

La permeabilidad total:

$$k_s = \frac{C_f}{T_o^2} \phi^{2s-2} \left[ \int_0^\theta r d\vartheta \right]^2 = \frac{C_f}{T_o^2} \phi^{2s} \left[ \int_0^1 r dS \right]^2 \quad (116)$$

La permeabilidad relativa:

$$\frac{k(\theta)}{k_s} = \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^p \left[ \int_0^\theta r d\vartheta \right]^2 / \left[ \int_0^\theta r d\vartheta \right]^2 \quad (117)$$

Este es el modelo presentado por Mualem (1976) con un factor de corrección.

*Modelo del "poro neutro"  $R(r,\rho) = r$  o  $R(r,\rho) = \rho$*

La permeabilidad parcial:

$$k(\theta) = \frac{C_f}{T_o^2} \phi^{2s-1} \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^{p+1} \int_0^\theta r^2 d\vartheta \quad (118)$$

La permeabilidad total:

$$k_s = \frac{C_f}{T_o^2} \phi^{2s-1} \int_0^\theta r^2 d\vartheta = \frac{C_f}{T_o^2} \phi^{2s} \int_0^1 r^2 dS \quad (119)$$

La permeabilidad relativa:

$$\frac{k(\theta)}{k_s} = \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^{p+1} \left[ \int_0^\theta r^2 d\vartheta \right] / \left[ \int_0^\theta r^2 d\vartheta \right] \quad (120)$$

Este modelo presenta la estructura del modelo de Burdine (1953).

*Modelo del "poro grande"  $R(r,\rho) = \max(r,\rho)$*

La permeabilidad parcial:

$$k(\theta) = \frac{2C_f}{T_o^2} \phi^{2s-2} \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^p \int_0^\theta r^2 \vartheta d\vartheta \quad (121)$$

La permeabilidad total:

$$k_s = \frac{2C_f}{T_o^2} \phi^{2s-2} \int_0^\theta r^2 \vartheta d\vartheta = \frac{2C_f}{T_o^2} \phi^{2s} \int_0^1 r^2 S dS \quad (122)$$

La permeabilidad relativa:

$$\frac{k(\theta)}{k_s} = \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^p \left[ \int_0^\theta r^2 \vartheta d\vartheta \right] / \left[ \int_0^\theta r^2 \vartheta d\vartheta \right] \quad (123)$$

*Resumen de modelos clásicos*

Los modelos propuestos en la literatura para estimar la conductividad hidráulica relativa a partir de la curva de retención,  $\psi(\theta)$  se obtienen de las ecuaciones 114, 117, 120 y 123, a saber:

El modelo de Childs y Collis-George (1950) generalizado:

$$\frac{K(\theta)}{K_s} = \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^p \left[ \int_0^\theta \frac{\theta - \vartheta}{\psi^2(\vartheta)} d\vartheta \right] / \left[ \int_0^\theta \frac{\theta - \vartheta}{\psi^2(\vartheta)} d\vartheta \right] \quad (124)$$



El modelo de Mualem (1976) generalizado:

$$\frac{K(\theta)}{K_s} = \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^p \left[ \int_0^\theta \frac{d\vartheta}{\Psi(\vartheta)} \Big/ \int_0^\phi \frac{d\vartheta}{\Psi(\vartheta)} \right]^2 \quad (125)$$

El modelo de Burdine (1953) generalizado:

$$\frac{K(\theta)}{K_s} = \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^{p+1} \left[ \int_0^\theta \frac{d\vartheta}{\Psi^2(\vartheta)} \Big/ \int_0^\phi \frac{d\vartheta}{\Psi^2(\vartheta)} \right] \quad (126)$$

El modelo de Fuentes (1992):

$$\frac{K(\theta)}{K_s} = \left[ \frac{\theta}{\phi} \right]^p \left[ \int_0^\theta \frac{\vartheta}{\Psi^2(\vartheta)} d\vartheta \Big/ \int_0^\phi \frac{\vartheta}{\Psi^2(\vartheta)} d\vartheta \right] \quad (127)$$

La potencia  $p$  resulta de la ecuación 107, de la veracidad de la ecuación 108 con  $E = 3$  y con la ecuación 111:

$$p = p_1 + p_2, \quad p_1 = 2s - 2, \quad \text{y} \quad p_2 = \frac{2(2s - 1)}{3(1 - s)} \quad (128)$$

También en estos modelos se puede incorporar el contenido volumétrico de agua residual ( $\theta_r$ ), reemplazando  $\theta$  por  $(\theta - \theta_r)$ , y  $\phi$  por  $(\phi - \theta_r)$ .

### Discusión de resultados

La potencia  $p$  que aparece en las ecuaciones 124 a 127 se ha considerado clásicamente como un parámetro empírico. La teoría expuesta en este trabajo ha permitido su justificación en el contexto de la geometría fractal. Esta potencia es el resultado de los efectos de correlación entre poros ( $p_1$ ) y de la tortuosidad ( $p_2$ ) (ecuación 128). En el cuadro 1 se muestran los valores extremos de estas potencias, correspondientes a los valores extremos de la porosidad volumétrica total. Asimismo, se muestran resultados intermedios relativos a los valores indicados por las ecuaciones 58, 59 y 60.

El valor aproximado de  $p \approx 1/2$  del modelo de Mualem (1976) (ver ecuaciones 35 y 125) fue obtenido a través de la calibración de la ecuación 35 sobre los datos experimentales de 45 suelos reportados en diferentes trabajos, con la porosidad volumétrica total en el rango  $0.4 < \phi < 0.7$ . De acuerdo con el cuadro 1, estos suelos pueden ser representados por un suelo con una porosidad media alrededor de 0.6. Con esta comparación se puede considerar que la ecuación 128 puede ser apropiada para estimar el valor de  $p$  para cada suelo a partir de su valor particular de la porosidad.

**Cuadro 1. La potencia  $p$  de corrección de los modelos de la conductividad hidráulica, que resulta de los efectos de la correlación de los poros ( $p_1$ ) y del factor de tortuosidad ( $p_2$ ), de acuerdo con la ecuación 128, para algunos valores de la porosidad volumétrica total.**

$\phi$	$s = D/3$	$p_1$	$p_2$	$p = p_1 + p_2$
0	1/2	-1	0	-1
0.3671	2/3	-2/3	2/3	0
1/2	0.6942	-0.6115	0.8470	0.2355
0.6180	0.7202	-0.5596	1.0494	0.4898
1	1	0	$\infty$	$\infty$

### Aplicaciones

Los modelos de Burdine (ecuación 28) y de Mualem (ecuación 35) han sido utilizados por Van Genuchten (1980) para estimar la conductividad hidráulica a partir de la curva de retención, cuando ésta es representada por la función:

$$S_e(\Psi) = \left[ 1 + \left( \frac{\Psi}{\Psi_d} \right)^n \right]^{-m} \quad (129)$$

en donde  $m$  y  $n$  son dos parámetros positivos;  $\Psi_d$  es un valor característico de la presión y  $S_e$  es el grado de saturación efectiva definida por:

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\phi - \theta_r} \quad (130)$$

Para obtener formas analíticas cerradas, Van Genuchten impone relaciones entre  $m$  y  $n$ . En el modelo de Burdine  $m = 1 - 2/n$ , y en el modelo de Mualem  $m = 1 - 1/n$ . Un procedimiento similar puede ser utilizado en el modelo de Fuentes (1992) (ecuación 128), y en los modelos definidos por las ecuaciones 100, 101 y 102.

La introducción de la ecuación 129 en las ecuaciones 100, 101 y 102 permite obtener, respectivamente, las siguientes expresiones de la conductividad, en función del grado de saturación efectiva:

$$K(S_e) = K_s \left[ 1 - (1 - S_e^{1/m})^{sm} \right]^2, \quad 0 < sm = 1 - 2s/n < 1 \quad (131)$$

$$K(S_e) = K_s S_e^s \left[ 1 - (1 - S_e^{1/m})^{sm} \right], \quad 0 < sm = 1 - 4s/n < 1 \quad (132)$$

$$K(S_e) = K_s \left[ 1 - (1 - S_e^{1/m})^{2sm} \right], \quad 0 < 2sm = 1 - 4s/n < 1 \quad (133)$$

La utilización de la ecuación 129, con alguno de los modelos definidos por las ecuaciones 131, 132 y 133, requiere del valor de la porosidad del suelo en estudio para calcular la dimensión fractal relativa ( $s$ ) con la ecuación 55, y así obtener la relación entre los parámetros  $m$  y  $n$  correspondiente a cada modelo. Luego se estiman sobre la curva de retención experimental, con el método de los mínimos cuadrados por ejemplo, los parámetros ( $m, \psi_d$ ) de la ecuación 129. La conductividad hidráulica a saturación ( $K_s$ ) deberá ser proporcionada.

La introducción de la ecuación 129 en los modelos clásicos definidos por las ecuaciones 125, 126 y 127 permite obtener, respectivamente, las siguientes expresiones:

$$K(S_e) = K_s S_e^p \left[ 1 - (1 - S_e^{1/m})^m \right]^2, \quad 0 < m = 1 - 1/n < 1 \quad (134)$$

$$K(S_e) = K_s S_e^{p+1} \left[ 1 - (1 - S_e^{1/m})^m \right], \quad 0 < m = 1 - 2/n < 1 \quad (135)$$

$$K(S_e) = K_s S_e^p \left[ 1 - (1 - S_e^{1/m})^{2m} \right], \quad 0 < m = 1/2 - 1/n < 1/2 \quad (136)$$

En las relaciones entre los parámetros  $m$  y  $n$  de las ecuaciones 129, 134, 135 y 136 no interviene la dimensión fractal relativa; ésta interviene en el parámetro  $p$ . El valor correcto de  $p$  depende de la buena estimación del parámetro  $p_2$  (ver ecuación 128), es decir, de la ecuación 108. Dada la estructura de la ecuación 129, y de acuerdo con la ecuación 73, se puede también utilizar  $\lambda \equiv mn$ ; es decir,  $p_2 \equiv 2(2s - 1)/mn$ .

## Conclusiones

En este trabajo se ha analizado desde un punto de vista teórico la conductividad hidráulica que interviene en la ley de Darcy generalizada a los suelos no saturados.

La relación entre el contenido volumétrico de agua y la conductividad hidráulica  $K(\theta)$  ha sido establecida partiendo de la hipótesis de que las leyes de Poiseuille y Darcy describen el movimiento del agua en el nivel microscópico y en el nivel macroscópico, respectivamente. En la emergencia de la ley macroscópica, a partir de la ley microscópica, se ha hecho la distinción entre los radios de poro que definen la porosidad areal y la porosidad volumétrica. Las relaciones entre los radios y las porosidades han sido establecidas a partir de los conceptos de la tortuosidad de las trayectorias del movimiento del agua y de la correlación entre los poros. Conceptos que tienen como base una relación

entre la porosidad volumétrica total y la dimensión fractal del medio poroso.

Esta distinción ha permitido obtener un modelo conceptual de la conductividad hidráulica, al cual se le han introducido las hipótesis clásicas relativas a los pesos de los radios en la resistencia ofrecida al movimiento del agua por el suelo, lo que a su vez ha permitido establecer cuatro modelos particulares.

Una simplificación de estos cuatro modelos ha conducido a reencontrar los otros cuatro modelos clásicos propuestos en la literatura especializada. Estos modelos han sido generalizados.

Las correcciones empíricas aportadas a los modelos clásicos de la conductividad hidráulica, relativa a la conductividad hidráulica a saturación, han encontrado una justificación en el formalismo de la geometría fractal. Las correcciones dependen del valor de la dimensión fractal de cada suelo.

Recibido: 19/04/1999

Aprobado: 01/09/2000

## Referencias

- Bear, J., *Dynamics of fluids in porous media*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1972, 764 pp.
- Brooks, R.H. y A.T. Corey, "Hydraulic properties of porous media", *Hydrol.*, pap. 3, Colorado State University, Fort Collins, 1964.
- Brutsaert, W., "Some methods of calculating unsaturated permeability", *Trans. ASAE*, vol. 10, 1967, pp. 400-404.
- Burdine, N.T., "Relative permeability calculation from size distribution data", *Trans. AIME*, vol. 198, 1953, pp. 71-78.
- Childs, E.C. y N. Collis-George, "The permeability of porous materials", *Proc. Roy. Soc., Ser.*, vol. A, núm. 201, 1950, pp. 392-405.
- Darcy, H., *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, Dalmont, París, 1856.
- Dullien, F.A.L., *Porous media, fluid transport and pore structure*, Academic Press, Nueva York, 1979.
- Falconer, K., *Fractal geometry, mathematical foundations and applications*, John Wiley Sons, Londres, 1990, 288 pp.
- Fuentes, C., *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non-saturés*, tesis de doctorado, Université Joseph Fourier de Grenoble, Francia, 1992, 267 pp.
- Fuentes, C., M. Vauclin, J.Y. Parlange y R. Haverkamp, "A note on the soil-water conductivity of a fractal soil", *Transport in Porous Media*, vol. 23, 1996, pp. 31-36.
- Fuentes, C., M. Vauclin, J.Y. Parlange y R. Haverkamp, "Soil-water conductivity of a fractal soil", *Fractals in Soil Science*, editado por Ph. Baveye, J.Y. Parlange y B. A. Stewart, CRC Press, Boca Raton, 1998, pp. 333-340.

- Gates, J.I. y W.T. Lietz, "Relative permeabilities of California cores by the capillary-pressure method", *Drilling and Production Practique*, Amer. Petrol. Inst., 1950, pp. 285-298.
- Gouyet, J.F., *Physique et structures fractales*, Masson, París, 1992, 234 pp.
- Kunze, R.J. G. Uehara y K. Graham, "Factors important in the calculation of hydraulic conductivity", *Soil Sci. Soc. Amer. Proc.*, vol. 32, 1968, pp. 760-765.
- Mandelbrot, B.B., *The fractal geometry of nature*, Freeman, San Francisco California, 1983.
- Marshall, T. J., "A relation between permeability and size distribution of pores", *Soil Sci.*, vol. 9, 1958, pp. 1-8.
- Millington, R.J. y J.P. Quirk, "Permeability of porous solids", *Trans.*, vol. 57, Faraday Soc., 1961, pp. 1200-1206.
- Mualem, Y., "A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media", *Water Resources Res.*, vol. 12, 1976, pp. 513-522.
- Mualem, Y. y G. Dagan, "Hydraulic conductivity of soils: unified approach to the statistical models", *Soil Sci. Soc. Am. J.*, vol. 42, 1978, pp. 392-395.
- Oleschko K., C. Fuentes, F. Brambila y R. Álvarez, "Linear fractal analysis of three mexican soils in different management systems", *Soil Technology*, vol. 10, núm. 3, 1997, pp. 185-206.
- Purcell, W.R., "Capillary pressures- their measurement using mercury and the calculation of permeability thereform", *Petr. Trans. Amer. Inst. Mining Metallurgical Engrs.*, vol. 186, 1949, pp. 39-48.
- Rieu, M. y G. Sposito, "Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: I. Theory", *Soil Sci. Soc. Am. J.*, vol. 55, 1991a, pp. 1231-1238.
- Rieu, M. y G. Sposito, "Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: II. Applications", *Soil Sci. Soc. Am. J.*, vol. 55, 1991b, pp. 1239-1244.
- Van Genuchten, M.Th., "A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils", *Soil Sci. Soc. Am. J.*, vol. 44, 1980, pp. 892-898.
- Wyllie, M.R.J. y G.H.F. Gardner, "The generalized Koseny-Carman equation", *World Oil* Marzo-abril, 1958, pp. 210-228.

### Abstract

Fuentes, C., F. Brambila, M. Vauclin, J.Y. Parlange & R. Haverkamp, "Fractal modeling of hydraulic conductivity in non-saturated soils", *Hydraulic Engineering in Mexico (in Spanish)*, vol. XVI, num. 2, pages 119-137, April-June, 2001.

From a theoretical point of view we study the hydraulic conductivity that appears at the generalized Darcy law of non-saturated soils. The relation between the hydraulic conductivity and the water's volumetric content is established from the hypothesis that microscopic and macroscopic levels of water movement are described by Poiseuille and Darcy's laws, respectively. We made a distinction between pore radius that define areal porosity and volumetric porosity in the emergence of macroscopic law from the microscopic law. The relation between radius and porosities has been established from tortuosity concepts of the movement paths of water and the correlation between pores. Concepts that are based on the relation between total volumetric porosity and soil's fractal dimension. This distinction has lead into a conceptual hydraulic conductivity model, to which has been introduced the classic hypothesis relative to radius weights in the resistance offered to movement of water by soil. This, in turn, has allowed to obtain different particular models. A simplification of these models has given way to reencounter the classic models proposed in the literature. The empiric corrections made to classic models of hydraulic conductivity relative to hydraulic conductivity by saturation, are justified in the formalism of fractal geometry. The correction depends on the value of the fractal dimension of each soil type.

**Key words:** Poiseuille's law, Laplace's law, tortuosity, fractal dimension, volumetric porosity, areal porosity.

### Dirección institucional de los autores:

*Carlos Fuentes*

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua  
Paseo Cuauhnáhuac 8532  
62550 Progreso, Morelos, México

*Fernando Brambila*

Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Matemáticas  
Ciudad Universitaria, México, D.F., México

*Michel Vauclin*

*Randel Haverkamp*

Laboratoire d'Etude des Transferts en Hydrologie et Environnement  
UMR 5564 (CNRS, INPG, IRD, UJF), BP 53, 38041 Grenoble-  
Cedex, France

*Jean-Yves Parlange*

Cornell University  
Department of Agricultural and Biological Engineering  
Riley-Robb Hall  
Ithaca, New York 14853-1901, USA