

Artículo publicado en el Repositorio Institucional del IMTA

<i>Título</i>	Hidrología de avenidas.
<i>Autor / Adscripción</i>	Álvaro A. Aldama Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
<i>Publicación</i>	Ingeniería Hidráulica en México, 15(3): 5-46
<i>Fecha de publicación</i>	2000
<i>Resumen</i>	La hidrología de avenidas es un tema que ha cobrado mucha relevancia debido a las inundaciones recientemente provocadas por eventos hidrometeorológicos extremos en todo el mundo. Este artículo presenta los resultados de una serie de investigaciones que el autor y sus colaboradores han obtenido a lo largo de los años en la materia. En particular; se discuten métodos para la estimación de avenidas de diseño en presas y redes de ríos, para el tránsito hidrológico de avenidas en cauces y para el tránsito hidráulico de avenidas en redes de ríos con lagunas de interconexión.
<i>Identificador</i>	http://hdl.handle.net/123456789/727

Hidrología de avenidas

Conferencia Enzo Levi 1998

Álvaro A. Aldama

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

La hidrología de avenidas es un tema que ha cobrado mucha relevancia debido a las inundaciones recientemente provocadas por eventos hidrometeorológicos extremos en todo el mundo. Este artículo presenta los resultados de una serie de investigaciones que el autor y sus colaboradores han obtenido a lo largo de los años en la materia. En particular, se discuten métodos para la estimación de avenidas de diseño en presas y redes de ríos, para el tránsito hidrológico de avenidas en cauces y para el tránsito hidráulico de avenidas en redes de ríos con lagunas de interconexión.

Palabras clave: tránsito inverso, parametrización de avenidas de diseño, hidrogramas de diseño, distribuciones de probabilidad multivariadas de extremos, periodo de retorno conjunto, método de Muskingum, ecuación de advección-difusión, pronóstico de avenidas, lagunas de interconexión.

Prólogo

La ocurrencia de las avenidas y la mitigación de sus efectos han preocupado a la humanidad desde tiempo inmemorial. Testimonio de esto lo constituyen, por ejemplo, escritos arcaicos que dan cuenta del devenir de un diluvio universal. Existen más de un centenar de relatos de diversas culturas a lo largo y ancho de Europa, Asia, África, Oceanía y América que describen, con impresionante similitud, los estragos que causó esa inundación global. La fascinación y el temor que las crecientes han provocado en el hombre han quedado consignadas en muy diversos documentos que hoy forman parte del acervo cultural universal. Ilustraciones de lo anterior son los siguientes textos que, además de comentar, describir y relatar diversos aspectos de las inundaciones, contienen profundos pensamientos que reflejan la sabiduría antigua:

Texto bíblico

"Las aguas del diluvio vinieron sobre la tierra... aquel día fueron rotas todas las fuentes del grande abismo, y las cataratas de los cielos fueron abiertas; y hubo lluvia sobre la tierra cuarenta días y cuarenta noches...Y fue el diluvio cuarenta días sobre la tierra; y las aguas crecieron... y las aguas subieron

mucho sobre la tierra; y todos los montes altos que había debajo de todos los cielos, fueron cubiertos. Quince codos más alto subieron las aguas, después que fueron cubiertos los montes... Y prevalecieron las aguas sobre la tierra ciento cincuenta días." Génesis 7:10, 11, 12, 17, 18, 19, 20 y 24.

"Y temerán desde el occidente el nombre de Jehová, y desde el nacimiento del sol Su gloria; porque vendrá el enemigo como inundación, mas el Espíritu de Jehová levantará bandera contra él." Isaías 59:19.

"¿Quién es éste que supe como río, y cuyas aguas se mueven como ríos? Egipto como río se ensancha y las aguas se mueven como ríos, y dijo: Subiré, cubriré la tierra, destruiré a la ciudad, y a los que en ella moran." Jeremías 46:7, 8.

"Así ha dicho Jehová: He aquí que suben aguas del norte, y se harán torrente; inundarán la tierra y su plenitud, la ciudad y los moradores de ella...". Jeremías 47:2.

"Subirá toda como un río, y crecerá y mermará como el río de Egipto." Amós 8:8.

"Todo aquel que viene a Mí, y oye Mis palabras y las hace, os indicaré a quién es semejante. Semejante es al hombre que al edificar una casa, cavó y ahondó y puso el fundamen-

to sobre la roca; y cuando vino una inundación, el río dio con ímpetu contra aquella casa, pero no la pudo mover, porque estaba fundada sobre la roca. Mas el que oyó y no hizo, semejante es al hombre que edificó su casa sobre tierra, sin fundamento; contra la cual el río dio con ímpetu, y luego cayó, y fue grande la ruina de aquella casa". Lucas 6:48, 49.

Texto griego

"Muchos grandes diluvios han ocurrido durante nueve mil años, desde que Atenas y Atlantis fueron preeminentes... En estas inundaciones, el agua subió de abajo... Estas inundaciones, especialmente la tercera gran inundación antes de Deucalión, erosionó la mayor parte del suelo fértil de Atenas". Timaeus 22.

Texto babilonio

"De los cielos cayó lluvia con gran fuerza... Al séptimo día cesó la tormenta y la inundación." Épica de Gilgamesh 11.

Texto maya

"Los hombres de madera trataron de salvarse de la inundación. Con esto andaban los hombres y andaban corriendo, desatinados. Quisieron subir sobre las casas, pero se les hundían y se venían abajo. Queriendo subir sobre los árboles los arrojaban de sí, y queriendo guarecerse en las cavernas y hoyos, se les cerraban." Popol Vuh.

Texto egipcio

"Te saludo Hapy, Crecida del Nilo, que sales de la tierra y vienes para alimentar Egipto; aquél cuya naturaleza está escondida, la oscuridad en pleno día; aquél a quien sus seguidores ensalzan; aquél que inunda los campos..." Himno a la Crecida del Nilo.

Texto cuneiforme

"Si alguien una deuda por su cuenta contrae y su campo el dios de la tormenta inunda o si una crecida lo barre o si por falta de agua la cebada en su campo no llega a sazón; en ese año cebada a su acreedor no entregará, su tablilla-recibo borrará y el rédito de ese año no pagará." Código de Hammurabi 48: XIII, 71-XIV, 17.

Texto chino

"Amordazar al pueblo equivale a poner diques a las aguas. Las aguas bloqueadas se desbordan y causan muchas víctimas. Lo mismo pasa con el pueblo. Es por ello que así como los que cuidan de las aguas deben abrir brechas y dejarlas

fluir, los que cuidan del pueblo deben establecer normas que les permitan hablar." Shiji (Memorias Históricas) de Sima Qian, IV.

Texto romano

"Este elemento manda sobre todos los demás: las aguas se tragan las tierras, ahogan las llamas, suben a las alturas y también reclaman para sí el cielo..." Historia Natural de Plinio el Viejo, XXXI, I.

Introducción

México está ubicado dentro del campo de influencia de ciclones y huracanes. Además, también lo afectan otros fenómenos meteorológicos de consideración, como frentes fríos y tormentas convectivas extensas. Todos estos fenómenos suelen producir precipitaciones de gran magnitud que, a su vez, generan avenidas que inundan extensas regiones del país. Dichas inundaciones causan pérdida de vidas humanas y daños económicos considerables, que en ocasiones pueden llegar a tener tintes catastróficos (Aparicio, 1998). En tiempos recientes, el país ha sufrido los embates de meteoros que han provocado grandes efectos destructivos en los estados de Guerrero, Oaxaca, Chiapas, Hidalgo, Puebla, Veracruz y Tabasco.

Huelga decir que es de fundamental importancia estudiar las avenidas para proponer medidas que permitan mitigar los destrozos que suelen originar en poblaciones y zonas productivas. La cada vez más frecuente ocurrencia de fenómenos hidrometeorológicos extremos nos invita a abordar el estudio de las crecientes, no con la soberbia pretensión de ser capaces de controlar las fuerzas naturales, sino tan sólo de entender su dinámica y con ello aprender a convivir con ellas.

El objeto de este artículo es presentar una reseña de una serie de trabajos de investigación que el autor y sus colaboradores han producido a lo largo de los años en el tema de hidrología de avenidas. Es relevante mencionar que, a pesar de que Enzo Levi fue fundamentalmente un especialista en mecánica de fluidos, en cierto momento de su vida profesional también se interesó por el estudio de las avenidas, como lo demuestra una serie de artículos que publicó en torno al análisis de hidrogramas (Levi, 1963, Levi y Valdés, 1964a y 1964b). Sirva este artículo como un homenaje más al doctor Enzo Levi, quien personificó la decencia, la honestidad, la bonhomía, la generosidad y la excelencia como investigador, como maestro, pero, sobre todo, como persona. Quienes lo conocimos y verdaderamente apreciamos su estatura, nos hemos empeñado en hacer trascender su legado.

Motivación

En 1980 le fue encargado al autor, que se desempeñaba como especialista en la Comisión del Plan Nacional Hidráulico, llevar a cabo un estudio sobre la seguridad hidrológica del puerto Lázaro Cárdenas. Esto implicaba revisar la avenida de diseño de la presa El Infiernillo, localizada en el estado de Michoacán. Lo anterior significó el primer contacto que el autor tuvo en su práctica profesional con la hidrología de avenidas.

La presa El Infiernillo fue construida sobre el cauce del río Balsas con el propósito principal de generar energía eléctrica. Está en operación desde 1965. Debido a la carencia de datos, su avenida de diseño fue determinada empleando la envolvente de Creager. Así, se determinó un gasto pico de diseño de 38,777 m³/s y la cortina se construyó con una elevación a la corona de 180 msnm (Marengo, 1994).

Debido, entre otras razones, a que en México no existe una densidad suficiente de estaciones pluviométricas y pluviográficas, es común emplear el análisis de frecuencias de gastos máximos anuales para determinar los gastos pico de las avenidas de diseño de presas en nuestro país (Aldama y Ramírez, 1999a). Dado que para determinar la capacidad de control de avenidas y la capacidad de descarga de la obra de demasías es necesario transitar la avenida de diseño por el vaso de la presa, se requiere conocer no sólo el gasto pico, sino la forma completa del hidrograma de diseño. El procedimiento más empleado en el país consiste en "mayorar" la avenida máxima registrada. Esto se logra multiplicando las ordenadas del hidrograma correspondiente a esa avenida por la razón del gasto pico de diseño al gasto máximo registrado, lo cual produce el hidrograma de diseño.

Ilustración 1. Avenida máxima histórica en el sitio El Infiernillo estimada mediante el procedimiento tradicional de tránsito inverso para el periodo del 26 al 30 de septiembre de 1967.

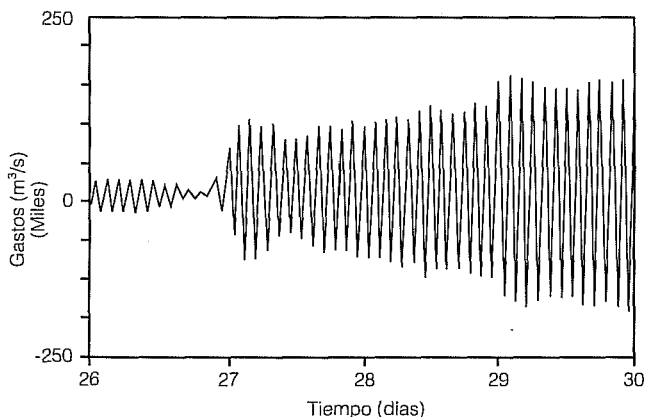
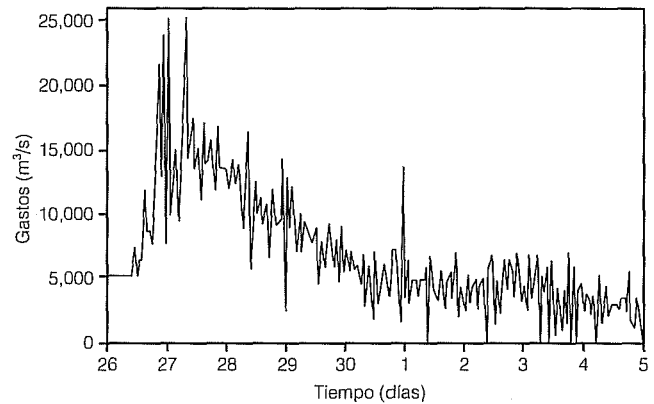
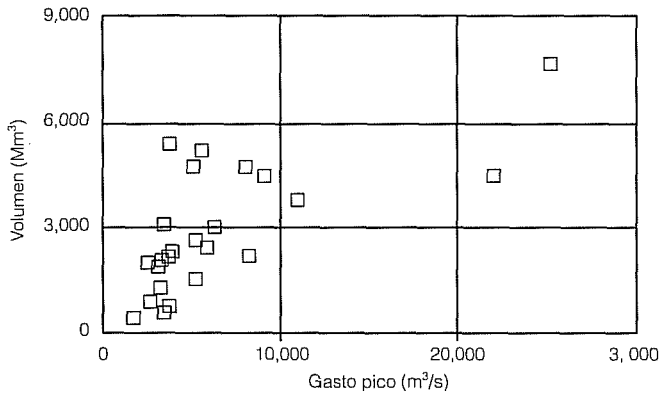


Ilustración 2. Avenida máxima histórica en el sitio El Infiernillo estimada mediante el procedimiento tradicional de tránsito inverso, con un paso de suavización de promedios móviles para el periodo del 26 al 30 de septiembre de 1967.



Por lo anterior, para efectuar el análisis de frecuencias de gastos máximos anuales para El Infiernillo fue necesario recabar información acerca de la avenida máxima registrada en el sitio de interés, la cual ocurrió del 25 de septiembre al 5 de octubre de 1967 (Marengo, 1994). Dado que la operación de la estación hidrométrica localizada en el sitio de El Infiernillo fue cancelada en 1964 debido a la construcción de la presa, los hidrogramas de ingreso a la presa se han determinado por el procedimiento de "antitránsito" o tránsito inverso (Aldama y Aguilar, 1997) desde que está en operación. Este método consiste en resolver la ecuación de continuidad discretizada en forma inversa. En efecto, al conocerse la evolución del almacenamiento en el tiempo, a través de la medición de las elevaciones en el vaso y el empleo de la curva elevaciones-capacidades, así como la correspondiente a la descarga (la cual es función del almacenamiento), es posible determinar la evolución del ingreso. Con ese propósito es común emplear la regla trapezoidal para discretizar la ecuación de continuidad. En la ilustración 1 se muestra el hidrograma de ingreso que se obtiene al aplicar el procedimiento descrito para un incremento de tiempo igual a una hora. Es evidente que las respuestas que se obtienen no son realistas, ya que se observan gastos negativos. Mediante la utilización de un paso de promedios móviles, el hidrograma de la ilustración 1 se suaviza, obteniéndose el que se muestra en la ilustración 2. A éste corresponde un gasto pico de 25,207 m³/s, que es el dato que oficialmente se ha manejado como el gasto máximo registrado. La observación de una gráfica similar a la presentada en la ilustración 2 llamó la atención del autor. A pesar de la eliminación de los gastos negativos mediante suaviza-

Ilustración 3. Registro de volúmenes-gastos pico observados en las avenidas máximas anuales ocurridas en el sitio El Infiernillo.

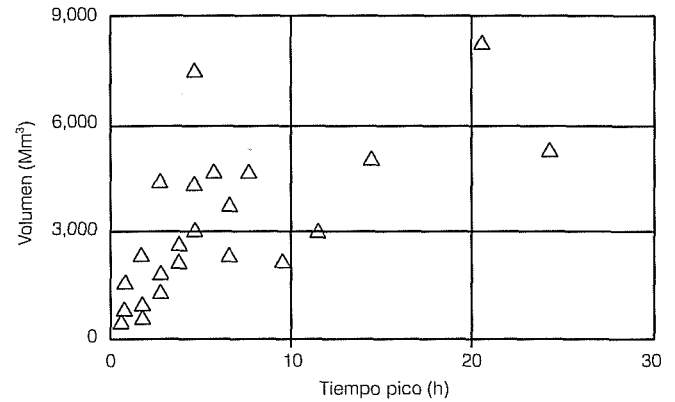


ción, persistían fuertes oscilaciones en el hidrograma. Esto sugirió la posibilidad de que el método empleado para estimar los gastos de ingreso al vaso introdujera oscilaciones en forma espuria.

Adicionalmente, el procedimiento de "mayoración" de la avenida máxima registrada le pareció arbitrario al autor. En efecto, si bien es posible estimar un gasto pico de diseño asociado con un periodo de retorno (y por tanto con una probabilidad de excedencia), la construcción del hidrograma de diseño a través de dicho procedimiento no permite asociar un periodo de retorno con *toda* la avenida a que corresponde. Por tal motivo, y con el objeto de estudiar las relaciones que pueden existir entre los parámetros principales que caracterizan una avenida, el autor procedió a examinar la información disponible hasta 1980 de las avenidas ocurridas en El Infiernillo. Así, produjo las gráficas volumen-gasto pico, volumen-tiempo pico y gasto pico-tiempo pico que se muestran en las ilustraciones 3, 4 y 5. Es evidente que existe una gran dispersión de los datos, lo cual sugirió la posibilidad de incorporar el volumen y el tiempo pico de la avenida como parámetros adicionales al gasto pico para caracterizar hidrogramas de diseño y con ello, la posibilidad de proveer una acepción probabilista más completa a las avenidas de diseño.

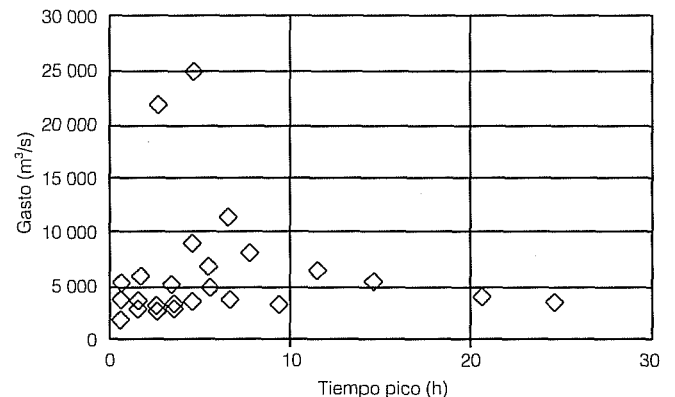
En el diseño de obras de protección contra inundaciones surge frecuentemente la necesidad de transitar avenidas por cauces de ríos. A pesar de que hoy en día es sencillo realizar tránsitos hidráulicos mediante el empleo de esquemas de diferencias finitas para resolver numéricamente las ecuaciones de Saint-Venant (que describen el escurrimiento superficial, transitorio y unidireccional), la cantidad de información de campo que estos procedimientos requieren es muy vasta. Por

Ilustración 4. Registro de volúmenes-tiempos pico observados en las avenidas máximas anuales ocurridas en el sitio El Infiernillo.



lo anterior, es común en la práctica de la hidrología superficial y de la ingeniería de ríos la aplicación de métodos hidrológicos aproximados para el tránsito de avenidas en cauces. Entre éstos, indudablemente el más popular por su facilidad de uso es el método de Muskingum (Ponce, 1989). En varias ocasiones el autor empleó este método para realizar estudios en diversos cauces del país cuando se desempeñaba como especialista en la Comisión del Plan Nacional Hidráulico, en el periodo de 1980 a 1981, cuando lo hacía como director de Ingeniería de Ríos en la Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos en 1986, y como subcoordinador de Hidráulica del Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA), de 1986 a 1988. Algo que atrajo la atención del autor fue que, como es bien conocido, el método de Muskingum produce hidrogramas de egreso de un tramo de cauce que presentan

Ilustración 5. Registro de gastos pico-tiempos pico observados en las avenidas máximas anuales ocurridas en el sitio El Infiernillo.



una subestimación notable del gasto para los intervalos iniciales de tránsito, como se muestra en la ilustración 6, en la que aparece la calibración del citado método para una avenida ocurrida en el río Usumacinta entre las estaciones El Tigre y Boca del Cerro, del 9 al 19 de agosto de 1964. Esto sugirió la posibilidad de encontrar relaciones que impidieran el surgimiento de subestimaciones de gasto cuando se emplea el método de Muskingum para transitar avenidas en cauces.

Cuando el autor se hizo cargo de la Coordinación de Tecnología de Sistemas Hidráulicos en el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua en 1992, se encontró con que al área a su cargo le había sido encargado un estudio para determinar la mejor opción para el control de inundaciones en la cuenca baja del río Papaloapan. En la ilustración 7 se muestra un esquema que representa la zona en cuestión. Como se observa, y como es típico de zonas de planicie, la topología de la red hidrográfica en la zona de interés es compleja. Al sobrevolar la zona después de la ocurrencia de lluvias intensas, el autor observó que el patrón de inundación se componía de tramos de cauce que conectaban lagunas de inundación que se formaban en confluencias de ríos y otros sitios. En algunos casos, los cauces habían desaparecido completamente y se encontraban ocultos bajo el agua. El modelo de llanuras de inundación del IMTA y otros disponibles en la literatura no eran capaces de simular eficiente y precisamente ese patrón de inundación. Esto sugirió la posibilidad de desarrollar un nuevo modelo que sí lo fuera. Adicionalmente, al evaluar distintas opciones de

Ilustración 7. Red hidrográfica de la cuenca baja del río Papaloapan.



control de inundaciones para protección de la zona de interés, se hizo evidente la necesidad de contar con información hidrométrica para estimar avenidas de diseño. Desafortunadamente, como es común en casos similares, la información disponible no se encontraba en los sitios para los que se requería diseñar alguna obra de protección, ya que éstos se localizaban en la planicie, donde no existen constricciones topográficas apropiadas para colocar estaciones hidrométricas. Por esta razón, las estaciones se encontraban en los diferentes afluentes de la red hidrográfica (véase ilustración 7), localizadas en la parte media y alta de la cuenca. No estaba claro cómo combinar la información de gastos de estas estaciones para construir avenidas de diseño en sitios ubicados en la planicie. Esto sugirió la posibilidad de desarrollar un método que permitiera estimar avenidas de diseño en redes de ríos.

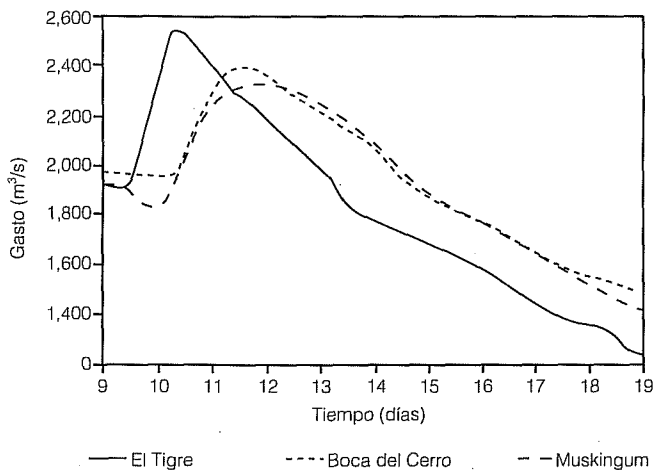
Las experiencias descritas y otras más, llevaron al autor a desarrollar una línea de investigación en materia de hidrología de avenidas a lo largo de varios años. Este artículo da cuenta de algunos de los resultados que se han obtenido como producto de un esfuerzo colaborativo del autor con diversos investigadores.

Estimación de avenidas de diseño de presas

Estimación de avenidas de ingreso a vasos mediante tránsito inverso

Como se comentó anteriormente, cuando una estación hidrométrica cesa su operación por la construcción de una presa, es común la utilización del procedimiento de tránsito inverso para estimar los hidrogramas de ingreso al vaso. La ecuación de continuidad para un vaso se expresa por lo general como:

Ilustración 6. Calibración del método de Muskingum para el tránsito de la avenida ocurrida en el río Usumacinta, entre las estaciones El Tigre y Boca del Cerro, del 9 al 19 de agosto de 1964.



$$\frac{dS}{dt} = I - O \quad (1)$$

donde S representa el volumen almacenado en el vaso; I , el gasto de ingreso; O , el gasto de egreso; y t , el tiempo. El procedimiento de tránsito inverso consiste en despejar I de la ecuación 1 y expresarlo como sigue:

$$I(t) = O(t) + S'(t) \quad (2)$$

En la práctica, la ecuación 2 no puede ser empleada directamente, debido a que la evolución de los almacenamientos y de los gastos de egreso en el tiempo sólo se conoce en forma discreta. Entonces, es común discretizar la ecuación 2 a través del esquema de Crank-Nicolson o regla trapezoidal, lo cual resulta en una expresión del tipo siguiente:

$$I_{j+1} = -I_j + O_j + O_{j+1} + 2 \frac{S_{j+1} - S_j}{\Delta t} \quad (3)$$

donde I_j representa una aproximación discreta a $I(j\Delta t)$; O_j , una aproximación discreta a $O(j\Delta t)$; S_j , una aproximación discreta a $S(j\Delta t)$; $j = 0, 1, 2, \dots$; y Δt , un intervalo de tiempo. La aplicación de la ecuación 3 es la que produjo los resultados contenidos en la ilustración 1, donde es evidente que existen oscilaciones espurias en la estimación del hidrograma de ingreso al vaso de El Infiernillo para la avenida de 1967.

Aldama y Aguilar (1997) han demostrado que la componente homogénea de la solución exacta de la ecuación de diferencias de la ecuación 3 es estable, pero no es monótonica, en el sentido de que exhibe alternancia de signos. Esto explica la presencia de oscilaciones en los hidrogramas de ingreso estimados con el esquema de la ecuación 3. Adicionalmente, los citados autores han probado que los errores en la estimación de hidrogramas de ingreso mediante el esquema trapezoidal se acumulan en el tiempo e incrementan su magnitud para valores pequeños del intervalo de tiempo Δt . Para remediar este indeseable comportamiento en la estimación de hidrogramas de ingreso a vasos mediante tránsito inverso, los mismos autores propusieron emplear el siguiente esquema de diferencias centrales:

$$I_{j+1} = O_{j+1} + \frac{S_{j+2} - S_j}{2\Delta t} \quad (4)$$

Aldama y Aguilar (1997) demostraron que el esquema de la ecuación 4 es estable y no acumula errores de un intervalo de tiempo al siguiente. Para ilustrar la

eficacia del dicho esquema, los citados autores obtuvieron la solución exacta de la ecuación de tránsito de avenidas en vasos (ecuación 1) para un caso particular en el que la ecuación diferencial resultante en el almacenamiento adimensional es lineal. A partir de la evolución en los almacenamientos para el caso de un hidrograma de ingreso triangular obtuvieron la evolución exacta de las descargas (mediante la ley de descarga de un vertedor libre) y de las elevaciones en el vaso. Con el objeto de simular lo que ocurre cuando un operador lee una escala limnométrica, los mismos autores perturbaron las elevaciones con un pequeño error aleatorio con distribución uniforme y redondearon los valores a dos cifras significativas (en metros). Con las elevaciones perturbadas y las curvas elevaciones-capacidades y elevaciones-gastos, calcularon los valores perturbados de almacenamiento y descarga y procedieron a aplicar las expresiones de las ecuaciones 3 y 4. En el caso del esquema trapezoidal (ecuación 3), los resultados se deterioraron conforme se disminuyó Δt , de acuerdo con la predicción teórica. Para el caso particular de $\Delta t = 180$ s, se estimó el hidrograma mostrado en la ilustración 8, que exhibe considerables oscilaciones y errores de gran magnitud. En contraste, cuando se aplicó el esquema de diferencias centrales (ecuación 4), los resultados obtenidos fueron muy satisfactorios para todos los valores probados del intervalo de tiempo. En particular, para $\Delta t = 180$ s se obtuvo el hidrograma estimado que se muestra en la ilustración 9, cuyos errores son, para propósitos prácticos, despreciables. Esto demostró que el esquema de diferencias centrales (ecuación 4) exhibe un comportamiento muy superior al tradicionalmente empleado esquema trapezoidal (ecuación 3), y que el primero debería sus-

Ilustración 8. Tránsito inverso mediante el esquema trapezoidal para $\Delta t = 180$ segundos.

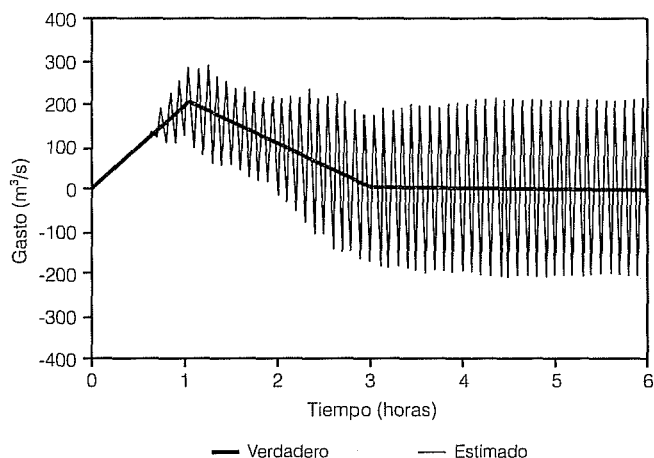
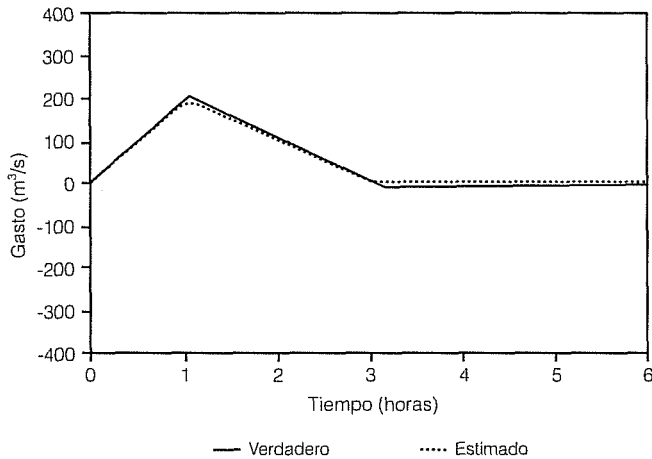


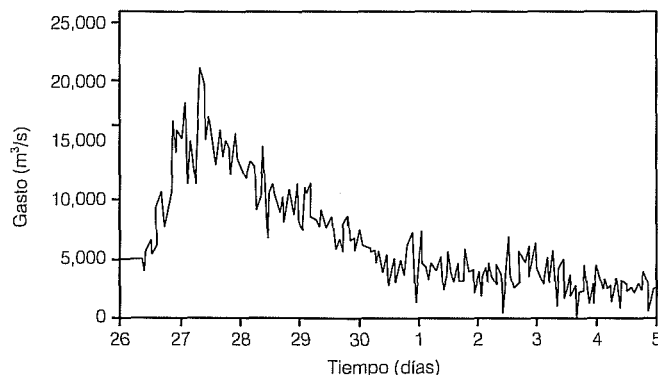
Ilustración 9. Tránsito inverso mediante el esquema de diferencias centrales para $\Delta t = 180$ segundos.



tituir al segundo en la práctica de estimar hidrogramas de ingreso a vasos por medio de tránsitos inversos.

Al aplicar el esquema de diferencias centrales (ecuación 4) a la estimación del hidrograma correspondiente a la avenida de 1967 que ocurrió en sitio de El Infiernillo, se obtuvo el hidrograma mostrado en la ilustración 10. Como puede observarse, este hidrograma exhibe oscilaciones mucho menores que el mostrado en la ilustración 1, estimado con el esquema trapezoidal (ecuación 3), y también considerablemente menores que el mostrado en la ilustración 2, que constituye la versión suavizada mediante promedios móviles del anterior. Pero el hecho más relevante lo constituye que el gasto pico del hidrograma estimado por diferencias centrales (ilustración 10) es de 20,830 m³/s, que es 21% inferior al correspondiente al hidrograma muestra-

Ilustración 10. Avenida máxima histórica en el sitio El Infiernillo estimada mediante el esquema de diferencias centrales para tránsito inverso.



do en la ilustración 2, de 25,207 m³/s, que es el valor que tradicionalmente se ha manejado como el máximo registrado en El Infiernillo. Este resultado tiene implicaciones muy importantes en el diseño de presas, ya que las oscilaciones espurias presentes en el esquema trapezoidal podrían significar diferencias significativas en la determinación de gastos de diseño, ya que éstos se estiman mediante extrapolación a grandes periodos de retorno.

Independencia funcional de los parámetros que caracterizan una avenida

Los parámetros más importantes de un hidrograma son su gasto pico, Q_p , su volumen, V , y su tiempo pico, t_p (véase ilustración 11). La dispersión de los datos que se muestra en las ilustraciones 3 a 5 sugiere la posibilidad de tratar al gasto pico, al volumen y al tiempo pico como una terna de variables aleatorias para caracterizar probabilísticamente una avenida. No obstante, no es posible concluir científicamente la validez de la aseveración anterior con tan sólo la observación de un registro de datos. Una condición necesaria para que los tres parámetros principales de un hidrograma puedan ser tratados como variables aleatorias en un espacio muestral tridimensional es que sean funcionalmente independientes, a fin de que dicho espacio sea denso en las posibles combinaciones de dichos parámetros. En otras palabras, es necesario demostrar que (salvo la naturaleza positiva definida de gastos pico, volúmenes y tiempos pico) es factible llenar el espacio muestral con todos los posibles hidrogramas que pueden surgir de la respuesta de una cuenca a un estímulo de precipitación.

Ilustración 11. Parámetros característicos de un hidrograma.

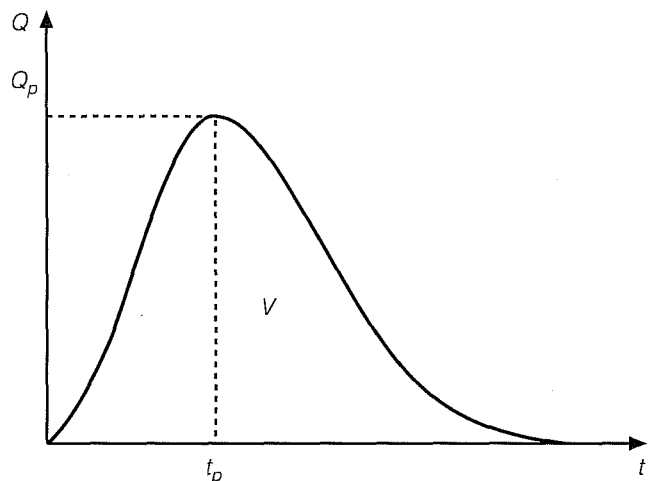
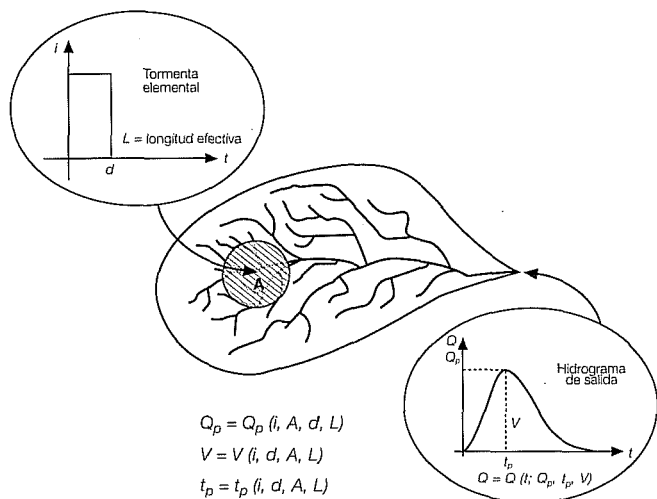


Ilustración 12. Relación lluvia-escurrimiento para una tormenta elemental precipitándose en una cuenca grande.



Para demostrar la independencia funcional de los tres parámetros que caracterizan un hidrograma, considérese la ocurrencia de una tormenta elemental en una cuenca "grande", como se muestra en la ilustración 12. Por "grande" se quiere decir una cuenca que no satisface la hipótesis del hidrograma unitario (Ponce, 1989), en el sentido de que la lluvia no cubre la totalidad de la superficie de la cuenca de manera uniforme. En la práctica, casi todas las cuencas resultan, en estricto sentido, "grandes". La tormenta elemental posee un hidrograma de intensidades de lluvia dado por una barra elemental de magnitud i y duración d . Además, se precipita sobre una superficie A dentro de la cuenca, que está ubicada a una distancia efectiva L de la salida de la propia cuenca. De este modo, la tormenta se caracteriza por el conjunto de valores (i, d, A, L) . Si ahora se supone que el hidrograma a la salida de la cuenca está determinado por el conjunto de valores (Q_p, V, t_p) , se pueden escribir en principio las siguientes expresiones, que representan la relación lluvia-escurrimiento para el caso en estudio:

$$\begin{aligned} Q_p &= Q_p(i, d, A, L) \\ V &= V(i, d, A, L) \\ t_p &= t_p(i, d, A, L) \end{aligned} \quad (5)$$

Para precisar la relación lluvia-escurrimiento expresada por la ecuación 5 puede emplearse un modelo de advección-difusión, representando a la cuenca como un "metacanal", como ha sido propuesto por Snell y Sivalpan (1995). Entonces, es posible plantear el siguiente problema de valor inicial y de valores en la frontera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + U \frac{\partial Q}{\partial x} &= D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}; \quad (x, t) \in (0, L) \times (0, \infty) \\ Q(x, 0) &= 0 \\ Q(0, t) &= \begin{cases} fIA; & t \in [0, d] \\ 0; & t > d \end{cases} \\ Q(\infty, t) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

donde $Q = Q(x, t)$ representa el gasto en el metacanal; U , la velocidad de transporte efectiva en el metacanal; D , el coeficiente de difusión efectiva en el metacanal; x , la coordenada espacial a lo largo del metacanal; t , tiempo; y f , el coeficiente de escurrimiento efectivo para la tormenta elemental. El límite derecho del dominio espacial $x \rightarrow \infty$ corresponde a un punto hipotético ubicado aguas abajo de la cuenca, a una distancia tan grande que, en las escalas de tiempo de interés, no existe posibilidad de que el hidrograma de escurrimiento directo arribe ahí.

Sea $Q_s(t) \equiv Q(L, t)$ el gasto a la salida de la cuenca. Es sencillo demostrar, a partir de la solución del problema de la ecuación 6, que:

$$Q_s(t) = \begin{cases} fIA \left[1 - \exp\left(-\frac{UL}{2D}\right) \exp\left(\frac{UL}{2D}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{L+U(t-d)}{2\sqrt{Dt}}\right) - 1 \right] \\ + \exp\left(-\frac{UL}{2D}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{L-U(t-d)}{2D}\right) + 1 \right] \right]; & 0 \leq t \leq d \\ \frac{fIA}{2} \exp\left(\frac{UL}{2D}\right) \left\{ \exp\left(\frac{UL}{2D}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{L+U(t-d)}{2\sqrt{D(t-d)}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{L+Ut}{2\sqrt{Dt}}\right) \right] \right. \\ \left. + \exp\left(-\frac{UL}{2D}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{L-U(t-d)}{2\sqrt{D(t-d)}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{L-Ut}{2\sqrt{Dt}}\right) \right] \right\} \right]; & t > d \end{cases} \quad (7)$$

donde $\operatorname{erf}(\bullet)$ representa la función de error.

Dado que en un problema de tránsito de avenidas en cauces el máximo del gasto de salida ocurre en un tiempo posterior a aquél en el que se cruzan los hidrogramas de entrada y de salida, es evidente que $t_p > d$. Por tanto, el tiempo pico y el gasto pico de $Q_s = Q_s(t)$ pueden calcularse haciendo $dQ_s/dt = 0$ con la expresión que proporciona la ecuación 7 para $t > d$. Como resultado se obtienen las siguientes relaciones:

$$t_p \exp\left[-\frac{L^2 + U^2(t_p - d)^2}{6D(t_p - d)}\right] = (t_p - d) \exp\left[-\frac{L^2 + U^2 t_p^2}{6D t_p}\right] \quad (8)$$

$$Q_p = \frac{fIA}{2} \exp\left(\frac{UL}{2D}\right) \left\{ \exp\left(\frac{UL}{2\alpha}\right) \left[\operatorname{erf}\left[\frac{L+U(t_p-d)}{2\sqrt{\alpha(t_p-d)}}\right] - \operatorname{erf}\left[\frac{L+Ut_p}{2\sqrt{\alpha t_p}}\right] \right] \right. \\ \left. + \exp\left(-\frac{UL}{2D}\right) \left[\operatorname{erf}\left[\frac{L-U(t_p-d)}{2\sqrt{\alpha(t_p-d)}}\right] - \operatorname{erf}\left[\frac{L-Ut_p}{2\sqrt{\alpha t_p}}\right] \right] \right\} \quad (9)$$

Finalmente, por continuidad, es obvio que el volumen de escurrimiento directo del hidrograma $Q_s = Q_s(t)$ está dado por:

$$V = fIA d \quad (10)$$

Las expresiones de las ecuaciones 8, 9 y 10 representan la expresión precisa de la relación lluvia-escurrimiento (ecuación 5) para el modelo de metacanal correspondiente a una tormenta elemental.

Si Q_p , V y t_p fueran funcionalmente dependientes, existiría una función F , tal que:

$$F(Q_p, V, t_p) \equiv 0 \quad (11)$$

en alguna región del espacio (Q_p, V, t_p) . De acuerdo con la ecuación 11, también debería cumplirse que:

$$\frac{\partial F}{\partial l} = \frac{\partial F}{\partial Q_p} \frac{\partial Q_p}{\partial l} + \frac{\partial F}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial l} + \frac{\partial F}{\partial t_p} \frac{\partial t_p}{\partial l} \equiv 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial d} = \frac{\partial F}{\partial Q_p} \frac{\partial Q_p}{\partial d} + \frac{\partial F}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial d} + \frac{\partial F}{\partial t_p} \frac{\partial t_p}{\partial d} \equiv 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial A} = \frac{\partial F}{\partial Q_p} \frac{\partial Q_p}{\partial A} + \frac{\partial F}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial A} + \frac{\partial F}{\partial t_p} \frac{\partial t_p}{\partial A} \equiv 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\partial F}{\partial Q_p} \frac{\partial Q_p}{\partial L} + \frac{\partial F}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial L} + \frac{\partial F}{\partial t_p} \frac{\partial t_p}{\partial L} \equiv 0$$

Tomando ternas de ecuaciones del sistema anterior, se pueden construir cuatro sistemas homogéneos en $\partial F/\partial Q_p$, $\partial F/\partial V$ y $\partial F/\partial t_p$, los cuales tienen soluciones distintas de la trivial si y sólo si los jacobianos de transformación del espacio de parámetros que caracteriza la tormenta elemental, al espacio que caracteriza el hidrograma de salida de la cuenca, satisfacen las relaciones siguientes:

$$\frac{\partial(Q_p, V, t_p)}{\partial(l, d, A)} \equiv 0$$

$$\frac{\partial(Q_p, V, t_p)}{\partial(d, A, L)} \equiv 0$$

$$\frac{\partial(Q_p, V, t_p)}{\partial(A, L, l)} \equiv 0$$

$$\frac{\partial(Q_p, V, t_p)}{\partial(L, l, d)} \equiv 0 \quad (13)$$

Empleando de las ecuaciones 8 a la 10 es sencillo demostrar que:

$$\frac{\partial(Q_p, V, t_p)}{\partial(l, d, A)} \equiv 0$$

$$\frac{\partial(Q_p, V, t_p)}{\partial(d, A, L)} = -\frac{2fIt_p(t_p-d)}{(L^2 + 6Dt_p)(t_p-d) + L^2t_p}$$

$$Q_p \left\{ \frac{fIAL}{2\sqrt{\pi D}(t_p-d)^3} \exp\left[-\frac{[L-U(t_p-d)]^2}{4D(t_p-d)}\right] \right. \\ \left. - \frac{f^2I^2AU \exp(UL/D)t_p}{2D} \left[1 - \frac{(t_p-d)[L^2 - U^2t_p(t_p-d)]}{(L^2 + 6\alpha t_p)(t_p-d) + L^2t_p} \right] \right\}$$

$$\left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{L+U(t_p-d)}{2\sqrt{D}(t_p-d)}\right] - \operatorname{erf}\left[\frac{L+Ut_p}{2\sqrt{Dt_p}}\right] \right\} \neq 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial(Q_p, V, t_p)}{\partial(A, L, l)} \equiv 0$$

$$\frac{\partial(Q_p, V, t_p)}{\partial(L, l, d)} = -\frac{2fIt_p(t_p-d)A}{(L^2 + 6Dt_p)(t_p-d) + L^2t_p}$$

$$-Q_p \left\{ \frac{fdAL}{2\sqrt{\pi D}(t_p-d)^3} \exp\left[-\frac{[L-U(t_p-d)]^2}{4D(t_p-d)}\right] \right. \\ \left. - \frac{f^2IA^2U \exp(UL/D)t_p}{2D} \right. \\ \left. \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{L+U(t_p-d)}{2\sqrt{D}(t_p-d)}\right] - \operatorname{erf}\left[\frac{L+Ut_p}{2\sqrt{Dt_p}}\right] \right\} \right\} \neq 0$$

El resultado presentado en la expresión de la ecuación 14 implica que se violan las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la función F dada por la ecuación 11 y, por tanto, se concluye que el gasto pico, Q_p , el volumen, V , y el tiempo pico, t_p , forman una terna de variables funcionalmente independientes. Es obvio que esta conclusión es también aplicable a tormentas complejas, ya que en ese caso, la precipitación estaría caracterizada por un número de parámetros mayor que cuatro, por lo que con mayor razón los elementos de la terna (Q_p, V, t_p) serían funcionalmente independientes. Además, Bradley y Potter (1992) han demostrado que a mayor complejidad de la relación lluvia-escorrentamiento, mayor es la dispersión en la respuesta de una cuenca a un estímulo de precipitación. Por lo anterior, es muy plausible postular que los parámetros Q_p, V y t_p son funcionalmente independientes para cualquier tormenta y para relaciones lluvia-escorrentamiento más realistas (y por tanto más complejas) que las empleadas en el análisis anterior. Esto hace posible que la terna (Q_p, V, t_p) sea manejada como base para la construcción de un espacio muestral tridimensional, sobre la cual se elabore una descripción trivariada de hidrogramas de diseño.

Parametrización de hidrogramas de diseño

Con el objeto de simplificar la descripción de hidrogramas de diseño es conveniente considerar su parametrización a través de sus características más importantes: gasto pico, Q_p , volumen, V , y tiempo pico, t_p . Además del ampliamente conocido hidrograma triangular, en la literatura existe una parametrización del hidrograma propuesto por el Servicio de Conservación de Suelos de los Estados Unidos de América, que fue desarrollada por Horn (1987). Ésta se basa en el empleo de una función Pearson, como sigue (Ponce, 1989):

$$Q_d = F_P(t; Q_p, t_p, t_g) = Q_p \left(\frac{t}{t_p} \right)^{t_p/(t_g-t_p)} e^{-(t_p-t)/(t_g-t_p)} \quad (15)$$

para $t \in [0, \infty)$ y $Q_d = 0$ para otros tiempos. En la ecuación 15, $Q_d = Q_d(t)$ representa el hidrograma de diseño y t_g , el tiempo al centroide del hidrograma. Una representación adimensional de la parametrización Pearson se muestra en la ilustración 13 (para $t_g/t_p = 3$). Evidentemente, el tiempo base, t_b , tiende a infinito para el hidrograma Pearson dado por la ecuación 15. La ecuación 15 se puede integrar, obteniéndose la siguiente expresión para el volumen:

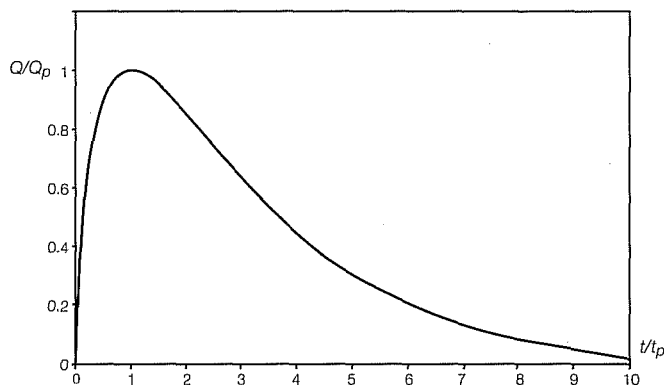
$$V = \int_0^{\infty} F_P(t; Q_p, t_p, t_g) dt = Q_p e^{t_p/(t_g-t_p)} \times \left(\frac{t_g-t_p}{t_p} \right)^{t_p/(t_g-t_p)} (t_g-t_p) \Gamma \left(1 + \frac{t_p}{t_g-t_p} \right) \quad (16)$$

Cuando Q_p, t_p y V son conocidos, la expresión 52 representa una ecuación trascendental para t_g , la cual puede ser resuelta numéricamente. Desafortunadamente, este proceso de solución es muy laborioso, en vista de la complejidad de la relación funcional representada por la ecuación 16. Por esta razón y con el objeto de contar con un mayor número de parametrizaciones para representar hidrogramas naturales, Aldama y Ramírez (1998a) propusieron emplear interpolantes hermitianos, según se describe a continuación.

Como ya se ha mencionado, los parámetros más importantes para la caracterización de un hidrograma de diseño son el gasto pico, Q_p , el tiempo pico, t_p , y el volumen de escurrimiento directo, V . Dado que un hidrograma representa la relación funcional entre gasto y tiempo, es más sencillo desarrollar una parametrización en términos de Q_p, t_p y el tiempo base, t_b . Esto resalta la importancia de que exista una relación sencilla entre Q_p, t_b y V . La parametrización de hidrogramas de escurrimiento directo puede plantearse en términos de interpolaciones basadas en el uso de polinomios de Hermite de grado impar, como sigue:

$$Q_d = Q_{2n+1}(t; \mathbf{p}); \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Ilustración 13. Hidrograma parametrizado mediante una función Pearson, para $t_g/t_p = 3$.



En donde p representa la tríada de parámetros $p = (Q_p, t_p, t_b)$. Dichos polinomios tienen la propiedad de preservar la continuidad de la función y de sus n primeras derivadas. Los hidrogramas así construidos han sido denominados hidrogramas triparamétricos hermitianos por Aldama y Ramírez (1998a). A continuación se muestran, como ejemplo, los hidrogramas triparamétricos hermitianos de órdenes 1, 3 y 5:

$$Q_1(t; Q_p, t_p, t_b) = \begin{cases} Q_p \frac{t}{t_p}; & t \in [0, t_p] \\ Q_p \left(1 - \frac{t-t_p}{t_b-t_p} \right); & t \in [t_p, t_b] \\ 0; & t \in (-\infty, 0) \cup (t_b, \infty) \end{cases} \quad (18)$$

$$Q_3(t; Q_p, t_p, t_b) = \begin{cases} Q_p \left[3 \left(\frac{t}{t_p} \right)^2 - 2 \left(\frac{t}{t_p} \right)^3 \right]; & t \in [0, t_p] \\ Q_p \left[1 - 3 \left(\frac{t-t_p}{t_b-t_p} \right)^2 + 2 \left(\frac{t-t_p}{t_b-t_p} \right)^3 \right]; & t \in [t_p, t_b] \\ 0; & t \in (-\infty, 0) \cup (t_b, \infty) \end{cases} \quad (19)$$

$$Q_5(t; Q_p, t_p, t_b) = \begin{cases} Q_p \left[10 \left(\frac{t}{t_p} \right)^3 - 15 \left(\frac{t}{t_p} \right)^4 + 6 \left(\frac{t}{t_p} \right)^5 \right]; & t \in [0, t_p] \\ Q_p \left[1 - 10 \left(\frac{t-t_p}{t_b-t_p} \right)^3 + 15 \left(\frac{t-t_p}{t_b-t_p} \right)^4 - 6 \left(\frac{t-t_p}{t_b-t_p} \right)^5 \right]; & t \in [t_p, t_b] \\ 0; & t \in (-\infty, 0) \cup (t_b, \infty) \end{cases} \quad (20)$$

Conforme a la ecuación 18, el hidrograma triangular es un miembro de la familia de hidrogramas triparamétricos hermitianos. Las ilustraciones 14 a 16 muestran una representación adimensional de los hidrogramas expresados por las ecuaciones 18 a 20 para $t_b/t_p = 3$.

Aldama y Ramírez han demostrado que el volumen de los miembros de la familia de hidrogramas triparamétricos hermitianos está dado por:

$$V_{2n+1} \equiv \int_0^{t_b} Q_{2n+1}(t; Q_p, V, t_p) dt = \frac{Q_p t_b}{2} \equiv V; \quad n = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Según puede observarse en la ecuación 21, todos los hidrogramas triparamétricos hermitianos que posean el mismo gasto pico y el mismo tiempo base poseerán el mismo volumen, que, incidentalmente, es el volumen del hidrograma triangular.

Como consecuencia de que existe una relación sencilla entre gasto pico, tiempo base y volumen, el tiempo base puede ser sustituido por el volumen en la tríada de parámetros que caracteriza un hidrograma triparamétrico hermitiano. En efecto, de la ecuación 21:

$$t_b = 2 \frac{V}{Q_p} \quad (22)$$

De modo que Q_{2n+1} puede expresarse como:

$$Q_{2n+1} = \tilde{Q}_{2n+1}(t; Q_p, t_p, V) \quad (23)$$

en donde $\tilde{Q}_{2n+1}(t; Q_p, V, t_p) \equiv Q_{2n+1}(t; Q_p, t_p, 2V/Q_p)$.

Así, por ejemplo, el hidrograma triangular en términos de la tríada (Q_p, V, t_p) , toma la forma:

$$\tilde{Q}_1(t; Q_p, V, t_p) = \begin{cases} Q_p \frac{t}{t_p}; & t \in [0, t_p] \\ Q_p \left(1 - \frac{t-t_p}{2V/Q_p - t_p} \right); & t \in [t_p, 2V/Q_p] \\ 0; & t \in (-\infty, 0) \cup (2V/Q_p, \infty) \end{cases} \quad (24)$$

Ilustración 14. Hidrograma triparamétrico hermitiano de orden uno para $t_b/t_p = 3$.

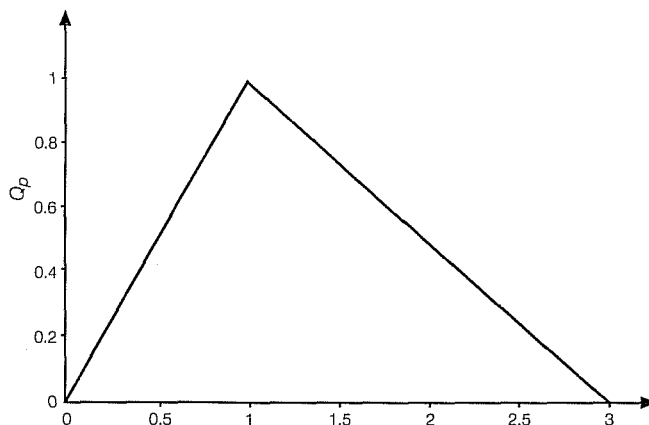


Ilustración 15. Hidrograma triparamétrico hermitiano de orden tres para $t_b/t_p = 3$.

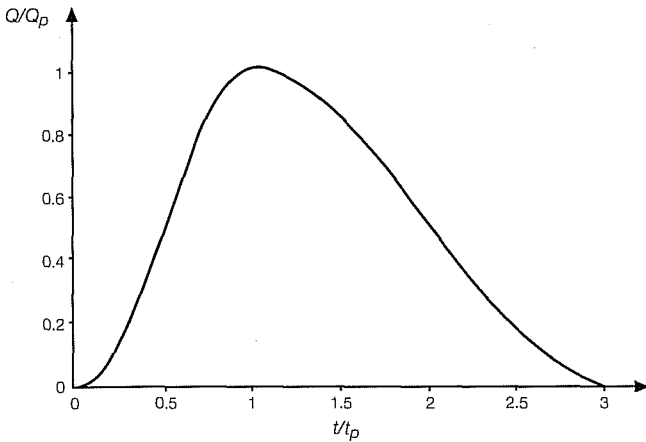
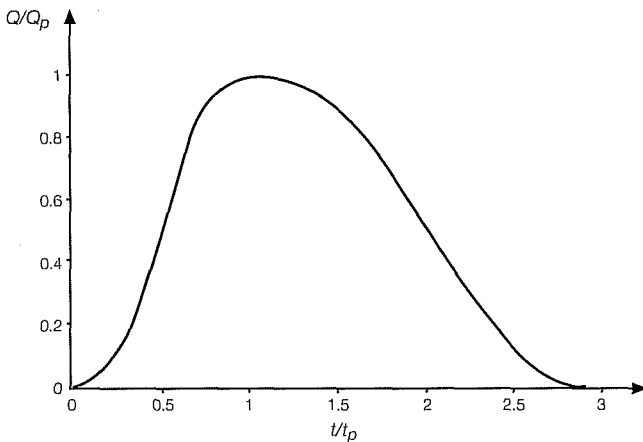


Ilustración 16. Hidrograma triparamétrico hermitiano de orden cinco para $t_b/t_p = 3$.



Aldama y Ramírez (1998a) han mostrado que los miembros de la familia de hidrogramas triparamétricos hermitianos pueden ser empleados fácilmente para la parametrización de hidrogramas registrados en estaciones hidrométricas y, por tanto, para la parametrización de hidrogramas de diseño.

Sensibilidad de la respuesta de vasos a variaciones en los parámetros que caracterizan hidrogramas de ingreso

La parametrización de hidrogramas permite estudiar la sensibilidad de la respuesta de vasos a variaciones en los parámetros que caracterizan una avenida, con el objeto de determinar cuáles son los más importantes. Esto es conveniente, ya que en caso de que alguno de estos parámetros no sea relevante, puede simplificarse la caracterización probabilista de hidrogramas de

diseño. La respuesta del vaso ante el ingreso de una avenida se puede representar a través de la elevación máxima que el agua alcanza en el mismo o del almacenamiento máximo correspondiente.

Considérese de nuevo la ecuación de tránsito de avenidas en vasos (ecuación 1). Esta ecuación se complementa con la relación elevaciones-capacidades, que puede ser escrita como (véanse ilustraciones 17 y 18):

$$\frac{S - S_c}{S_m - S_c} = \left(\frac{H - H_c}{H_m - H_c} \right)^\alpha \quad (25)$$

donde H y S respectivamente son la elevación de la superficie libre del agua y el almacenamiento correspondiente; H_c y S_c , la elevación de la cresta vertedora y el almacenamiento correspondiente; H_m es una cota

Ilustración 17. Parámetros para el diseño hidrológico de una presa.

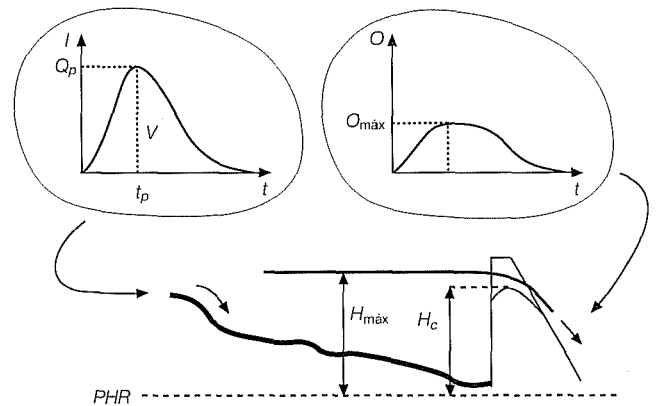
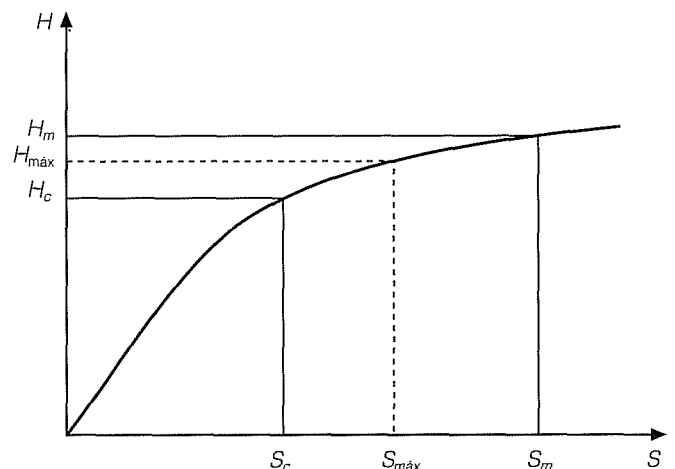


Ilustración 18. Curva elevaciones-capacidades.



superior de la elevación máxima que se alcanza en el vaso al transitar una avenida, $H_{máx}$; S_m una cota superior del almacenamiento máximo que se alcanza en el vaso al transitar una avenida, $S_{máx}$; y $\alpha > 1$, un exponente determinado por regresión. S_m puede estimarse añadiendo el volumen de la avenida a S_c . Una vez conocido S_m , H_m se determina a partir de la información topográfica del vaso, como la elevación correspondiente a S_m . La ecuación 25 también puede ser escrita como:

$$\frac{H-H_c}{H_m-H_c} = \left(\frac{S-S_c}{S_m-S_c} \right)^\beta \quad (26)$$

donde $\beta = 1/\alpha < 1$.

Considérese ahora el caso de vasos cuya ley de descarga está caracterizada por la ecuación de gasto de vertedores libres. Dicha ley incluye no solamente a vertedores sin control, sino también a aquéllos dotados de compuertas, cuya política de operación sea de apertura total súbita, esto es, aquélla en la que se procede a abrir completamente las compuertas una vez que se supera el umbral de un nivel de conservación en el vaso. Esta es una condición frecuente cuando se considera el tránsito de la avenida de diseño por el vaso. La ley de descarga de vertedor libre está dada por:

$$O = \mu L \sqrt{2g} (H-H_c)^{3/2} \quad (27)$$

donde μ es un coeficiente de descarga adimensional; g , la aceleración de la gravedad; y L , la longitud de la cresta vertedora.

Por otra parte, para incluir los casos en que existan compuertas en el vertedor de demasías, operadas mediante la política antes descrita, supóngase que la condición inicial de la elevación del agua en el vaso corresponda a un nivel de conservación, \tilde{H}_0 , y que el almacenamiento respectivo sea \tilde{S}_0 . Evidentemente, $\tilde{S}_0 = S_c$ para vertedores sin control y $\tilde{S}_0 > S_c$ para vertedores con compuertas cuya política de operación sea de apertura total súbita. De este modo, la condición inicial a la que está sujeta la ecuación 1 está dada por:

$$S(0) = \tilde{S}_0 \quad (28)$$

Resulta ahora conveniente definir las siguientes escalas características del problema de tránsito de avenidas por vasos representados por las ecuaciones 1 y de la 26 a la 28:

$$\text{Escala de almacenamientos: } S_e = S_m - S_c \quad (29)$$

$$\text{Escala de elevaciones: } H_e = H_m - H_c \quad (30)$$

$$\text{Escala de gastos: } Q_e = \mu L \sqrt{2g} (H_m - H_c)^{3/2} \quad (31)$$

$$\text{Escala de tiempos: } t_e = \frac{S_e}{Q_e} = \frac{S_m - S_c}{\mu L \sqrt{2g} (H_m - H_c)^{3/2}} \quad (32)$$

Con base en dichas escalas es posible ahora definir las siguientes variables adimensionales:

$$s = \frac{S - S_c}{S_e} \quad (33)$$

$$h = \frac{H - H_c}{H_e} \quad (34)$$

$$i = \frac{I}{Q_e} \quad (35)$$

$$o = \frac{O}{Q_e} \quad (36)$$

$$\tau = \frac{t}{t_e} \quad (37)$$

Empleando de las ecuaciones 33 a la 37 en la ecuación 1 se obtiene:

$$\frac{ds}{d\tau} = i - o \quad (38)$$

Combinando ahora las ecuaciones 26, 27, 31 y 38 resulta en:

$$\frac{ds}{d\tau} + s^{1+\varepsilon} = i(\tau) \quad (39)$$

donde $\varepsilon = \frac{3}{2}\beta - 1$. Es común en la práctica que $\varepsilon \ll 1$

(Aldama y Ramírez, 1998b).

La expresión de la ecuación 39 representa la ecuación diferencial no lineal de tránsito en avenidas en vasos con descarga libre. Conforme a la ecuación 28, está sujeta a la condición inicial:

$$s(0) = \tilde{s}_0 \equiv \frac{\tilde{S}_0 - S_c}{S_e} \quad (40)$$

Aldama y Ramírez (1998b) han desarrollado una solución perturbatoria al problema representado por las ecuaciones 39 y 40, como se muestra a continuación. Empleando una expansión en serie de Taylor del término no lineal en la ecuación 39, se llega al siguiente resultado:

$$\frac{ds}{d\tau} + s + \varepsilon s \ln s + \frac{\varepsilon^2}{2} s \ln^2 s = i(\tau) + O(\varepsilon^3) \quad (41)$$

La ecuación 41 puede resolverse empleando una expansión perturbatoria del tipo siguiente (Nayfeh, 1981):

$$s(\tau) = s_0(\tau) + \varepsilon s_1(\tau) + \varepsilon^2 s_2(\tau) + O(\varepsilon^3) \quad (42)$$

sustituyendo la ecuación 42 en la ecuación 41 y empleando la ecuación 40, se obtienen las siguientes soluciones para las funciones involucradas en las aproximaciones de orden cero, uno y dos a la solución del problema (ecuaciones 39 y 40):

$$s_0(\tau) = \left[\bar{s}_0 + \int_0^\tau e^{\tau'} i(\tau') d\tau' \right] e^{-\tau} \quad (43)$$

$$s_1(\tau) = -e^{-\tau} \int_0^\tau e^{\tau'} s_0(\tau') \left\{ -\tau + \ln \left[e^{\tau'} s_0(\tau') \right] \right\} d\tau'$$

$$s_2(\tau) = -e^{-\tau} \int_0^\tau e^{\tau'} \left\{ \frac{1}{2} s_0(\tau') \ln^2 s_0(\tau') + s_1(\tau') \left[1 + \ln s_0(\tau') \right] \right\} d\tau'$$

La solución dada por las expresiones de las ecuaciones 42 y 43 es válida para cualquier hidrograma adimensional de ingreso al vaso, $i=i(\tau)$.

Como ilustración, considérese el caso en el que el hidrograma de ingreso al vaso esté dado por el hidrograma triangular (triparamétrico hermitiano de primer orden) definido por la ecuación 24, $I(t) = \tilde{Q}_1(t; Q_p, V, t_p)$. En términos de las variables adimensionales antes definidas, dicho hidrograma toma la forma:

$$i(\tau) = \tilde{q}_1(\tau; \xi, \sigma, \gamma) = \begin{cases} \frac{\xi}{\gamma}; & \tau \in [0, \gamma] \\ \xi \left(\frac{2\sigma - \xi\tau}{2\sigma - \xi\gamma} \right); & \tau \in [\gamma, 2\sigma/\xi] \\ 0; & \tau \in (-\infty, 0) \cup (2\sigma/\xi, \infty) \end{cases} \quad (44)$$

donde ξ , σ y γ respectivamente son el gasto pico adimensional, el volumen adimensional y el tiempo pico adimensional, dados por:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{Q_p}{Q_e} \\ \sigma &= \frac{V}{S_e} \\ \gamma &= \frac{t_p}{t_e} \end{aligned} \quad (45)$$

Entonces, al sustituir la ecuación 44 en las ecuaciones 42 y 43 se llega a:

$$s(\tau) = \begin{cases} \frac{\xi}{\gamma} (\tau + e^{-\tau} - 1) + O(\varepsilon); & \tau \in [0, \gamma] \\ e^{(\gamma-\tau)} s_0(\gamma) + \frac{\xi}{2\sigma - \xi\gamma} [2\xi - \xi(\tau - 1)] & \\ -e^{(\gamma-\tau)} [2\xi - \xi(\gamma - 1)] + O(\varepsilon); & \tau \in (\gamma, 2\sigma/\xi] \\ s_0(2\sigma/\xi) e^{(2\sigma/\xi - \tau)} + O(\varepsilon); & \tau \in (2\sigma/\xi, \infty) \end{cases} \quad (46)$$

donde:

$$\begin{aligned} s_0(\gamma) &= \frac{\xi}{\gamma} (\gamma + e^{-\gamma} - 1) \\ s_0(2\sigma/\xi) &= e^{(\gamma - 2\sigma/\xi)} s(\gamma) + \frac{\xi}{2\sigma - \xi\gamma} [2\xi - \xi(2\sigma/\xi - 1)] \\ &- e^{(\gamma - 2\sigma/\xi)} [2\xi - \xi(\gamma - 1)] \end{aligned} \quad (47)$$

El máximo valor del almacenamiento adimensional se obtiene haciendo $ds/d\tau = 0$, de donde se obtiene que el tiempo en el que éste se presenta es:

$$\tau = \tau_{\text{máx}} = \gamma + \ln \left[\frac{2\sigma(1 - e^{-\gamma}) + \xi\gamma e^{-\gamma}}{\xi\gamma} \right] + O(\varepsilon) \quad (48)$$

por lo que el almacenamiento máximo es:

$$s_{\text{máx}}(\xi, \sigma, \gamma) = s(\tau_{\text{máx}}) = \xi \left\{ 1 - \frac{\xi}{2\sigma - \xi\gamma} \ln \left[2\sigma(1 - e^{-\gamma}) + \xi\gamma e^{-\gamma} \right] \right\} + O(\varepsilon) \quad (49)$$

La sensibilidad de la respuesta del vaso a variaciones en los parámetros que caracterizan el hidrograma de ingreso se puede determinar en términos de las derivadas de $s_{\text{máx}}$ con respecto a ξ , σ y γ , esto es, $\partial s_{\text{máx}}/\partial \xi$, $\partial s_{\text{máx}}/\partial \sigma$ y $\partial s_{\text{máx}}/\partial \gamma$. En un rango muy amplio de

variación de los parámetros ξ , σ y γ , es posible demostrar que, en general:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_{\text{máx}}}{\partial \xi} &= O\left(\frac{\partial s_{\text{máx}}}{\partial \sigma}\right) \\ \frac{\partial s_{\text{máx}}}{\partial \gamma} &\ll \frac{\partial s_{\text{máx}}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial s_{\text{máx}}}{\partial \gamma} &\ll \frac{\partial s_{\text{máx}}}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (50)$$

La expresión de la ecuación 50 indica que la respuesta del vaso es comparablemente sensible a variaciones en el gasto pico y el volumen. En contraste, la propia respuesta del vaso es mucho menos sensible a variaciones en el tiempo pico. La misma conclusión se obtiene al considerar el caso de una avenida de ingreso al vaso dada por el hidrograma triparamétrico hermitiano de tercer orden.

La conclusión anterior permite simplificar la parametrización de hidrogramas de diseño a fin de darles una acepción probabilista. En efecto, basta con considerar al gasto pico y al volumen como los parámetros que caracterizan un hidrograma de diseño. El tiempo pico se puede determinar mediante la siguiente relación, de uso frecuente en la construcción de hidrogramas sintéticos (Mockus, 1957):

$$t_p = \frac{3}{8} t_b = \frac{3V}{4Q_p} \quad (51)$$

Evidentemente, la expresión anterior sólo es válida para hidrogramas triparamétricos hermitianos, que quedarían parametrizados en la forma:

$$\hat{Q}_{2n+1}(t; Q_p, V) \equiv \tilde{Q}_{2n+1}\left(t; Q_p, V, \frac{3V}{4Q_p}\right) \quad (52)$$

En el caso del hidrograma Pearson, la expresión de la ecuación 51 no es aplicable, dado que $t_b \rightarrow \infty$. Se puede emplear entonces directamente la expresión $t_p = 3V/(4Q_p)$. Por tal motivo, el hidrograma Pearson quedaría parametrizado como:

$$\hat{F}_p(t; Q_p, V) \equiv F_p\left[t; Q_p, \frac{3V}{4Q_p}, t_g(Q_p, V)\right] \quad (53)$$

donde la función $t_g = t_g(Q_p, V)$ está dada por la solución de la ecuación 16 para t_g , previo empleo de la expresión $t_p = 3V/(4Q_p)$.

Hidrogramas de diseño con acepción probabilista

Los resultados presentados anteriormente permiten el desarrollo de una metodología para asociar un periodo de retorno (o, equivalentemente, un nivel de riesgo) con *todo* el hidrograma de diseño de una presa. La parametrización de hidrogramas de diseño reduce el problema anterior a emplear una distribución multivariada de los parámetros que caracterizan el hidrograma. Por fortuna, el hecho de que el tiempo pico no sea relevante en términos de la respuesta de vasos a la incidencia de avenidas permite simplificar la descripción multivariada de hidrogramas de diseño. En efecto, es suficiente considerar la distribución bivariada de gasto pico y volumen. El desarrollo teórico que a continuación se presenta ha sido propuesto por Aldama y Ramírez (1999a y 1999b).

Denótese con $Q_d = Q_d(t; Q_p, V)$ al hidrograma de diseño. La forma específica de la relación funcional especificada en la expresión anterior estaría dada por las ecuaciones 52 o 53. Entonces, la forma de la avenida de diseño queda completamente determinada al conocerse el gasto pico y el volumen.

En vista de que es de interés considerar el comportamiento de avenidas máximas anuales, la descripción probabilista de un hidrograma de diseño puede plantearse a través del conocimiento de la distribución de probabilidad de extremos bivariada del gasto pico y del volumen de la avenida, $F_{qv}(Q_p, V)$, esto es:

$$F_{qv}(Q_p, V) \equiv P(q \leq Q_p \cap v \leq V) \quad (54)$$

donde q y v son variables aleatorias mudas que respectivamente representan posibles valores del gasto pico y del volumen.

Las distribuciones marginales de gasto pico, $F_q(Q_p)$, y de volumen, $F_v(V)$, están dadas por las siguientes expresiones:

$$F_q(Q_p) \equiv P(q \leq Q_p) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{qv}(Q_p, V) dV \quad (55)$$

$$F_v(V) \equiv P(v \leq V) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{qv}(Q_p, V) dQ_p \quad (56)$$

Es posible ahora definir el periodo de retorno del hidrograma de diseño (esto es, de la avenida de diseño *completa*) como el recíproco de la probabilidad de excedencia conjunta del gasto pico y del volumen, esto es:

$$T_{Q_p, V} = \frac{1}{P(q > Q_p \cap v > V)} \quad (57)$$

De la ilustración 19 es evidente que:

$$P(q > Q_p \cap v > V) = 1 - P(q \leq Q) \quad (58)$$

$$-P(v \leq V) + P(q \leq Q_p \cap v \leq V)$$

Sustituyendo la ecuación 58 en la ecuación 57 y empleando las ecuaciones de la 54 a la 56, se obtiene la siguiente relación, que expresa el periodo de retorno en términos de la distribución de probabilidad conjunta de gasto pico y volumen y de sus marginales:

$$T_{Q_p, V} = \frac{1}{1 - F_q(Q_p) - F_v(V) + F_{qv}(Q_p, V)} \quad (59)$$

El conocimiento de la distribución de probabilidad conjunta $F_{qv}(Q_p, V)$ no sólo permite calcular el periodo de retorno conjunto, sino también los periodos de retorno individuales del gasto pico y el volumen, ya que:

$$T_{Q_p} = \frac{1}{P(q > Q_p)} = \frac{1}{1 - F_q(Q_p)} \quad (60)$$

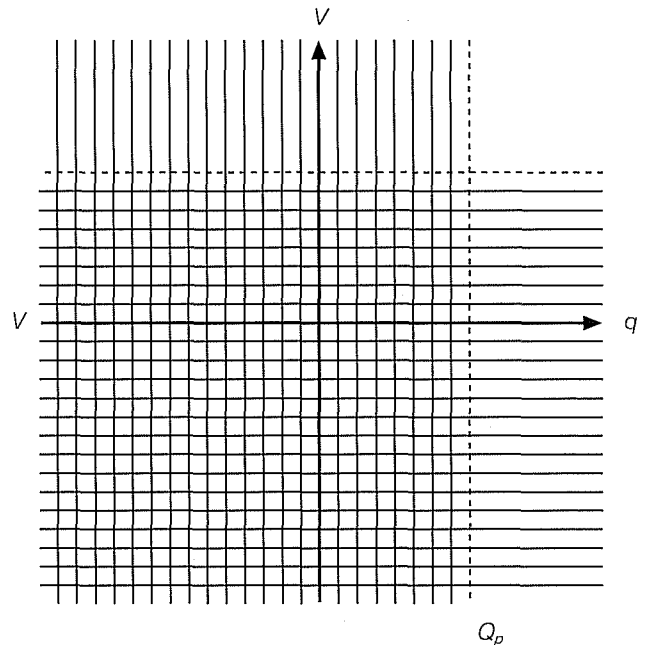
$$T_{Q_p} = \frac{1}{P(v > V)} = \frac{1}{1 - F_v(V)} \quad (61)$$

donde se ha empleado la definición de probabilidad, así como las ecuaciones 55 y 56.

En este punto es conveniente resaltar el hecho de que el análisis de frecuencias de gastos máximos anuales tradicional se basa en el uso de una expresión del tipo de la ecuación 60. En efecto, en ese caso se ajusta una distribución univariada de probabilidad de extremos, $F_q(Q_p)$, a la muestra de gastos máximos anuales, lo cual permite determinar, a través de la ecuación 60, el gasto pico de diseño, Q_p , correspondiente a un periodo de retorno, T_{Q_p} , dado. Una vez hecho lo anterior, se procede a "mayorar" la avenida máxima histórica, multiplicando el hidrograma correspondiente por el cociente $Q_p / (Q_r)_{\max}$, donde $(Q_r)_{\max}$ representa el gasto máximo registrado. Como se había señalado anteriormente, este procedimiento es completamente arbitrario, ya que si bien permite asociar un periodo de retorno con el gasto pico de diseño, no es posible asociar un periodo de retorno con el hidrograma de diseño determinado por "mayoración".

La construcción de la función de distribución conjunta $F_{qv}(Q_p, V)$ debe basarse en la teoría de distribuciones multivariadas de valores extremos. Para tal efecto es conveniente definir los siguientes valores adimensionales de gasto pico y volumen:

Ilustración 19. Representación gráfica de las probabilidades de excedencia y no excedencia. El área achurada verticalmente representa $P(q \leq Q_p)$. El área achurada horizontalmente representa $P(v \leq V)$. El área achurada tanto vertical como horizontalmente representa $P(q \leq Q_p \cap v \leq V)$. El área sin achurar representa $P(q > Q_p \cap v > V)$.



$$\tilde{Q}_p = \frac{Q_p - u_q}{e_q} \quad (62)$$

$$\tilde{V} = \frac{V - u_v}{e_v} \quad (63)$$

donde u_q y e_q respectivamente representan parámetros de ubicación y escalamiento del gasto pico; y u_v y e_v , parámetros de ubicación y escalamiento del volumen. Como se explicará más adelante, dichos parámetros pueden ser estimados ajustando los datos de la muestra de gastos y volúmenes máximos anuales a una distribución de probabilidad conjunta seleccionada apropiadamente. Así, sea $\tilde{F}_{qv}(\tilde{Q}_p, \tilde{V})$ la distribución bivariada de gastos pico y volúmenes adimensionales, cuyas distribuciones marginales serán denotadas por $\tilde{F}_q(\tilde{Q}_p)$ y $\tilde{F}_v(\tilde{V})$.

Una distribución multivariada de extremos debe satisfacer las cotas de Fréchet y las condiciones establecidas por el postulado de estabilidad (Galambos, 1978). Gumbel (1960) propuso el modelo logístico que satisface dichas cotas y condiciones. Empleando el modelo logístico, la distribución bivariada de extremos para gasto pico y volumen adquiere la siguiente forma:

$$\tilde{F}_{qv}(\tilde{Q}_p, \tilde{V}) = \exp \left\{ - \left(\left[\ln \tilde{F}_q(\tilde{Q}_p) \right]^m + \left[\ln \tilde{F}_v(\tilde{V}) \right]^m \right)^{1/m} \right\} \quad (64)$$

donde $m \in [1, \infty)$ representa un parámetro de asociación; $m = 1$ es el valor correspondiente a la independencia estadística de \tilde{Q}_p y \tilde{V} , mientras que $m \rightarrow \infty$, el valor correspondiente a su completa dependencia. Con el objeto de satisfacer el postulado de estabilidad (Fréchet, 1927), las distribuciones marginales $\tilde{F}_q(\tilde{Q}_p)$ y $\tilde{F}_v(\tilde{V})$ deben ser una de las tres distribuciones presentadas en Gumbel (1958): tipo I o Gumbel, tipo II o Fréchet y tipo III o Weibull. La distribución Gumbel es la más apropiada para representar la distribución de máximos. No obstante, se puede demostrar que cuando $\tilde{F}_q(\tilde{Q}_p)$ y $\tilde{F}_v(\tilde{V})$ se construyen como distribuciones Gumbel mixtas, el postulado de estabilidad también se satisface. Las distribuciones mixtas son útiles para describir el comportamiento de datos que pertenecen a dos poblaciones. En el caso de avenidas, eso puede ocurrir cuando las crecientes son producidas por eventos hidrometeorológicos de distinta naturaleza, como es el caso de tormentas convectivas y ciclónicas.

El parámetro de asociación, m , que aparece en la ecuación 64 puede calcularse en términos del coeficiente de correlación lineal, ρ , entre los valores de \tilde{Q}_p y \tilde{V} , como sigue (Gumbel y Mustafi, 1967):

$$m = \sqrt{\frac{1}{1-\rho}} \quad (65)$$

Ahora bien, en vista de la forma de la ecuación 59, es evidente que existe una infinidad de pares de valores (Q_p, V) que poseen un periodo de retorno conjunto, $T_{Q_p, V}$, dado (que en el caso de presas medianas y grandes suele especificarse como de diez mil años). Entonces, con el objeto de determinar la avenida de diseño es necesario encontrar cuál de esos pares produce los efectos más desfavorables sobre la presa a diseñar o revisar. Sea $H_{\max} = H_{\max}(Q_p, V)$ la máxima elevación que alcanza el agua en un vaso al transitar una avenida parametrizada en términos del par (Q_p, V) . Entonces, los valores de diseño (Q_{pd}, V_d) se pueden determinar como la solución del siguiente problema de optimización no lineal:

$$\max_{(Q_p, V)} H_{\max} = H_{\max}(Q_p, V) \quad (66)$$

sujeto a:

$$T_{Q_p, V} = \frac{1}{1 - F_q(Q_p) - F_v(V) + F_{qv}(Q_p, V)} = T_d \quad (67)$$

donde T_d es el valor seleccionado del periodo de retorno para fines de diseño. Es muy importante hacer notar que la relación funcional $H_{\max} = H_{\max}(Q_p, V)$ se determina a través de tránsito de avenidas por el vaso, por lo que las características propias de la presa, así como su política de operación, están directamente involucradas en la determinación de la avenida de diseño.

A continuación se presenta un ejemplo que ilustra la aplicación de la metodología presentada para estimar avenidas de diseño. Como se mencionó anteriormente, la presa El Infiernillo se diseñó originalmente empleando un hidrograma con gasto pico igual a 38,777 m³/s, determinado a partir de la envolvente de Creager. Se han efectuado diversos estudios para revisar la avenida de diseño de El Infiernillo (Marengo, 1994), a partir de los cuales la elevación de la cortina se incrementó a 184 msnm y la política de operación de las compuertas de la obra de demasías fue modificada. Al llevar a cabo una revisión de la avenida de diseño con los datos disponibles para la presa El Infiernillo, empleando la metodología tradicional de análisis de frecuencias de gastos máximos anuales, Aldama y Ramírez (1999b) determinaron un gasto pico de diseño de 60,000 m³/s correspondiente a diez mil años de periodo de retorno. El hidrograma de diseño se determinó empleando el método de mayoración. El volumen de dicho hidrograma resultó ser de 12,400 Mm³. Al transitarlo por el vaso de El Infiernillo resultó una elevación máxima del agua de 183 m, lo cual deja un bordo libre de un metro, por lo que, desde el punto de vista de la metodología tradicional, la presa parece segura.

La presa El Infiernillo se localiza en una región donde ocurren tanto tormentas convectivas como ciclónicas. Por tanto, es conveniente emplear distribuciones marginales Gumbel mixtas de la forma siguiente para el gasto pico y el volumen:

$$F_q(Q_p) = p_q \exp \left[- \exp \left(- \frac{Q_p - u_{q1}}{e_{q1}} \right) \right] \quad (68)$$

$$+ (1 - p_q) \exp \left[- \exp \left(- \frac{Q_p - u_{q2}}{e_{q2}} \right) \right]$$

$$F_v(V) = p_v \exp \left[- \exp \left(- \frac{V - u_{v1}}{e_{v1}} \right) \right] \quad (69)$$

$$+ (1 - p_v) \exp \left[- \exp \left(- \frac{V - u_{v2}}{e_{v2}} \right) \right]$$

donde p_q representa la probabilidad de que Q_p pertenezca a la población producida por tormentas convectivas; p_v , la probabilidad de que V pertenezca a la población producida por tormentas convectivas; u_{q1} , u_{q2} , u_{v1} y u_{v2} , parámetros de ubicación; y e_{q1} , e_{q2} , e_{v1} y e_{v2} , parámetros de escala.

El parámetro de asociación, m , se determinó empleando la ecuación 65 con los datos disponibles para El Infiernillo, obteniéndose $m = 1.505$. Los parámetros p_q , p_v , u_{q1} , u_{q2} , u_{v1} , u_{v2} , e_{q1} , e_{q2} , e_{v1} y e_{v2} fueron determinados aplicando el método de máxima verosimilitud (Kite, 1988) al modelo logístico dado por la ecuación 64 con marginales dadas por las ecuaciones 68 y 69. Los resultados obtenidos fueron $p_q = 0.8189$, $p_v = 0.8124$, $u_{q1} = 3,385 \text{ m}^3/\text{s}$, $u_{q2} = 11,203 \text{ m}^3/\text{s}$, $u_{v1} = 1,744 \text{ Mm}^3$, $u_{v2} = 4,031 \text{ Mm}^3$, $e_{q1} = 1,103 \text{ m}^3/\text{s}$, $e_{q2} = 6,551 \text{ m}^3/\text{s}$, $e_{v1} = 998 \text{ Mm}^3$ y $e_{v2} = 1,336 \text{ Mm}^3$.

Los hidrogramas de las avenidas máximas registradas en el sitio El Infiernillo se compararon con las parametrizaciones antes presentadas, verificándose que el hidrograma tripamétrico hermitiano de tercer orden es el que mejor se ajusta a los datos. Una vez definida la forma del hidrograma y la distribución de probabilidad conjunta por medio de las ecuaciones 64, 68 y 69, y los valores de los parámetros antes citados, se procedió a resolver el problema de optimización (ecuaciones 66 y 67) en forma numérica, empleando $T_d = 10,000$ años. Como resultado se obtuvo un gasto pico de diseño de $54,000 \text{ m}^3/\text{s}$ y un volumen de diseño de $13,960 \text{ Mm}^3$. Es interesante notar que también se calcularon los periodos de retorno individuales de gasto pico y volumen, obteniéndose $T_{q_p} = 3,262$ años y $T_v = 5056$ años, lo cual muestra que el vaso de la presa El Infiernillo es más sensible al volumen que al gasto pico. Los valores referidos de gasto pico y volumen, y la forma de la avenida dada por el hidrograma tripamétrico hermitiano de tercer orden, mediante las ecuaciones 19, 22 y 51, definieron el hidrograma de diseño. El tránsito de dicho hidrograma por el vaso de la presa El Infiernillo produjo una elevación máxima del agua de 186.73 m , que sobrepasa la elevación de la corona por 2.73 m . De acuerdo con este resultado, la presa resulta insegura para la avenida de diez mil años de periodo de retorno que provoca los efectos más desfavorables en el vaso.

Tránsito hidrológico de avenidas en cauces

Estimación de parámetros del método de Muskingum

Sin duda alguna, el método de Muskingum es el procedimiento más popular para llevar a cabo tránsitos de avenidas aproximados o "hidrológicos" en cauces.

Este método se fundamenta en el uso de la ecuación de continuidad para un tramo de cauce, escrita en la forma de la ecuación 1, donde ahora S representa el almacenamiento en el tramo; I , el gasto de ingreso al tramo; y O , el gasto de egreso del tramo. Dicha ecuación se complementa con una relación lineal entre almacenamiento y gastos de ingreso y egreso, de la forma siguiente:

$$S = K[XI + (1-X)O] \quad (70)$$

donde K es una constante de almacenamiento con dimensiones de tiempo y X , un factor de peso. Al combinar la ecuación 70 con la discretización de la ecuación de continuidad (ecuación 1) por medio de la regla trapezoidal (véase la ecuación 3), se obtiene la siguiente ecuación (discreta) de tránsito de Muskingum:

$$O_{j+1} = C_0 I_{j+1} + C_1 I_j + C_2 O_j \quad (71)$$

donde I_j es una aproximación discreta a $I(j\Delta t)$ y O_j es una aproximación discreta a $O(j\Delta t)$, siendo Δt un intervalo de tiempo. En la ecuación 71 $j = 0, 1, 2, \dots$ y los coeficientes C_0 , C_1 y C_2 se denominan coeficientes de tránsito y están dados por las siguientes expresiones:

$$C_0 = \frac{-2KX + \Delta t}{2K(1-X) + \Delta t} \quad (72)$$

$$C_1 = \frac{2KX + \Delta t}{2K(1-X) + \Delta t} \quad (73)$$

$$C_2 = \frac{2K(1-X) - \Delta t}{2K(1-X) + \Delta t} \quad (74)$$

Evidentemente, por continuidad:

$$C_0 + C_1 + C_2 = 1 \quad (75)$$

Tradicionalmente se emplea un método gráfico para estimar los parámetros K y X (Ponce, 1989), basado en datos de una avenida para la que se conozcan los gastos de ingreso y egreso de un tramo de cauce. No obstante, esta técnica resulta muy laboriosa. Existen diversos métodos basados en el enfoque de mínimos cuadrados para estimar los parámetros del método de Muskingum. Aldama (1990) realizó un análisis comparativo de estos procedimientos. A continuación se presentan sus principales conclusiones:

Gill (1977) y Aldama (1980) propusieron llevar a cabo un ajuste por mínimos cuadrados de los parámetros K y X . La estrategia propuesta por los citados

autores se basa en el empleo de la ecuación 70. Gill (1977) hizo notar que normalmente los valores de los almacenamientos (absolutos) en el tramo de río bajo estudio no están disponibles en la práctica. Por tanto, ese autor propuso escribir:

$$S = S_r - \sigma \quad (76)$$

donde S_r representa el almacenamiento relativo y $-\sigma$ se puede interpretar como el almacenamiento inicial. Entonces, con base en la ecuación 76, es posible modificar la versión discreta de la ecuación 70, escribiéndola de la siguiente manera:

$$\hat{S}_{rj} = \sigma + \alpha I_j + \beta O_j \quad (77)$$

donde el circunflejo representa "estimado" y:

$$\alpha = KX \quad (78)$$

$$\beta = K(1-X)$$

La minimización de la suma de los errores cuadráticos entre los almacenamientos relativos observados (obtenidos de la versión discreta de la ecuación de continuidad) y los estimados proporcionados por la ecuación 76 resulta en las siguientes expresiones para α y β :

$$\alpha = D^{-1} \left\{ \left[\sum_{j=1}^N I_j O_j \sum_{j=1}^N O_j - \sum_{j=1}^N I_j \sum_{j=1}^N O_j^2 \right] \sum_{j=1}^N S_{rj} + \left[N \sum_{j=1}^N O_j^2 - \left(\sum_{j=1}^N O_j \right)^2 \right] \sum_{j=1}^N I_j S_{rj} + \left[\sum_{j=1}^N I_j \sum_{j=1}^N O_j - N \sum_{j=1}^N I_j O_j \right] \sum_{j=1}^N O_j S_{rj} \right\} \quad (79)$$

$$\beta = D^{-1} \left\{ \left[\sum_{j=1}^N I_j \sum_{j=1}^N I_j O_j - \sum_{j=1}^N I_j^2 \sum_{j=1}^N O_j \right] \sum_{j=1}^N O_j S_{rj} + \left[\sum_{j=1}^N S_{rj} + \left[N \sum_{j=1}^N I_j^2 - \left(\sum_{j=1}^N I_j \right)^2 \right] \sum_{j=1}^N O_j S_{rj} + \left[\sum_{j=1}^N I_j \sum_{j=1}^N O_j - N \sum_{j=1}^N I_j O_j \right] \sum_{j=1}^N I_j S_{rj} \right\} \quad (80)$$

donde N representa el número total de datos de gastos de ingreso (o egreso) y:

$$D = N \left[\sum_{j=1}^N I_j^2 \sum_{j=1}^N O_j^2 - \left(\sum_{j=1}^N I_j O_j \right)^2 \right] + 2 \sum_{j=1}^N I_j \sum_{j=1}^N O_j \sum_{j=1}^N I_j O_j - \left(\sum_{j=1}^N I_j \right)^2 \sum_{j=1}^N O_j^2 - \sum_{j=1}^N I_j^2 \left(\sum_{j=1}^N O_j \right)^2 \quad (81)$$

Una vez que α y β han sido calculadas, K y X pueden obtenerse a partir de las siguientes expresiones:

$$K = \alpha + \beta \quad (82)$$

$$X = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Heggen (1984) obtuvo la siguiente expresión para el gasto de egreso estimado, eliminando a C_0 mediante la ecuación 75 y empleando recursivamente la ecuación 71:

$$\hat{O}_{j+1} = I_{j+1} + \sum_{k=0}^{j-1} C_2^k C_3 (I_{j-k} - I_{j-k+1}) \quad (83)$$

donde $C_3 = C_1 + C_2$. Minimizando la suma de los cuadrados de los errores de estimación del gasto de egreso resulta en:

$$\left[\sum_{j=1}^N F_{j+1} \sum_{k=0}^{j-1} C_2^k G_{jk} \right] \left[\sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=0}^{j-1} C_2^k G_{jk} \right) \left(\sum_{k=0}^{j-1} k C_2^{k-1} G_{jk} \right) \right] - \left[\sum_{j=1}^N F_{j+1} \sum_{k=0}^{j-1} k C_2^{k-1} G_{jk} \right] \left[\sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=0}^{j-1} C_2^k G_{jk} \right)^2 \right] = 0 \quad (84)$$

$$C_3 = - \frac{\sum_{j=1}^N F_{j+1} \sum_{k=0}^{j-1} C_2^k G_{jk}}{\sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=0}^{j-1} C_2^k G_{jk} \right)^2} \quad (85)$$

donde $F_j = I_j - O_j$ y $G_{jk} = I_{j-k} - I_{j-k+1}$. La ecuación 84 puede ser resuelta iterativamente y, una vez conocida C_2 , C_3 puede ser calculada mediante la ecuación 85. K y X pueden ser calculadas en términos de C_2 y C_3 como sigue:

$$K = \frac{C_3 \Delta t}{(1 - C_2)} \quad (86)$$

$$X = 1 - \frac{1 + C_2}{2C_3} \quad (87)$$

Finalmente, el método modificado de O'Donnell (véanse O'Donnell, 1985 y Aldama, 1990) consiste en eliminar C_0 de la ecuación de tránsito (ecuación 71) mediante el empleo de la restricción de continuidad (ecuación 75), por lo que el gasto de egreso estimado se puede expresar como:

$$\hat{O}_{j+1} = I_{j+1} + C_1(I_j - I_{j+1}) + C_2(O_j - I_{j+1}) \quad (88)$$

En este caso, la minimización de la suma de los cuadrados de los errores de estimación del gasto de egreso resulta en:

$$C_1 = E^{-1} \left\{ \left[\sum_{j=1}^N (O_j - I_{j+1})^2 \right] \left[\sum_{j=1}^N (I_j - I_{j+1})(O_{j+1} - I_{j+1}) \right] - \left[\sum_{j=1}^N (I_j - I_{j+1})(O_j - I_{j+1}) \right] \left[\sum_{j=1}^N (O_j - I_{j+1})(O_{j+1} - I_{j+1}) \right] \right\} \quad (89)$$

$$C_2 = E^{-1} \left\{ \left[\sum_{j=1}^N (I_j - I_{j+1})^2 \right] \left[\sum_{j=1}^N (O_j - I_{j+1})(O_{j+1} - I_{j+1}) \right] - \left[\sum_{j=1}^N (I_j - I_{j+1})(O_j - I_{j+1}) \right] \left[\sum_{j=1}^N (I_j - I_{j+1})(O_{j+1} - I_{j+1}) \right] \right\} \quad (90)$$

donde:

$$E = \left[\sum_{j=1}^N (I_j - I_{j+1})^2 \right] \left[\sum_{j=1}^N (O_j - I_{j+1})^2 \right] - \left[\sum_{j=1}^N (I_j - I_{j+1})(O_j - I_{j+1}) \right]^2 \quad (91)$$

K y X pueden determinarse como:

$$K = \frac{C_1 + C_2}{1 - C_2} \Delta t \quad (92)$$

$$X = 1 - \frac{1 + C_2}{2(C_1 + C_2)} \quad (93)$$

Aldama (1990) ha demostrado que los enfoques de mínimos cuadrados propuestos por Gill (1977), Heggen (1984) y O'Donnell (1985) son óptimos no solamente con respecto a los parámetros involucrados directamente en cada uno de ellos (α y β en el método de Gill, C_2 y C_3 en el de Heggen y C_1 y C_2 en el de O'Donnell), sino también con respecto a K y X . Adicionalmente, Aldama (1990) realizó pruebas numéricas que demuestran la superioridad del enfoque de Gill sobre los otros dos métodos de estimación descritos. En particular, los valores de K y X determinados con el método de Gill permiten realizar mejores pronósticos de tránsitos de avenidas diferentes a la empleada para estimar los parámetros del método de Muskingum.

Estabilidad y factibilidad física del método de Muskingum

Aldama y Aguilar (1998a) han determinado las condiciones de estabilidad y de factibilidad física del método de Muskingum. Sus principales resultados se describen a continuación.

Considérense las igualdades siguientes:

$$O_{j+1} = Q_{k+1}^{j+1}, \quad O_j = Q_{k+1}^j, \quad I_{j+1} = Q_k^{j+1} \text{ y } K = \Delta x / c \quad (94)$$

Sustituyendo la ecuación 94 en la ecuación de tránsito de Muskingum (ecuación 71), tomando en cuenta las ecuaciones 72, 73 y 74, se obtiene la siguiente ecuación:

$$X \frac{Q_k^{j+1} - Q_k^j}{\Delta t} + (1 - X) \frac{Q_{k+1}^{j+1} - Q_{k+1}^j}{\Delta t} + \frac{c}{2\Delta x} (Q_{k+1}^{j+1} - Q_k^{j+1} + Q_{k+1}^j - Q_k^j) = 0 \quad (95)$$

Se puede demostrar que la ecuación 95 representa una aproximación en diferencias finitas con error de truncado de $O(\Delta x, \Delta t)$ de la forma lineal de la ecuación de la onda cinemática (Aldama y Aguilar, 1998a):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (96)$$

donde $Q = Q(x, t)$ representa el gasto que escurre a través de la sección transversal de un cauce, en la posición x y en el tiempo t ; y $c = \text{const.}$, la celeridad de la onda. Como es bien sabido, la ecuación 96 resulta de considerar la combinación de la ecuación unidimensional de continuidad para flujo a superficie libre

con una relación biunívoca elevación-gasto, y la ulterior linealización del resultado (Singh, 1996). En vista de lo anterior, en la ecuación 95, Q_k^j representa una aproximación discreta a $Q(k\Delta x, j\Delta t)$, Δx y Δt respectivamente son un intervalo espacial y un intervalo temporal, y k y j son números enteros no negativos.

La ecuación 95 es equivalente a la ecuación 71, siempre y cuando se satisfaga la ecuación 94 y se suponga que la ecuación 95 se aplica en un solo tramo, en toda la duración del tránsito. En otras palabras, para que la ecuación 95 equivalga a la ecuación 71 se requiere que, además de satisfacer la ecuación 95, Δx sea igual a la longitud del tramo de cauce en estudio, lo cual, a su vez, implica que $k = 0$, suponiendo que el origen de la coordenada espacial x se tome en la sección de entrada a dicho tramo.

El análisis de estabilidad del esquema de diferencias finitas (ecuación 95) (Aldama y Aguilar, 1998a), mediante el uso del método de von Neumann, resulta en la siguiente condición de estabilidad:

$$X \leq 1/2 \quad (97)$$

Tomando en cuenta la equivalencia que puede argumentarse existe entre el esquema (ecuación 95) y el método de Muskingum, la desigualdad (ecuación 97) ha sido interpretada como la condición de estabilidad del método de Muskingum (Cunge, 1969 y Ponce, 1989, entre otros). No obstante, estrictamente hablando, esta conclusión es errónea, según se demuestra a continuación.

El análisis de estabilidad de von Neumann del esquema (ecuación 95) es rigurosamente aplicable sólo cuando las condiciones de frontera son periódicas, dada la periodicidad de la base discreta de Fourier empleada para representar el error de redondeo (Smith, 1985). Dicho análisis también puede ser empleado en forma asintótica para estudiar la estabilidad de la solución de la ecuación de diferencias (95) en nodos espaciales suficientemente alejados de las fronteras, cuando el número de nodos espaciales es grande. Ninguno de estos dos supuestos se cumple cuando se aplica la ecuación de tránsito del método de Muskingum (ecuación 71), ya que, según se explicó anteriormente, el esquema de diferencias finitas (ecuación 95) es equivalente a dicha ecuación de tránsito siempre y cuando se satisfaga la ecuación 94, y la ecuación 71 se aplique en un solo tramo.

De hecho, mientras que la discretización de la ecuación de la onda cinemática (ecuación 95) representa una ecuación de diferencias parciales, la ecuación de tránsito del método de Muskingum (ecuación 71) representa una ecuación de diferencias ordinarias (Mi-

ckens, 1987). Por tal motivo, el análisis de su estabilidad debe ser abordado en forma distinta.

Dado que la variable dependiente en la ecuación 71 es el gasto de salida, considérese la descomposición siguiente:

$$O_j = \hat{O}_j + E_j \quad (98)$$

donde \hat{O}_j representa la solución exacta de la ecuación de diferencias (ecuación 71) correspondiente al nivel de tiempo j , y E_j el respectivo error de redondeo. Sustituyendo la ecuación 98 en la ecuación 71 y haciendo uso del hecho que \hat{O}_j la satisface exactamente, se obtiene la siguiente ecuación para el error de redondeo:

$$E_{j+1} = C_2 E_j \quad (99)$$

Como puede observarse, E_j satisface la versión homogénea de la ecuación 71. Una ecuación de diferencias lineal y homogénea, como la ecuación 99, admite soluciones del tipo: $E_j = E_0 \Xi^j$ (Mickens, 1987), donde E_0 representa el error de redondeo inicial y Ξ , un factor de amplificación. Al sustituir la expresión anterior en la ecuación 99 se obtiene $\Xi = C_2$, por lo que la condición de estabilidad $|\Xi| \leq 1$ se traduce en:

$$|C_2| \leq 1 \quad (100)$$

de donde, en vista de la ecuación 73, $-2K(1-X) - \Delta t \leq 2K(1-X) - \Delta t \leq 2K(1-X) + \Delta t$. Esta desigualdad implica que $\Delta t \geq 0$, condición que se satisface trivialmente, y que:

$$X \leq 1 \quad (101)$$

La desigualdad anterior representa la verdadera condición de estabilidad del método de Muskingum. Evidentemente, la condición 101 difiere de la condición 97, la cual ha sido presentada erróneamente por Cunge (1969) y Ponce (1989) como la condición de estabilidad del esquema de Muskingum.

Es bien conocido que el método de Muskingum exhibe un comportamiento espurio en el tránsito de hidrogramas de entrada a un tramo de cauce, en el sentido de que los gastos de salida calculados son subestimados en los primeros intervalos de tiempo (véase ilustración 6). Venetis (1969) ha explicado este fenómeno para el caso continuo, demostrando que el hidrograma unitario instantáneo asociado con la ecuación diferencial que resulta de combinar la ecuación de continuidad con la relación almacenamiento-gasto de Muskingum incluye un término proporcional a una delta de Dirac negativa. En este sentido, Gill (1984) ha

propuesto emplear una versión del método de Muskingum que incluye un desfaseamiento del hidrograma de salida. No obstante, el cálculo del parámetro de desfaseamiento no es sencillo. Además, en la práctica, el método de Muskingum se emplea en forma discreta, aplicando la ecuación de tránsito (ecuación 71). Por este motivo, es conveniente llevar a cabo un análisis que permita determinar bajo qué condiciones la versión discreta del método de Muskingum produce hidrogramas de salida físicamente factibles. En este tenor, considérese primeramente el problema de subestimación de gastos de salida iniciales. Con tal fin, supóngase la condición inicial siguiente: $I_0 = O_0$, que corresponde a un escurrimiento permanente y que es la que normalmente prevalece en la aplicación de la ecuación 71. Entonces, dicha ecuación, para $j = 0$, adopta la forma:

$$O_1 = C_0 I_1 + (C_1 + C_2) O_0 \quad (102)$$

Supóngase ahora que ingresa un hidrograma al tramo de cauce en estudio, de modo que $I_1 = I_0 + (\Delta I)_0 = O_0 + (\Delta I)_0$, donde $(\Delta I)_0 > 0$. Sustituyendo esta expresión en la ecuación 102 se obtiene: $O_1 = O_0 + C_0 (\Delta I)_0$. De la ecuación anterior se desprende que:

$$0 \leq C_0 \leq 1 \quad (103)$$

La desigualdad izquierda arriba anotada evita que existan las subestimaciones de gasto (o incluso gastos negativos) que son comúnmente observadas en la aplicación del método de Muskingum. La desigualdad derecha obedece a que no es de esperarse que el incremento del gasto de salida sea mayor que el incremento del gasto de entrada. Dichos incrementos podrían ser iguales sólo cuando las secciones de entrada y salida coincidieren. De las ecuaciones 72 y 103 se deducen las siguientes condiciones de factibilidad física: $K > 0$, la cual se cumple trivialmente, y

$$\Delta t \geq 2KX \quad (104)$$

La relación 104 asegura que no existan subestimaciones de gastos de salida.

Por otra parte, sea $j = J$ el instante en que termina la avenida de entrada y el hidrograma correspondiente se torna permanente. Bajo estas condiciones, $I_{j+1} = I_j$, de modo que la ecuación 71 adquiere la forma:

$$O_{J+1} = (C_0 + C_1) I_J + C_2 O_J \quad (105)$$

Exprésese O_j como:

$$O_j = I_j + (\Delta O)_j \quad (106)$$

donde $(\Delta O)_j > 0$, debido a que se espera que el hidrograma de salida se vuelva permanente después que el de entrada. Lo anterior obedece a los conocidos efectos de atenuación y translación que el tránsito de avenidas en cauces origina en los hidrogramas de entrada. Sustituyendo la ecuación 106 en la ecuación 105 se llega a:

$$O_{J+1} = I_J + C_2 (\Delta O)_J \quad (107)$$

de donde:

$$C_2 \geq 0 \quad (108)$$

Combinando las ecuaciones 74, 101, 104 y 108, se obtiene el siguiente resultado: $2KX \leq \Delta t \leq 2K(1-X)$. Las desigualdades anteriores sólo se pueden cumplir si:

$$X \leq 1/2 \quad (109)$$

Es interesante notar que esta desigualdad, que ha sido malinterpretada como la condición de estabilidad del método de Muskingum, es en realidad una condición de factibilidad física.

Finalmente, cuando el hidrograma de entrada está en la fase de descenso y el de salida está en la fase de ascenso, puede ocurrir que para cierto instante $j = L$, $O_L = I_{L+1}$. Entonces, la ecuación 2 adopta la forma siguiente:

$$O_{L+1} = (C_0 + C_2) O_L + C_1 I_L \quad (110)$$

Ahora bien, bajo estas condiciones, puede escribirse que, dado que $I_L > I_{L+1} = O_L$, $I_L = O_L + (\Delta O)_L$, donde $(\Delta O)_L > 0$. Empleando esta información en la ecuación 110 se obtiene: $O_{L+1} = O_L + C_1 (\Delta O)_L$. De donde se concluye que, dado que el hidrograma de salida está en fase de ascenso:

$$C_1 \geq 0 \quad (111)$$

La ecuación 31, en combinación con la ecuación 73, implica que:

$$\Delta t \geq -2KX \quad (112)$$

Al observar las condiciones de factibilidad física (ecuaciones 104 y 112), se concluye que si $X > 0$, la desigualdad 112 se cumple trivialmente, y si $X < 0$, la desigualdad 114 se cumple también en forma automática. Por tal motivo, las condiciones (ecuaciones 114 y 112) pueden ser escritas en forma amalgamada como:

$$\Delta t \geq 2K|X| \quad (113)$$

Es interesante notar que las ecuaciones 75 y 109 implican que:

$$C_1 \leq 1 \quad (114)$$

Con el objeto de ilustrar la aplicación de los resultados presentados, considérese el tránsito de una avenida similar a la descrita en Aldama (1990), mostrada en la ilustración 20. El hidrograma de entrada se transitó a través de un canal prismático con sección trapezoidal simétrica con las siguientes características: ancho del fondo igual a 100 m; talud lateral, 2; longitud, 2500 m; pendiente del fondo, 0.0001; coeficiente de rugosidad de Manning, 0.08. Primeramente el tránsito se efectuó empleando el esquema numérico descrito en Aldama (1991) para resolver las ecuaciones de Saint-Venant. De este modo, se obtuvo el hidrograma de salida mostrado en la ilustración 21 que, en combinación con el hidrograma de entrada, se empleó para calibrar el método de Muskingum.

Como ya se indicó, Aldama (1990) ha demostrado que entre los métodos de mínimos cuadrados, el propuesto por Gill (1977) es el que produce los mejores resultados en la calibración del método. Su aplicación para $\Delta t = 1$ h produce los siguientes resultados: $K = 45.8$ h y $X = 0.348$ y el hidrograma de salida mostrado en la ilustración 22. En este caso se viola la condición de factibilidad física (ecuación 113), por lo que, como se esperaba, se observan subestimaciones iniciales de gasto de salida en la ilustración 22. Para eliminar este efecto se incrementó el valor de Δt hasta lograr satisfacer la condición 113. Los resultados para $\Delta t = 30$ h fueron $K = 40.43$ h y $X = 0.340$, con los cuales se satisface dicha relación. El hidrograma de salida correspondiente, que se muestra en la ilustración 23, exhibe un ajuste excelente al hidrograma registrado y

Ilustración 20. Hidrograma de ingreso al cauce.

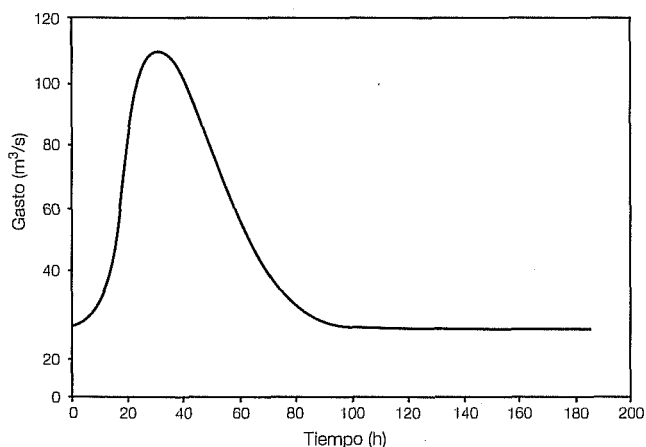


Ilustración 21. Hidrograma de egreso del cauce obtenido por medio de tránsito hidráulico.

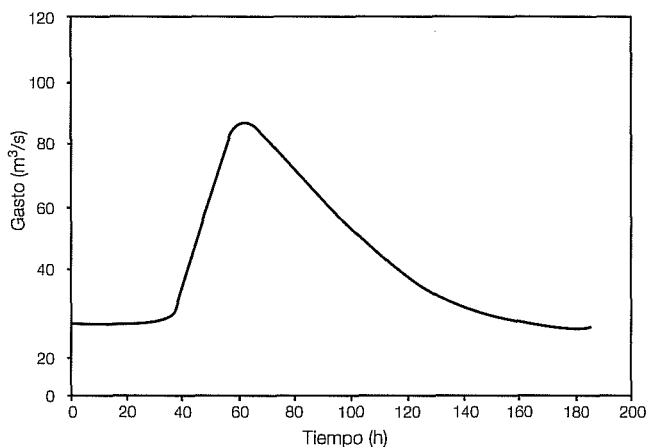


Ilustración 22. Calibración del método de Muskingum.

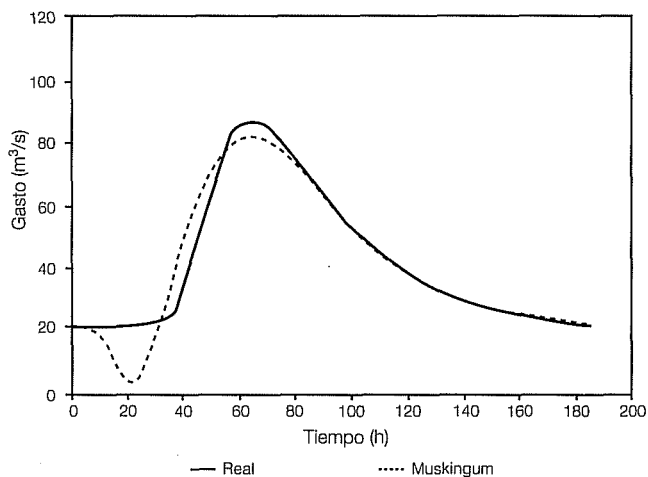


Ilustración 23. Calibración del método de Muskingum respetando las condiciones de realizabilidad.

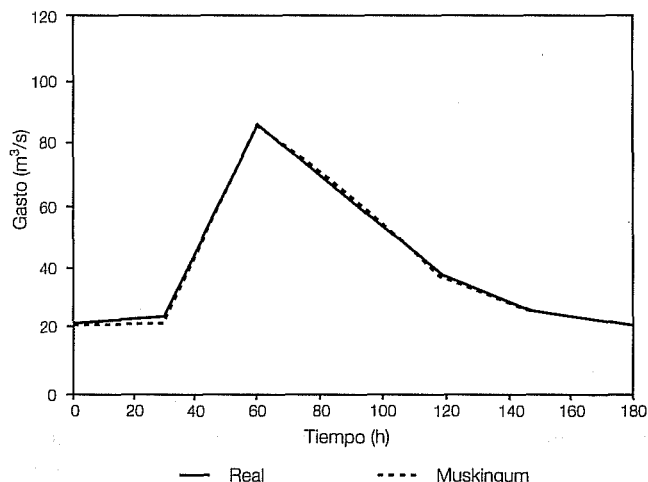
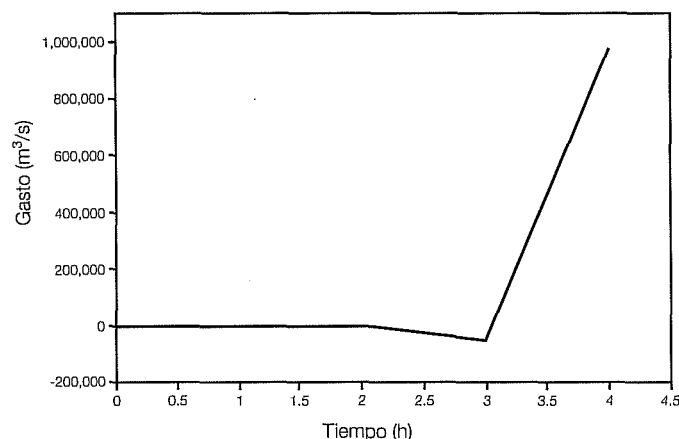


Ilustración 24. Tránsito de la avenida con el método de Muskingum para $X = 1.01$.



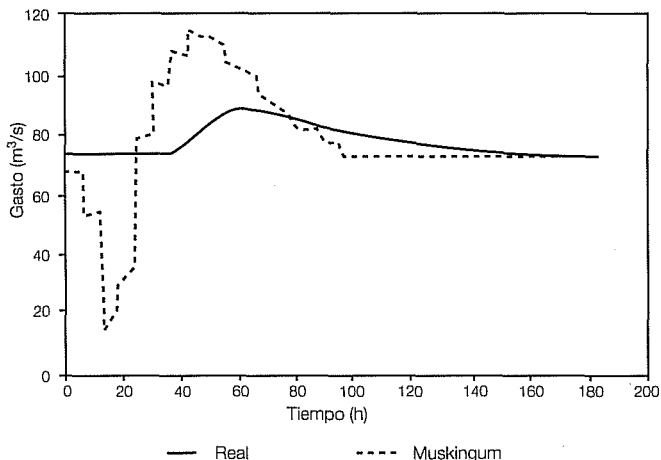
no exhibe subestimaciones iniciales de gasto. Debe aclararse que los hidrogramas presentados en la ilustración 23 contienen interpolaciones lineales de los valores discretos de gastos, muestreados del hidrograma de egreso presentado en la ilustración 21 y calculado con el método de Muskingum, empleando los valores recién citados para Δt , K y X .

Con el fin de demostrar los efectos que tiene la violación de las condiciones de estabilidad (ecuación 101) y de realizabilidad física (ecuación 109), se emplearon los siguientes valores: $\Delta t = 1$ h y $K = 45.8$ h, y se varió el valor de X . Así, para $X = 1.01$, que viola la condición de estabilidad 101, se obtuvo el hidrograma de salida mostrado en la ilustración 24, que muestra claros signos de inestabilidad. Por otra parte, para $X = 0.9$, que satisface la ecuación 101, se obtuvieron resultados estables, como se muestra en la ilustración 25, pero el hidrograma de salida correspondiente muestra oscilaciones espurias, debido a que se viola la condición $\Delta t \leq K(1-X)$ y, por tanto, $C_2 < 0$, en concordancia con lo predicho por la teoría expuesta. Asimismo, el hidrograma de salida mostrado en la ilustración 25 exhibe subestimaciones iniciales de gasto, dado que se viola la condición 113.

El método de Muskingum y la ecuación de advección-difusión

Las ecuaciones de Saint-Venant, que gobiernan flujos unidimensionales a superficie libre, pueden ser simplificadas de diferentes maneras. Si se supone que los términos inerciales y el correspondiente al gradiente de tirantes en la ecuación de cantidad de movimiento son despreciables en comparación con los términos

Ilustración 25. Tránsito de la avenida con el método de Muskingum para $X = 0.99$.



que involucran a las pendientes de fondo y de fricción, resulta una relación biunívoca entre gasto (o velocidad) y área (o tirante). Lo anterior es equivalente a suponer una condición local de flujo uniforme para toda posición y todo tiempo. Al sustituir esa relación en la ecuación de continuidad se obtiene la ecuación (no lineal) de la onda cinemática (Singh, 1996). Dicha ecuación puede ser linealizada alrededor de un estado de referencia, con lo que se obtiene la ecuación lineal de la onda cinemática (ecuación 96) (Cunge, 1969).

Por otra parte, en el caso de flujos subcríticos con números de Froude pequeños, es posible despreciar solamente los términos inerciales en la ecuación de cantidad de movimiento, lo cual resulta en la ecuación que rige a los flujos permanentes gradualmente variados. Al combinar dicha ecuación con la ecuación de continuidad, se obtiene una ecuación de advección-difusión, ya sea en el tirante o en el gasto, que rige la llamada "analogía de difusión" (Singh, 1996). Dicha ecuación también puede linealizarse alrededor de un estado de referencia, con lo que se obtiene la siguiente ecuación lineal de advección-difusión (Cunge, 1969):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (115)$$

donde Q representa el gasto en el cauce; c , la celeridad efectiva de la onda de avenida; D , el coeficiente de difusión efectivo de la avenida; x , la posición a lo largo del cauce; y t , el tiempo. Los parámetros c y D están dados por las siguientes expresiones:

$$c = \frac{Q_0(d\bar{K}/dh)_0}{B_0K_0} \quad (116)$$

$$D = \frac{\bar{K}_0^2}{2B_0Q_0} \quad (117)$$

donde Q_0 representa el gasto asociado con un estado de flujo de referencia (normalmente flujo uniforme); B_0 , el ancho de superficie libre asociado con el mismo estado; \bar{K}_0 , la capacidad de conducción asociada con el mismo estado; y h , el tirante. Cuando se emplea la fórmula de Manning, la capacidad de conducción se expresa como:

$$\bar{K} = \frac{AR^{2/3}}{n} \quad (118)$$

donde $A = A(h)$ es el área; $R = R(h)$ es el radio hidráulico, y n es el coeficiente de rugosidad de Manning.

Cunge (1969) presentó un análisis del método de Muskingum en el que pretendió demostrar que dicho procedimiento puede considerarse como una aproximación en diferencias finitas de la ecuación de advección-difusión (ecuación 115), siempre y cuando la difusividad numérica se igualara a la difusividad física. El artículo publicado por Cunge se ha convertido en un referente obligado y un gran número de trabajos han partido de los resultados obtenidos por el citado autor. No obstante, es posible demostrar, como se indica a continuación, que el análisis de Cunge es erróneo (véase Aldama y Aguilar, 1998b).

Primeramente se reproducirán las consideraciones de Cunge (1969). En relación con el esquema definido por la ecuación 95, considérense las siguientes expansiones en serie de Taylor:

$$Q_k^{j+1} = Q_k^j + \Delta t(Q_t)_k^j + \frac{\Delta t^2}{2}(Q_{tt})_k^j + \frac{\Delta t^3}{6}(Q_{ttt})_k^j + O(\Delta t^4) \quad (119)$$

$$Q_{k+1}^j = Q_k^j + \Delta x(Q_x)_k^j + \frac{\Delta x^2}{2}(Q_{xx})_k^j + \frac{\Delta x^3}{6}(Q_{xxx})_k^j + O(\Delta x^4) \quad (120)$$

$$Q_{k+1}^{j+1} = Q_k^j + \Delta x(Q_x)_k^j + \Delta t(Q_t)_k^j + \frac{\Delta x^2}{2}(Q_{xx})_k^j + \Delta x \Delta t(Q_{xt})_k^j + \frac{\Delta t^2}{2}(Q_{tt})_k^j + \frac{\Delta x^3}{6}(Q_{xxx})_k^j + \frac{\Delta x^2 \Delta t}{2}(Q_{xxt})_k^j + \frac{\Delta x \Delta t^2}{2}(Q_{xtt})_k^j + \frac{\Delta t^3}{6}(Q_{ttt})_k^j + O(\Delta x^4, \Delta x^3 \Delta t, \Delta x^2 \Delta t^2, \Delta x \Delta t^3, \Delta t^4) \quad (121)$$

En vista de que la ecuación 95 es una aproximación discreta de la ecuación de la onda cinemática (ecuación 96), Cunge propuso emplear la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -c \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (122)$$

Sustituyendo las ecuaciones 119, 120 y 121 en la ecuación 95 y empleando la ecuación 122 se obtiene:

$$(Q_t)_k^j + c(Q_x)_k^j = \left(\frac{1-X}{2}\right) c \Delta x (Q_{xx})_k^j + O(\Delta x^2, \Delta x \Delta t, \Delta t^2, \Delta x^3 / \Delta t, \Delta t^3 / \Delta x) \quad (123)$$

Al observar la forma de la ecuación 123, Cunge postuló que la misma podría considerarse una aproximación de la ecuación de advección-difusión (ecuación 115) si se satisfacía la siguiente relación:

$$D = \left(\frac{1-X}{2}\right) c \Delta x \quad (124)$$

donde D es la difusividad o el coeficiente de difusión. El resultado (ecuación 124) obtenido por Cunge es muy atractivo, ya que, en conjunción con las ecuaciones 116, 117 y 118, y $K = \Delta x/c$ (véase ecuación 94), permite darle base física al método de Muskingum, puesto que sus parámetros quedan expresados en términos de propiedades geométricas e hidráulicas del cauce. Indudablemente esto es muy importante para casos en los que no se cuente con datos para efectuar la calibración de dichos parámetros. No obstante, el análisis de Cunge presenta deficiencias sutiles.

En primer término, no es correcto expandir las variables Q_k^{j+1} , Q_{k+1}^j , y Q_{k+1}^{j+1} en sendas series de Taylor, como se ha hecho en las ecuaciones 119, 120 y 121, ya que las mismas son funciones discretas, para las que el concepto de derivada no existe. En sentido riguroso, para determinar la ecuación diferencial que en realidad se resuelve cuando se aplica el esquema de Muskingum (ecuación 95) debe emplearse el enfoque de la "ecuación modificada" (Warming y Hyett, 1974). Conforme al mismo, es posible suponer la existencia de una función continua $\hat{Q} = \hat{Q}(x,t)$ que satisfaga la ecuación de diferencias (ecuación 95) en forma exacta, esto es:

$$X \frac{\hat{Q}_k^{j+1} - \hat{Q}_k^j}{\Delta t} + (1-X) \frac{\hat{Q}_{k+1}^{j+1} - \hat{Q}_{k+1}^j}{\Delta t} + \frac{c}{2\Delta x} (\hat{Q}_{k+1}^{j+1} - \hat{Q}_k^{j+1} + \hat{Q}_{k+1}^j - \hat{Q}_k^j) = 0 \quad (125)$$

donde $\hat{Q}_k^j = \hat{Q}(k\Delta x, j\Delta t)$. Si adicionalmente se supone que \hat{Q} posee derivadas continuas hasta de tercer grado en x y t (incluyendo las mixtas), puede emplearse el teorema de Taylor (Rosenlicht, 1968) para escribir lo siguiente:

$$\hat{Q}_k^{j+1} = \hat{Q}_k^j + \Delta t \left(\hat{Q}_t \right)_k^j + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\hat{Q}_{tt} \right)_k^j + \frac{\Delta t^3}{6} \left(\hat{Q}_{ttt} \right)_k^{j+\alpha}; \quad 0 < \alpha < 1 \quad (126)$$

$$\hat{Q}_{k+1}^j = \hat{Q}_k^j + \Delta x \left(\hat{Q}_x \right)_k^j + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\hat{Q}_{xx} \right)_k^j + \frac{\Delta x^3}{6} \left(\hat{Q}_{xxx} \right)_{k+\beta}^j; \quad 0 < \beta < 1 \quad (127)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{k+1}^{j+1} &= \hat{Q}_k^j + \Delta x \left(\hat{Q}_x \right)_k^j + \Delta t \left(\hat{Q}_t \right)_k^j \\ &+ \frac{\Delta x^2}{2} \left(\hat{Q}_{xx} \right)_k^j + \Delta x \Delta t \left(\hat{Q}_{xt} \right)_k^j + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\hat{Q}_{tt} \right)_k^j \\ &+ \frac{\Delta x^3}{6} \left(\hat{Q}_{xxx} \right)_{k+\gamma}^{j+\gamma} + \frac{\Delta x^2 \Delta t}{2} \left(\hat{Q}_{xxt} \right)_{k+\gamma}^{j+\gamma} \\ &+ \frac{\Delta x \Delta t^2}{2} \left(\hat{Q}_{xtt} \right)_{k+\gamma}^{j+\gamma} + \frac{\Delta t^3}{6} \left(\hat{Q}_{ttt} \right)_{k+\gamma}^{j+\gamma}; \quad 0 < \gamma < 1 \end{aligned} \quad (128)$$

Sustituyendo las ecuaciones 126, 127 y 128 en la ecuación 125 se llega a:

$$\begin{aligned} \left(\hat{Q}_t \right)_k^j + c \left(\hat{Q}_x \right)_k^j &= -c \frac{\Delta x^2}{2} \left(\hat{Q}_{xx} \right)_k^j - \frac{\Delta t^2}{2} \left(\hat{Q}_{tt} \right)_k^j \\ &+ \left[(1-X)\Delta x + c \frac{\Delta t}{2} \right] \left(\hat{Q}_{xt} \right)_k^j - \left[c \frac{\Delta x^2}{12} + (1-X) \frac{\Delta x^3}{6\Delta t} \right] \left(\hat{Q}_{xxx} \right)_{k+\gamma}^{j+\gamma} \\ &- \left[c \frac{\Delta x^2}{12} - (1-X) \frac{\Delta x^3}{6\Delta t} \right] \left(\hat{Q}_{xxx} \right)_{k+\beta}^j - \left[(1-X) \frac{\Delta t^2}{6} + c \frac{\Delta t^3}{12\Delta x} \right] \left(\hat{Q}_{ttt} \right)_{k+\gamma}^{j+\gamma} \\ &- \left[X \frac{\Delta t^2}{6} - c \frac{\Delta t^3}{12\Delta x} \right] \left(\hat{Q}_{ttt} \right)_k^{j+\alpha} - \left[(1-X) \frac{\Delta x^2}{2} + c \frac{\Delta x \Delta t}{4} \right] \left(\hat{Q}_{xxt} \right)_{k+\gamma}^{j+\gamma} \\ &- \left[(1-X) \frac{\Delta x \Delta t}{2} + c \frac{\Delta t^2}{4} \right] \left(\hat{Q}_{xtt} \right)_{k+\gamma}^{j+\gamma} \end{aligned} \quad (129)$$

Sea ahora, de acuerdo con el resultado (ecuación 124) obtenido por Cunge:

$$X = \frac{1}{2} - \frac{D}{c\Delta x} \quad (130)$$

y supongamos que el número de Courant $C_r = c\Delta t/\Delta x$ es de $O(1)$. Entonces, sustituyendo la ecuación 130 en la ecuación 129 se obtiene:

$$\left(\hat{Q}_t \right)_k^j = -c \left(\hat{Q}_x \right)_k^j - \frac{D}{c} \left(\hat{Q}_{xt} \right)_k^j + O(\Delta x) \quad (131)$$

Usando esta expresión en forma recursiva, mediante un proceso de sustitución iterada, y siguiendo un razonamiento inductivo, se llega finalmente a:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right)_k^j + c \left(\frac{\partial \hat{Q}}{\partial x} \right)_k^j &= D \left(\frac{\partial^2 \hat{Q}}{\partial x^2} \right)_k^j \\ &- c \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{D}{c} \right)^m \left(\frac{\partial^{m+1} \hat{Q}}{\partial x^{m+1}} \right)_k^j + O(\Delta x) \end{aligned} \quad (132)$$

La ecuación 132 representa la ecuación que realmente se resuelve cuando se aplica el esquema de Muskingum (ecuación 95). Como puede observarse, el límite de la ecuación 132 cuando $\Delta x \rightarrow 0$ no es la ecuación de advección-difusión, sino que involucra un número infinito de términos adicionales a la misma. Por tanto, el método de Muskingum no es una aproximación en diferencias finitas de la ecuación de advección-difusión, como Cunge pretendió haber demostrado. En vista de este resultado, los parámetros del método no poseen la base física que sugiere el análisis de Cunge. Esto motivó a Aldama y Aguilar (1998b) a desarrollar un método hidrológico con base física para el tránsito de avenidas en cauces, que se presenta a continuación.

Método hidrológico con base física para el tránsito de avenidas en cauces

Con el objeto de construir un método hidrológico que sí posea base física, conforme a lo propuesto por Aldama y Aguilar (1998b), considérese el siguiente esquema de diferencias finitas, que es consistente con la ecuación de advección-difusión (ecuación 115) y posee un error de truncado de $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$:

$$\begin{aligned} &\frac{\xi}{2} \frac{\bar{Q}_{k-1}^{j+1} - \bar{Q}_{k-1}^j}{\Delta t} + (1-\xi) \frac{\bar{Q}_k^{j+1} - \bar{Q}_k^j}{\Delta t} + \frac{\xi}{2} \frac{\bar{Q}_{k+1}^{j+1} - \bar{Q}_{k+1}^j}{\Delta t} \\ &+ \frac{c}{2} \left(\frac{\bar{Q}_{k+1}^{j+1} - \bar{Q}_{k-1}^{j+1}}{2\Delta x} + \frac{\bar{Q}_{k+1}^j - \bar{Q}_{k-1}^j}{2\Delta x} \right) \\ &= \frac{D}{2} \left(\frac{\bar{Q}_{k+1}^{j+1} - 2\bar{Q}_k^{j+1} + \bar{Q}_{k-1}^{j+1}}{\Delta x^2} + \frac{\bar{Q}_{k+1}^j - 2\bar{Q}_k^j + \bar{Q}_{k-1}^j}{\Delta x^2} \right) \end{aligned} \quad (133)$$

donde $\xi \in [0,1]$ es un factor de peso; y \tilde{Q}_k^i es una aproximación a $Q(k\Delta x, j\Delta t)$, siendo $Q(x,t)$ la solución de la ecuación 115.

En este caso, es conveniente aplicar la ecuación 133 a un tramo de río de longitud $2\Delta x$, y redefinir el gasto de entrada al tramo, \tilde{I}_j , y el de salida \tilde{O}_j , como sigue:

$$\tilde{I}_j = \tilde{Q}_{k-1}^j \quad (134)$$

$$\tilde{O}_j = \tilde{Q}_{k+1}^j \quad (135)$$

Por tanto, para desarrollar una relación que exprese el valor desconocido del gasto de salida, \tilde{O}_{j+1} , en términos de valores conocidos del gasto de entrada, \tilde{I}_j e \tilde{I}_{j+1} , y del gasto de salida, \tilde{O}_j , es necesario eliminar \tilde{Q}_k^{j+1} y \tilde{Q}_k^j de la ecuación 133. Esto sólo puede hacerse mediante la introducción de una condición de frontera en el extremo derecho del dominio de interés, $x = (j+1)\Delta x$. Supóngase que existe una relación tirante-gasto del tipo siguiente en ese sitio:

$$\frac{Q_0 + Q}{Q_r} = \left(\frac{h_0 + h}{h_r} \right)^\alpha \quad (136)$$

donde Q_r y h_r respectivamente representan valores de referencia del gasto y el tirante, y α es una constante. Dado que el punto de partida del análisis que aquí se presenta es la ecuación linealizada de advección-difusión (ecuación 115), en la que solamente aparece como variable dependiente el gasto Q , es necesario determinar una condición de frontera lineal que capture la esencia de la ecuación 136 y que sólo contenga a Q . La ecuación 136 puede ser linealizada alrededor del estado de flujo uniforme "0", obteniéndose el siguiente resultado (en el que se han despreciado términos de orden superior):

$$h = \frac{h_r}{\alpha Q_r} \left(\frac{h_r}{h_0} \right)^{\alpha-1} Q \quad (137)$$

Con el objeto de eliminar h se puede emplear la ecuación de cantidad de movimiento linealizada alrededor del estado "0":

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{2Q_0^2 (dK/dh)_0}{K_0^3} h - \frac{2Q_0}{K_0^2} Q \quad (138)$$

Diferenciando la ecuación 137 con respecto a x y sustituyendo el resultado en la ecuación 138 se llega a:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \beta Q = 0 \quad (139)$$

donde:

$$\beta = \frac{2Q_0}{K_0^2} \left[\frac{Q_0 (dK/dh)_0}{K_0} - \frac{\alpha}{h_r} \left(\frac{h_0}{h_r} \right)^{\alpha-1} Q_r \right] \quad (140)$$

La ecuación 139 representa una condición de frontera lineal de tipo Robin que puede emplearse en el extremo derecho del tramo de cauce de interés. Discretizándola mediante diferencias hacia atrás de $O(\Delta x^2)$ se obtienen las expresiones:

$$\tilde{Q}_k^j = \phi \tilde{Q}_{k+1}^j + \frac{1}{4} \tilde{Q}_{k-1}^j \quad (141)$$

$$\tilde{Q}_k^{j+1} = \phi \tilde{Q}_{k+1}^{j+1} + \frac{1}{4} \tilde{Q}_{k-1}^{j+1} \quad (142)$$

donde:

$$\phi = \left(\frac{3}{4} - \frac{\beta \Delta x}{2} \right) \quad (143)$$

Sustituyendo las ecuaciones 141 y 142 en la ecuación 133 y empleando las ecuaciones 134 y 135 resulta en:

$$\tilde{O}_{j+1} = \tilde{C}_0 \tilde{I}_{j+1} + \tilde{C}_1 \tilde{I}_j + \tilde{C}_2 \tilde{O}_j \quad (144)$$

donde:

$$\tilde{C}_0 = \frac{-(1+\xi) + C_r(1+P_g^{-1})}{4(1-\xi)\phi + 2\xi + C_r[1-2P_g^{-1}(1-2\phi)]} \quad (145)$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{1+\xi + C_r(1+P_g^{-1})}{4(1-\xi)\phi + 2\xi + C_r[1-2P_g^{-1}(1-2\phi)]} \quad (146)$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{4(1-\xi)\phi + 2\xi - C_r[1-2P_g^{-1}(1-2\phi)]}{4(1-\xi)\phi + 2\xi + C_r[1-2P_g^{-1}(1-2\phi)]} \quad (147)$$

donde, como antes, $C_r \equiv c\Delta t/\Delta x$ es el número de Courant; y $P_g \equiv c\Delta x/D$, el número de Pécléct de la malla. Como puede observarse, la ecuación 144 tiene una estructura algebraica idéntica a la ecuación de tránsito de Muskingum (ecuación 71). En este caso también

puede argumentarse que, por continuidad, $\tilde{C}_0 + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 = 1$. Es fácil demostrar que lo anterior implica que $\phi = 3/4$, resultado que al ser sustituido en las ecuaciones 145, 146 y 147 produce las siguientes expresiones:

$$\tilde{C}_0 = \frac{-(1+\xi) + C_r(1+P_g^{-1})}{3-\xi + C_r(1+P_g^{-1})} \quad (148)$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{1+\xi + C_r(1+P_g^{-1})}{3-\xi + C_r(1+P_g^{-1})} \quad (149)$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{3-\xi - C_r(1+P_g^{-1})}{3-\xi + C_r(1+P_g^{-1})} \quad (150)$$

Cuando se cuenta con los datos necesarios, los coeficientes, \tilde{C}_0 , \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 pueden ser determinados por calibración, empleando un registro de gastos de ingreso y egreso correspondientes al tránsito de una avenida en un tramo de cauce. Una vez que dichos coeficientes de tránsito hayan sido determinados, las ecuaciones 148, 149 y 150 pueden ser utilizadas para calcular C_r y P_g . Despejando a $C_r(1+P_g^{-1})$ de cada una de dichas expresiones se obtiene:

$$C_r(1+P_g^{-1}) = \xi - \frac{1+3\tilde{C}_0}{\tilde{C}_0-1} \quad (151)$$

$$C_r(1+P_g^{-1}) = \frac{\tilde{C}_1+1}{\tilde{C}_1-1}\xi + \frac{1-3\tilde{C}_1}{\tilde{C}_1-1} \quad (152)$$

$$C_r(1+P_g^{-1}) = \frac{\tilde{C}_1+1}{\tilde{C}_1-1}\xi + \frac{1-3\tilde{C}_1}{\tilde{C}_1-1} \quad (153)$$

Evidentemente, las ecuaciones 151, 152 y 153 son incompatibles a menos que se cumplan las siguientes igualdades:

$$\xi - \frac{1+3\tilde{C}_0}{\tilde{C}_0-1} = \frac{\tilde{C}_1+1}{\tilde{C}_1-1}\xi + \frac{1-3\tilde{C}_1}{\tilde{C}_1-1} = \frac{\tilde{C}_1+1}{\tilde{C}_1-1}\xi + \frac{1-3\tilde{C}_1}{\tilde{C}_1-1} \quad (154)$$

De la primera igualdad en la ecuación 154 se obtiene:

$$\xi = \frac{1+\tilde{C}_0 - 2\tilde{C}_1}{\tilde{C}_0-1} \quad (155)$$

Al sustituir la ecuación 155 en la segunda igualdad de la ecuación 154 se obtiene simplemente la condi-

ción de continuidad $\tilde{C}_0 + \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 = 1$. Al sustituir la ecuación 155 en cualquiera de las ecuaciones 151 a 153 se obtiene:

$$C_r(1+P_g^{-1}) = \frac{2(\tilde{C}_0 + \tilde{C}_1)}{1-\tilde{C}_0} \quad (156)$$

Dado que las ecuaciones de tránsito (71 y 144) poseen una estructura algebraica idéntica, los coeficientes \tilde{C}_0 , \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 deben satisfacer las mismas condiciones de estabilidad y factibilidad física que los coeficientes C_0 , C_1 y C_2 . Entonces, de acuerdo con las ecuaciones 100, 103, 108, 111 y 114, dichas condiciones adoptan la forma:

$$0 \leq \tilde{C}_0 \leq 1 \quad (157)$$

$$0 \leq \tilde{C}_1 \leq 1 \quad (158)$$

$$0 \leq \tilde{C}_2 \leq 1 \quad (159)$$

Se puede demostrar que las condiciones 157, 158 y 159 se reducen a las siguientes desigualdades:

$$\xi \leq 1 \quad (160)$$

$$1 + \xi \leq C_r(1+P_g^{-1}) \leq 3 - \xi \quad (161)$$

La estimación de los coeficientes de tránsito \tilde{C}_0 , \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 puede hacerse mediante el método de Gill, descrito anteriormente. A pesar de que en el contexto del método propuesto no se introduce una relación explícita almacenamiento-gasto, es posible estimar valores virtuales de K y X a través de expresiones similares a las dadas por la ecuación 82. Al aplicar el método de Gill, debe seleccionarse un valor para el intervalo de tiempo Δt , y estimar los valores correspondientes de \tilde{C}_0 , \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 mediante el uso de expresiones análogas a las ecuaciones 72, 73 y 74. Entonces, debe verificarse el cumplimiento de las condiciones 157, 158 y 159. En caso de que éstas no se satisfagan, debe modificarse el valor de Δt hasta que se alcance su cumplimiento. Una vez que se conocen los valores de \tilde{C}_0 , \tilde{C}_1 y \tilde{C}_2 , es posible determinar las características hidráulicas y geométricas del cauce a través de la ecuación 156, por el procedimiento que se describe a continuación.

A fin de simplificar la determinación de los parámetros que caracterizan el tramo de cauce bajo estudio se propone modelarlo como un cauce ancho equivalente. Empleando las ecuaciones 116 a 118 se obtienen las siguientes expresiones para el número de Courant y el número de Péclet de la malla:

$$C_r = \frac{5 Q_o \Delta t}{3 B_o h_o \Delta x} \quad (162)$$

$$P_g = \frac{10 Q_o^2 n^2}{3 B_o^2 h_o^{13/3}} \Delta x \quad (163)$$

donde B_o representa el ancho del cauce. Ahora bien, Q_o y B_o pueden ser eliminados de las ecuaciones 162 y 163 mediante el uso de la fórmula de Manning:

$$Q_o = \frac{B_o h_o^{5/3} S_o^{1/2}}{n} \quad (164)$$

donde S_o representa la pendiente de referencia. Al sustituir la ecuación 164 en las ecuaciones 162 y 163, y emplear las expresiones resultantes en la ecuación 156, se obtiene la siguiente expresión:

$$h_o^{5/3} + \frac{10}{3} \Delta x S_o h_o^{2/3} - n S_o^{1/2} \frac{(\bar{C}_o + \bar{C}_1) \Delta x^2}{1 - \bar{C}_o} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} = 0 \quad (165)$$

La pendiente S_o se puede igualar a la pendiente media del tramo de cauce bajo estudio, la cual se puede estimar fácilmente al conocer el desnivel entre las secciones de entrada y salida, así como la longitud del tramo, $2\Delta x$. Asimismo, es sencillo estimar el valor del coeficiente de rugosidad, n , mediante una visita de campo. Por lo anterior, la ecuación 165 representa una ecuación no lineal en h_o , la cual se puede resolver iterativamente. El gasto de referencia Q_o se puede tomar como el valor medio de los gastos del hidrograma de ingreso al tramo de cauce. Por tanto, el ancho B_o se puede determinar de la ecuación 164.

Una vez estimados n , S_o y B_o , el método propuesto también puede ser empleado para fines de pronóstico, esto es, de tránsito de una avenida distinta a la usada para la calibración de \bar{C}_o , \bar{C}_1 y \bar{C}_2 . En efecto, los valores de n , S_o y B_o se consideran fijos y el valor de Q_o se determina como la media de los gastos de ingreso correspondientes al hidrograma por transitar. Esto permite calcular un nuevo valor de h_o a través de la ecuación 164, y de C_r y P_g mediante las ecuaciones 162 y 163. Dichos valores se emplean entonces para modificar \bar{C}_o , \bar{C}_1 y \bar{C}_2 por medio de las ecuaciones 148, 149 y 150. En otras palabras, la base física del método propuesto permite modificar los valores de los coeficientes de tránsito para fines de pronóstico.

Ahora bien, el método también puede emplearse cuando no se cuenta con datos para efectuar una calibración de \bar{C}_o , \bar{C}_1 y \bar{C}_2 , ya que los valores de C_r y P_g se pueden estimar a partir de características geométricas e hidráulicas gruesas del cauce. En ese caso, el

valor de ξ se puede elegir arbitrariamente, siempre y cuando se satisfaga la ecuación 160 (por simplicidad, $\xi = 0$ podría ser empleado). Por otra parte, el valor de Δt se puede elegir de modo que se satisfaga la ecuación 161.

Con el objeto de probar e ilustrar la aplicación del método propuesto para tránsito hidrológico de avenidas en cauces, el hidrograma empleado en Aldama (1990) fue transitado a través de un canal con longitud de 10,000 m; pendiente de fondo de 0.0001; coeficiente de rugosidad de Manning de 0.08; y con sección trapecial, con taludes iguales de 2 y ancho del fondo igual de 100 m. Para el efecto, se utilizó un esquema numérico que resuelve las ecuaciones de Saint-Venant (Aldama, 1991). Esto permitió la generación de un registro sintético de gastos de ingreso y egreso, que fue empleado para calibrar el método de Muskingum tradicional y el método propuesto mediante la aplicación del método de Gill, respetando las condiciones de estabilidad y realizabilidad física (ecuaciones 157 a 159). En vista de que el método propuesto se fundamenta en la ecuación de advección-difusión (en los resultados que se presentan a continuación) a ese método se le denomina "adectivo-difusivo". Los resultados de la calibración se muestran en la ilustración 26. Como puede observarse, ambas calibraciones son idénticas, dado que las ecuaciones de tránsito coinciden para el método de Muskingum tradicional y el método adectivo-difusivo propuesto. Comúnmente en situaciones de diseño es necesario transitar avenidas mucho mayores que las empleadas para calibración a fin de determinar una avenida de diseño. Por esta razón, el hidrograma de ingreso mostrado en la ilustración 26 se

Ilustración 26. Calibración del método de Muskingum y del método adectivo-difusivo (A-D).

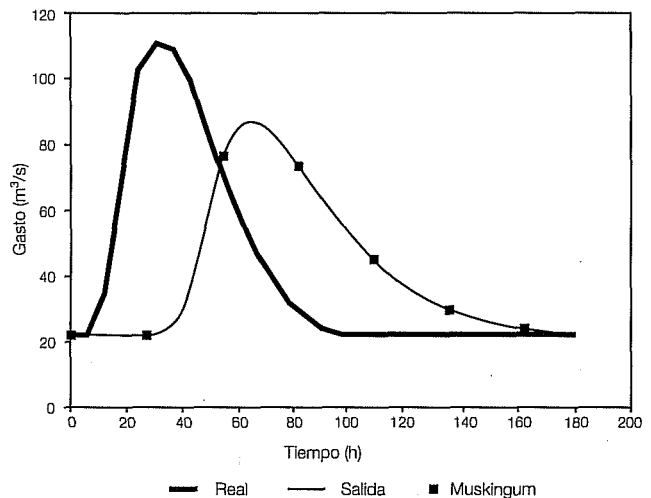
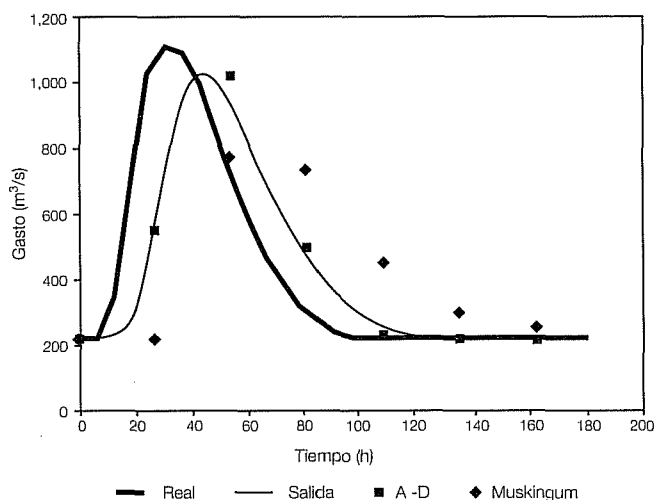


Ilustración 27. Pronóstico de avenida con los métodos de Muskingum y advectivo-difusivo (A-D).



multiplicó por un factor de 10 y se transitó empleando el esquema numérico descrito en Aldama (1991). Esto generó una solución "verdadera" del problema. Cuando el mismo hidrograma se transitó empleando los procedimientos de Muskingum y advectivo-difusivo (con la modificación de los coeficientes de tránsito para el segundo), se obtuvieron los resultados mostrados en la ilustración 27. Como puede observarse, el método advectivo-difusivo produjo excelentes resultados, especialmente en términos del pronóstico del gasto pico y del tiempo al pico, mientras que el método de Muskingum subestima considerablemente el gasto pico y sobrestima el tiempo al pico.

Hidrología de redes de ríos

Estimación de avenidas de diseño en redes de ríos

La morfología fluvial en las zonas de planicie frecuentemente exhibe topología compleja, desplegada en la forma de redes de múltiples ramas (véase por ejemplo ilustración 7). Además, es usual que las estaciones hidrométricas no se localicen en las partes bajas de las cuencas, dado que ahí no existen las constricciones topográficas naturales que permitirían su instalación. Por tanto, la información de gastos escurridos en zonas de planicie prácticamente no existe. No obstante, comúnmente se requiere diseñar y construir obras de control de inundaciones en dichas zonas, tales como bordos, canalizaciones y rectificaciones. Por tal motivo, surge la necesidad de estimar las avenidas de diseño de tales obras. La información hidrométrica normalmente está disponible en estaciones de aforo localiza-

das en las partes medias y altas de las cuencas, usualmente en afluentes del cauce principal. No es trivial combinar dicha información para producir una avenida de diseño con un periodo de retorno especificado para un sitio localizado en la parte baja de una cuenca. Aldama *et al.* (1998) han resuelto este problema. A continuación se presentan sus resultados principales.

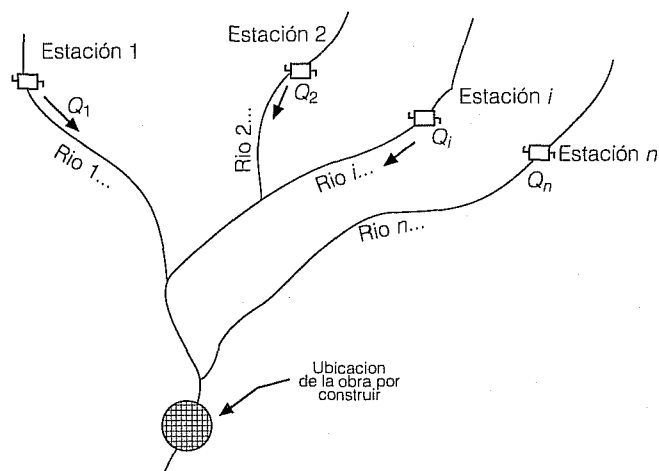
Considérese un área localizada en la parte baja de una cuenca donde se desea construir una obra de control de inundaciones, como se muestra en la ilustración 28. Supóngase que no existe un registro de gastos máximos anuales en ese sitio, pero sí en las estaciones de aforo 1, 2, 3, ..., n localizadas en las partes media y alta de la cuenca. Para fines de diseño, se requiere determinar una avenida asociada con un periodo de retorno en el sitio por proteger. Por tanto, es necesario caracterizar la ocurrencia de dicha creciente en términos de la información disponible en las estaciones hidrométricas.

Supóngase que se conoce la función de distribución de probabilidad multivariada conjunta de los gastos máximos anuales que ocurren en las estaciones de aforo, definida como la probabilidad conjunta de no excedencia de los mismos:

$$F_{1,2,\dots,n}(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^n q_k \leq Q_k\right) \quad (166)$$

donde q_k representa una variable aleatoria muda correspondiente al gasto que escurre por la estación k , y Q_k un valor arbitrario de ese gasto. Suponiendo que Q_k sea suficiente para caracterizar la avenida que ocurre en la estación k , el vector $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n)^T$ determina, mediante tránsito, el hidrograma en la zona donde

Ilustración 28. Red hidrográfica con topología compleja.



se pretende construir la obra para protección contra inundaciones.

Por lo anterior, el periodo de retorno de la avenida en el sitio de interés puede definirse como el periodo de retorno conjunto de las avenidas caracterizadas por los componentes de Q , el cual está dado por el recíproco de la probabilidad de excedencia conjunta:

$$T_{1,2,\dots,n} = \frac{1}{P\left(\bigcap_{k=1}^n q_k > Q_k\right)} \quad (167)$$

En vista de la ecuación 167, es necesario expresar la probabilidad de excedencia conjunta en términos de la función de distribución $F_{1,2,\dots,n}(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ y sus distribuciones marginales, las cuales están dadas por la expresión:

$$F_{i_1, i_2, \dots, i_r}(Q_{i_1}, Q_{i_2}, \dots, Q_{i_r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F_{1,2,\dots,n}(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \prod_{j=1}^n dQ_j \quad (168)$$

$j \neq i_s, (s=1,2,\dots,r)$

donde $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$ y $r = 1, 2, \dots, n-1$. Dado que el evento $q_k \leq Q_k$ es el evento complementario de $q_k > Q_k$, se puede demostrar, empleando la fórmula de inclusión-exclusión (Kendall y Stuart, 1973; y Castillo, 1988), que la probabilidad conjunta de excedencia se puede expresar como:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n Q_k\right) = 1 - \sum_{k=1}^n F(Q_k) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < n} F_{i_1, i_2}(Q_{i_1}, Q_{i_2}) - \dots + (-1)^{n+1} F_{1,2,\dots,n}(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) \quad (169)$$

Sustituyendo la ecuación 169 en la ecuación 167 se obtiene la siguiente expresión para el periodo de retorno conjunto:

$$T_{1,2,\dots,n} = [1 - \sum_{k=1}^n F(Q_k) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < n} F_{i_1, i_2}(Q_{i_1}, Q_{i_2}) - \dots + (-1)^{n+1} F_{1,2,\dots,n}(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)]^{-1} \quad (170)$$

La ecuación 170 expresa el periodo de retorno conjunto en términos de la distribución de probabilidad multivariada y las distribuciones marginales que corresponden a ella. Por otra parte, representa una generalización de la ecuación 59 al caso n -dimensional.

Evidentemente, el conocimiento de la distribución $F_{1,2,\dots,n}(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ permite no sólo conocer el periodo de retorno conjunto, sino también los periodos de retorno individuales asociados con los gastos que escurren por cada una de las estaciones de aforo, dado que los mismos están dados por:

$$T_k = \frac{1}{P(q_k > Q_k)} = \frac{1}{1 - F(Q_k)}; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (171)$$

Ahora bien, dado que el registro a emplear para fines de diseño es el de gastos máximos anuales en las estaciones de aforo 1, 2, ..., n , $F_{1,2,\dots,n}(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$ debe ser construida como una función de distribución multivariada de valores extremos.

Sea \tilde{Q}_k el gasto adimensional, apropiadamente normalizado, asociado con la estación de aforo k , definido como:

$$\tilde{Q}_k = \frac{Q_k - u_k}{e_k}; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (172)$$

donde u_k y e_k respectivamente representan parámetros de ubicación y de escalamiento, cuya estimación puede efectuarse empleando los registros de gastos, según se explicará posteriormente.

Sea ahora $\tilde{F}_{1,2,\dots,n}(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \dots, \tilde{Q}_n)$ la distribución multivariada de extremos de los gastos adimensionales y $\tilde{F}_k(\tilde{Q}_k)$, la distribución marginal univariada asociada con la estación k . La distribución $\tilde{F}_{1,2,\dots,n}(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \dots, \tilde{Q}_n)$ debe satisfacer las cotas de Fréchet y las condiciones del postulado de estabilidad (Fréchet, 1927; Galambos, 1978). Entre las distribuciones multivariadas de extremos, solamente el modelo logístico propuesto por Gumbel (1960) ha sido generalizado al caso n -dimensional. Por ese motivo, dicho modelo se empleará a partir de este punto.

El modelo logístico multivariado está dado por:

$$\tilde{F}_{1,2,\dots,n}(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \dots, \tilde{Q}_n) = \exp \left\{ - \left[\sum_{k=1}^n \left[\ln \tilde{F}_k(\tilde{Q}_k) \right]^m \right]^{1/m} \right\} \quad (173)$$

donde $m \in (1, \infty)$ es un parámetro de asociación. El valor $m = 1$ representa el caso de independencia estadística y $m \rightarrow \infty$ representa el caso de total dependencia. Con el objeto de satisfacer las cotas de Fréchet y el postulado de estabilidad, las distribuciones marginales, $\tilde{F}_k(\tilde{Q}_k)$; $k = 1, 2, \dots, n$, deben ser alguna de las asíntotas definidas en Gumbel (1958): tipo I o Gumbel, tipo II o Fréchet, o tipo III o Weibull. Dado que la distri-

bución Gumbel es la más apropiada para la representación de gastos máximos anuales, es la que será utilizada aquí para construir distribuciones marginales. Por tanto, el modelo logístico multivariado adopta la forma:

$$\tilde{F}_{1,2,\dots,n}(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \dots, \tilde{Q}_n) = \exp \left[- \left(\sum_{k=1}^n \exp(-m\tilde{Q}_k) \right)^{1/m} \right] \quad (174)$$

Empleando la ecuación 172 en la ecuación 174, el modelo logístico multivariado con marginales Gumbel, en términos de gastos dimensionales, es:

$$F_{1,2,\dots,n}(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = \exp \left\{ - \left[\sum_{k=1}^n \exp \left(-m \frac{Q_k - U_k}{e_k} \right) \right]^{1/m} \right\} \quad (175)$$

La distribución de probabilidad multivariada construida conforme al modelo logístico (ecuación 174) contiene un solo parámetro, m , mientras que sus marginales $\tilde{F}_k(\tilde{Q}_k) = \exp[-\exp(\tilde{Q}_k)]$; $k = 1, 2, \dots, n$, no contienen ninguno. Dado que todas las distribuciones marginales adimensionales son idénticas, sus medianas, \bar{Q}_k ; $k = 1, 2, \dots, n$, serán iguales, esto es $\bar{Q}_k = \bar{Q} \forall k$. El valor de \bar{Q} se determina haciendo $\exp[-\exp(\bar{Q})] = 1/2$, de donde $\bar{Q} = \ln \ln 2 = 0.366513$. Las medianas de $\tilde{F}_{1,2,\dots,n}(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \dots, \tilde{Q}_n)$ dividen al espacio n -dimensional en 2^n porciones. Empleando las propiedades de las medianas es posible demostrar que las probabilidades conjuntas de no excedencia y de excedencia de las medianas están dadas respectivamente por las siguientes expresiones:

$$P \left(\bigcap_{k=1}^n \hat{q}_k \leq \bar{Q} \right) = 2^{-n^{1/m}} \quad (176)$$

$$P \left(\bigcap_{k=1}^n \hat{q}_k > \bar{Q} \right) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^{-k^{1/m}} \quad (177)$$

Las ecuaciones 176 y 177 permiten derivar fórmulas para los contenidos teóricos de probabilidad para las 2^n porciones en que las medianas dividen al espacio n -dimensional. Por tanto, a partir de los correspondientes contenidos de probabilidad observados en la muestra de datos hidrométricos (normalizados) disponibles, es posible obtener 2^n distintos valores estimados para m . Es posible obtener un solo valor de este

parámetro minimizando la suma de errores de estimación al cuadrado; esto es, resolviendo el problema siguiente:

$$\min_m \sum_{k=1}^{2^n} [C_k - \hat{C}_k(m)]^2 \text{ sujeto a } m \in [1, \infty) \quad (178)$$

donde C_k y $\hat{C}_k(m)$ respectivamente representan los contenidos observado y teórico correspondientes a la k -ésima región del espacio n -dimensional.

Dado que todos los parámetros de la distribución multivariada dimensional son desconocidos cuando se inicia el proceso de su estimación, se puede aplicar el siguiente procedimiento iterativo para determinarlos. Se pueden estimar valores iniciales de los parámetros de ubicación y escala de la distribución $F_{1,2,\dots,n}(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$, dada por la ecuación 175, ajustando en forma independiente los datos hidrométricos correspondientes a cada afluente del cauce principal de la red de ríos en estudio, a una distribución Gumbel univariada (que a su vez constituiría la marginal de la distribución multivariada). Con estos valores, los gastos pueden ser normalizados y procederse a la estimación del parámetro de asociación m , según se explicó anteriormente. Con ese valor de m pueden estimarse de nuevo los valores de los parámetros de ubicación y escala, sólo que ahora empleando los datos hidrométricos en forma conjunta. Esto permite estimar un nuevo valor para m . El procedimiento se repite hasta que el valor de m no varíe más allá de una tolerancia especificada en dos pasos sucesivos. Para la estimación de los parámetros de ubicación y escala puede emplearse el método de máxima verosimilitud (Kite, 1988).

Como ilustración de la aplicación de la teoría presentada en este apartado, a continuación se considera la estimación de la avenida de diseño de dos bordos, denominados 1 y 2, ubicados en la cuenca baja del río Papaloapan (véase ilustración 29), para un periodo de retorno de cien años. Dado que el escurrimiento a través del río Tonto está controlado por la presa Presidente Alemán, el problema se puede reducir a un caso trivariado. Para transitar las avenidas ocurridas en las estaciones 1, Tuxtepec, 2, Azueta, y 3, Cuatotolapan, se empleó un modelo hidráulico que toma en cuenta el efecto de las llanuras de inundación. Los datos registrados en las estaciones citadas fueron ajustados a una distribución trivariada logística con marginales Gumbel. Empleando los datos disponibles en las estaciones 1, 2 y 3 para el periodo 1948-1992. Se aplicó el procedimiento descrito anteriormente.

Se obtuvieron los siguientes resultados después de seis iteraciones: $u_1 = 5457.73 \text{ m}^3/\text{s}$, $e_1 = 1871.25 \text{ m}^3/\text{s}$, u_2

= 1789.28 m³/s, e₂ = 770.14 m³/s, u₃ = 669.49 m³/s, e₃ = 1427.93 m³/s y m = 1.8334.

En el caso trivariado, la ecuación 170 para el periodo de retorno conjunto adopta la forma:

$$T_{1,2,3} = \left[1 - F_1(Q_1) - F_2(Q_2) - F_3(Q_3) + F_{1,2}(Q_1, Q_2) + F_{2,3}(Q_2, Q_3) + F_{3,1}(Q_3, Q_1) - F_{1,2,3}(Q_1, Q_2, Q_3) \right]^{-1} \quad (179)$$

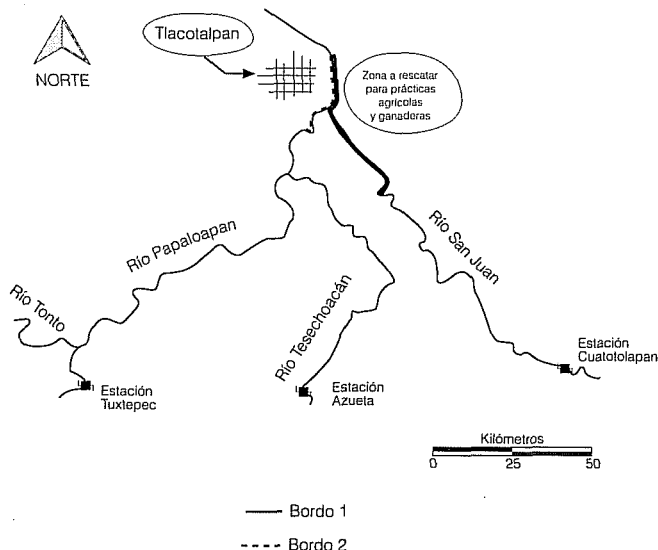
En forma similar a lo planteado en la sección relativa a estimación de avenidas de diseño de presas, existe una infinidad de ternas de valores (Q₁, Q₂, Q₃) que satisfacen la ecuación 179 para T_{1,2,3} = años, cada una produciendo diferentes efectos sobre los bordos 1 y 2 mostrados en la ilustración 29. Para determinar las ternas más desfavorables para cada bordo, se resolvieron los siguientes problemas de optimización no lineal:

$$\max_{(Q_1, Q_2, Q_3)} \Phi_i = \int_{L_i} h_{\max}(s; Q_1, Q_2, Q_3) ds; \quad (180)$$

i = 1, 2, sujeto a T_{1,2,3} = 100 años

donde L_i representa la longitud de desarrollo del bordo i; h_{máx}, la envolvente de tirantes producidos por las avenidas caracterizadas por la terna (Q₁, Q₂, Q₃), al ser transitadas por el bordo el cauce en la zona protegida por el mismo bordo; y s, longitud de arco medida a lo largo del bordo. Para el bordo 1 se obtuvieron los si-

Ilustración 29. Bordos de protección contra inundaciones en la cuenca baja del río Papaloapan.

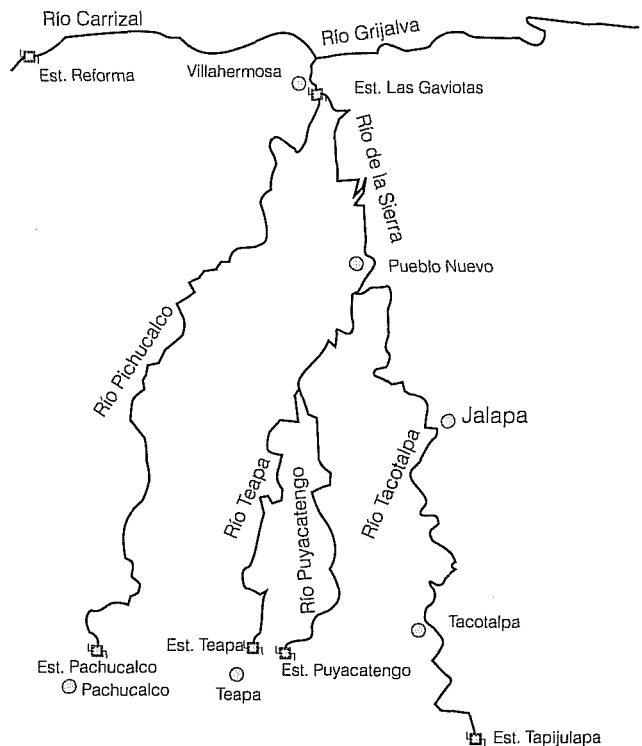


guientes resultados para los gastos de diseño y periodos de retorno asociados con cada una de las estaciones de medición: Q₁ = 11,500 m³/s, T₁ = 26 años, Q₂ = 3,500 m³/s, T₂ = 10 años, Q₃ = 6,908 m³/s, T₃ = 80 años. Para el bordo 2, los resultados fueron Q₁ = 13,000 m³/s, T₁ = 57 años, Q₂ = 4,000 m³/s, T₂ = 20 años, Q₃ = 6,236 m³/s, T₃ = 50 años. Como puede observarse, los eventos de diseño correspondientes a cada bordo no son iguales, ya que se ha seleccionado la combinación de avenidas más desfavorable para cada uno de ellos.

Tránsito de avenidas en redes de ríos con lagunas de inundación

La complejidad característica de las redes hidrográficas en las zonas bajas de las cuencas se manifiesta frecuentemente a través de topologías que involucran cauces principales a los cuales inciden múltiples tributarios, y de los cuales también pueden salir efluentes, formando redes de ríos como se muestra en las ilustraciones 7 y 30 (Grijalva). Este arreglo geomorfológico incluye zonas inundables que pueden formarse como lagunas laterales y lagunas de interconexión. Las primeras aparecen cuando los cauces en cuyas márgenes

Ilustración 30. Vista parcial de la red hidrográfica del río Grijalva.



nes existen bermas naturales o bordos artificiales vier-ten lateralmente. Las segundas surgen cuando las confluencias de ríos se desbordan en época de avenidas. La presencia de lagunas de interconexión complica la simulación numérica del tránsito de avenidas en redes de ríos. En particular, la interacción de los diferentes tramos de la red con dichas lagunas origina que la longitud de los cauces que inciden o salen de ellas varíe con el tiempo, incrementándose cuando se llenan las lagunas o decrementándose cuando se vacían. Aldama y Aparicio (1994) y Aparicio *et al.* (1999) han propuesto un procedimiento para simular el tránsito de avenidas en redes de cauces que interactúan con lagunas de interconexión mediante el uso de una transformación de coordenadas en las ecuaciones de movimiento, a fin de capturar en forma apropiada el efecto de llenado y vaciado de las lagunas. El procedimiento mencionado también involucra el uso de un algoritmo numérico muy eficiente para la solución del sistema algebraico que se genera al discretizar las ecuaciones que gobiernan el fenómeno. El desarrollo del método propuesto por los citados autores se explica a continuación.

En principio, para simular el flujo en llanuras de inundación es posible emplear modelos bidimensionales. No obstante, esto incrementa notablemente la dimensionalidad del problema computacional. Por este motivo, Aldama y Aparicio (1994) y Aparicio *et al.* (1999) han empleado un modelo unidimensional para simular el flujo en los tramos de cauce que componen la red hidrográfica, acoplado a un modelo cero-dimensional, basado en la ecuación de continuidad, para simular el vaciado y llenado de las lagunas laterales y las lagunas de interconexión.

Las ecuaciones que rigen el escurrimiento transitorio unidimensional a superficie libre en un cauce son la ecuación de continuidad y la ecuación de cantidad de movimiento, que respectivamente pueden ser escritas como sigue (Aldama, 1991):

$$B \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial UA}{\partial x} = q \quad (181)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + gn^2 \frac{U|U|}{R^{4/3}} = 0 \quad (182)$$

donde B representa el ancho de la superficie libre; H , la elevación de la superficie libre; U , la velocidad; A , el área hidráulica; q , el gasto lateral por unidad de longitud perpendicular a la dirección de la corriente; g , la aceleración de la gravedad; n , el factor de rugosidad de Manning; R , el radio hidráulico; x , la coordenada espacial a lo largo del eje del cauce, y t , el tiempo.

La interacción de los tramos de cauce con lagunas laterales se puede modelar a través de una ley de vector de cresta libre, que involucra coeficientes de descarga apropiados (Aparicio *et al.*, 1999) para la determinación del gasto lateral q . Por otra parte, la interacción de los ríos de la red con las lagunas de interconexión se puede modelar por medio de la siguiente expresión del principio de conservación de masa:

$$\frac{dV}{dt} + \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (183)$$

donde V representa el volumen de una laguna de interconexión; S , la superficie de sus fronteras y $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$ un elemento diferencial de gasto (que resulta negativo si es de ingreso y positivo si es de egreso). La ecuación 183 se puede escribir en términos de la elevación de la superficie libre de la laguna, η , empleando la correspondiente curva elevaciones-capacidades. En efecto, dicha curva puede expresarse como $V = V(\eta)$, por lo que $dV/dt = (dV/d\eta)d\eta/dt$, de donde la ecuación 183 puede escribirse como:

$$\left(\frac{dV}{d\eta} \right) \frac{d\eta}{dt} + \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (184)$$

Por otro lado, el área superficial de la laguna se determina por medio de la curva elevaciones-áreas, y sus límites, empleando las curvas de nivel de la zona donde se ubique. Esto permite conocer la evolución temporal de la cobertura superficial de la laguna a medida que ésta se llena o se vacía.

El llenado de una laguna de interconexión implica la expansión de su cobertura superficial, por lo que la longitud de los cauces que inciden o salen de ella tiende a disminuir. Por el contrario, el vaciado de una laguna de interconexión implica la contracción de su cobertura superficial, con el consecuente incremento de la longitud de los cauces conectados a ella. Considérese un tramo de cauce limitado por dos lagunas de interconexión en sus extremos, como se muestra en la ilustración 31. Denótese con $x_f = x_f(t)$ la coordenada del frente del cauce y con $x_r = x_r(t)$ la coordenada de su retaguardia. La designación de los extremos de un cauce como "frente" y "retaguardia" es arbitraria, si bien es conveniente suponer que la dirección preferencial del flujo durante la avenida será de la retaguardia hacia al frente del cauce. La dependencia de x_f y x_r con respecto al tiempo se determina a partir de la evolución de la cobertura superficial de las lagunas ubicadas en el frente y en la retaguardia del cauce.

Los métodos numéricos convencionales, basados en el empleo de mallas espaciales fijas para la discretización de las ecuaciones de movimiento, no pueden manejar en forma precisa problemas en los que el dominio de flujo es variable, como es el caso del cauce mostrado en la ilustración 31. Por lo anterior, Aldama y Aparicio (1994) y Aparicio *et al.* (1999) han propuesto emplear la siguiente transformación de coordenadas en las ecuaciones de movimiento (ecuaciones 181 y 182):

$$\xi = \frac{x - x_r(t)}{x_f(t) - x_r(t)} \quad (185)$$

$$\tau = t \quad (186)$$

Al sustituir las ecuaciones 185 y 186 en las ecuaciones 181 y 182 se obtiene:

$$B(x_f - x_r) \frac{\partial H}{\partial \tau} - B\xi \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{dx_f}{dt} - B(1-\xi) \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{dx_r}{dt} + \frac{\partial UA}{\partial \xi} = q(x_f - x_r) \quad (187)$$

$$(x_f - x_r) \frac{\partial U}{\partial \tau} - \xi \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{dx_f}{dt} - (1-\xi) \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{dx_r}{dt} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} + g \frac{\partial H}{\partial \xi} + g(x_f - x_r) n^2 \frac{U|U|}{R^{4/3}} = 0 \quad (188)$$

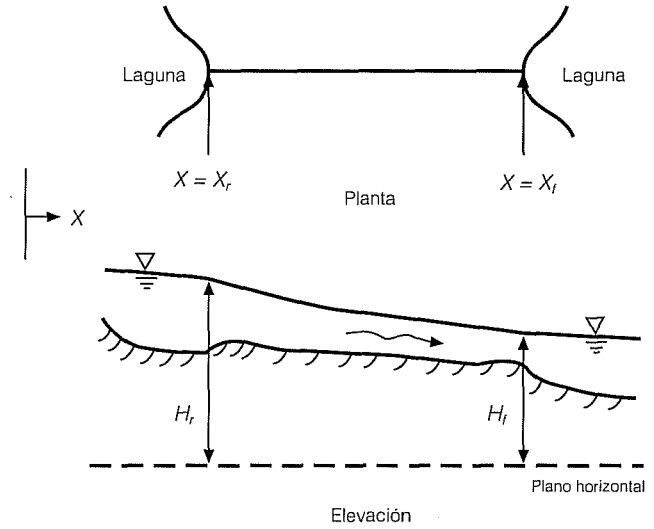
Evidentemente, la ecuación 185 permite transformar el dominio físico variable $x \in [x_r(t), x_f(t)]$ en un dominio computacional fijo $\xi \in [0, 1]$. Entonces, es posible emplear una malla de tamaño constante $\Delta\xi$ para discretizar las ecuaciones 187 y 188. Esto equivale a emplear una malla adaptiva en el dominio físico, cuyos elementos modifican su tamaño de acuerdo con las expansiones o contracciones que sufre la longitud del cauce. Lo anterior permite simular con precisión el efecto que la variabilidad temporal del dominio físico tiene sobre la dinámica del flujo a lo largo del cauce.

Ahora bien, sean H_f y H_r respectivamente las elevaciones de la superficie libre del agua en las lagunas de interconexión ubicadas en el frente y la retaguardia del tramo de cauce mostrado en la ilustración 31. Evidentemente, $x_f = x_f(H_f)$ y $x_r = x_r(H_r)$, de donde:

$$\frac{dx_f}{dt} = \frac{dx_f}{dH_f} \frac{dH_f}{dt} \quad (189)$$

$$\frac{dx_r}{dt} = \frac{dx_r}{dH_r} \frac{dH_r}{dt} \quad (190)$$

Ilustración 31. Cauce ubicado entre llanuras de interconexión.



Sustituyendo las ecuaciones 189 y 190 en las ecuaciones 187 y 188, y empleando un esquema de discretización al tresbolillo similar al empleado por Aldama (1991) en el resultado, se obtienen las siguientes ecuaciones en diferencias finitas:

$$B_j^k \frac{H_{j+1}^{k+1} - H_j^k}{\Delta\tau} - B_j^k \xi_j \frac{H_{j+1}^k - H_{j-1}^k}{2\Delta\xi} \left(\frac{dx_f}{dH_f} \right)^k \frac{H_f^{k+1} - H_f^k}{\Delta\tau} - B_j^k (1-\xi_j) \frac{H_{j+1}^k - H_{j-1}^k}{2\Delta\xi} \left(\frac{dx_r}{dH_r} \right)^k \frac{H_r^{k+1} - H_r^k}{\Delta\tau} + \frac{U_{j+1/2}^{k+1} A_{j+1/2}^k - U_{j-1/2}^{k+1} A_{j-1/2}^k}{\Delta\xi} = q_j^{k+1} (x_f^k - x_r^k) \quad (191)$$

$$\frac{U_{j+1/2}^{k+1} - U_{j+1/2}^k}{\Delta\tau} - \xi_{j+1/2} \frac{U_{j+3/2}^k - U_{j-1/2}^k}{2\Delta\xi} \left(\frac{dx_f}{dH_f} \right)^k \frac{H_f^{k+1} - H_f^k}{\Delta\tau} - (1-\xi_{j+1/2}) \frac{U_{j+3/2}^k - U_{j-1/2}^k}{2\Delta\xi} \left(\frac{dx_r}{dH_r} \right)^k \frac{H_r^{k+1} - H_r^k}{\Delta\tau} + U_{j+1/2}^{k+1} \frac{U_{j+3/2}^k - U_{j-1/2}^k}{2\Delta\xi} + g \frac{H_{j+1}^{k+1} - H_j^{k+1}}{\Delta\xi} + gn^2 \frac{|U_{j+1/2}^k|}{(R_{j+1/2}^k)^{4/3}} U_{j+1/2}^{k+1} = 0 \quad (192)$$

donde H_j^k y $U_{j+1/2}^k$ respectivamente representan aproximaciones a $H(j\Delta\xi, k\Delta\tau)$ y $U[(j+1/2)\Delta\xi, k\Delta\tau]$; $\Delta\xi$, incremento espacial; $\Delta\tau$, incremento temporal; y $\xi_j = j\Delta\xi$. Las

ecuaciones 191 y 192 representan aproximaciones de $O(\Delta\xi^2, \Delta\tau)$ y son respectivamente válidas para $j = 1, 2, \dots, N$ y $j = 1, 2, \dots, N-1$, suponiendo que el tramo de cauce en estudio se subdivide en $N + 1$ tramos de longitud $\Delta\xi$ (véase ilustración 32). Como puede observarse, en las ecuaciones 191 y 192 se ha empleado una discretización temporal implícita, debido a que los esquemas implícitos poseen mejores propiedades de estabilidad que los explícitos, lo cual permite emplear intervalos mucho mayores de integración en el tiempo, con el consecuente ahorro de trabajo computacional.

Evidentemente, la ecuación 192 es aplicable cuando el subíndice j se sustituye por $j-1$, resultando en una ecuación de diferencias para $U_{j-1/2}^{k+1}$. Resolviendo la ecuación resultante para $U_{j-1/2}^{k+1}$, la ecuación 192 para $U_{j+1/2}^k$ y sustituyendo las expresiones resultantes en la ecuación 191 es posible demostrar que se obtiene un sistema de ecuaciones en el vector de incógnitas $\mathbf{H}^{k+1} \equiv (H_1^{k+1}, H_2^{k+1}, \dots, H_N^{k+1})^T$ de la forma siguiente:

$$\mathbf{A}^k \mathbf{H}^{k+1} = \mathbf{b}^k + \mathbf{c}^k H_r^{k+1} + \mathbf{d}^k H_f^{k+1} \quad (193)$$

donde \mathbf{A}^k es una matriz tridiagonal de orden N y \mathbf{b}^k , \mathbf{c}^k y \mathbf{d}^k son vectores de orden N . Tanto \mathbf{A}^k como \mathbf{b}^k , \mathbf{c}^k y \mathbf{d}^k dependen exclusivamente de información correspondiente al instante k . Como puede observarse, en el término independiente del sistema (ecuación 193) aparecen H_r^{k+1} y H_f^{k+1} (que desde el punto de vista del tramo de cauce en estudio equivalen, respectivamente, a H_0^{k+1} y H_{N+1}^{k+1} (véase ilustración 32), que también son incógnitas, lo cual destruye la estructura tridiagonal de dicho sistema.

Adicionalmente, es necesario deducir una forma discreta apropiada de la ecuación de continuidad (ecuación 184) para las lagunas de interconexión que están en la retaguardia y el frente del tramo de cauce de interés. Con tal propósito, es conveniente modificar la discretización de la ecuación de continuidad (ecuación 187) para los puntos $\xi = 0$ (retaguardia) y $\xi = 1$ (frente). Lo anterior obedece a la conveniencia de definir la elevación del agua y su velocidad coincidiendo en esos puntos. Con ese propósito, considérense las siguientes aproximaciones de $O(\Delta\xi^2)$ (véase Aldama, 1991):

$$\left(\frac{\partial UA}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = \frac{-8(UA)_{\xi=0} + 9(UA)_{\xi=\Delta\xi/2} - (UA)_{\xi=3\Delta\xi/2}}{3\Delta\xi} + O(\Delta\xi^2) \quad (194)$$

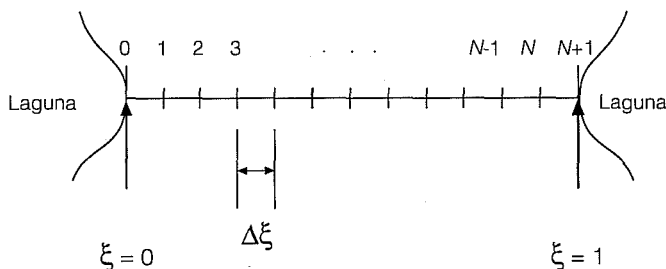
$$\left(\frac{\partial UA}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} = \frac{8(UA)_{\xi=1} - 9(UA)_{\xi=1-\Delta\xi/2} + (UA)_{\xi=1-3\Delta\xi/2}}{3\Delta\xi} + O(\Delta\xi^2) \quad (195)$$

Empleando expresiones del tipo de las ecuaciones 194 y 195, y aproximaciones en diferencias hacia delante y hacia atrás de $O(\Delta\xi^2)$ para $\partial H/\partial \xi$ en la ecuación de continuidad (ecuación 191), se obtienen las siguientes ecuaciones discretas de continuidad para los puntos $\xi = 0$ y $\xi = 1$, respectivamente:

$$\begin{aligned} & B_0^k \frac{H_0^{k+1} - H_0^k}{\Delta\tau} \\ & - B_0^k \frac{-3H_0^k + 4H_1^k - H_2^k}{2\Delta\xi} \left(\frac{dx_r}{dH_r} \right)^k \frac{H_r^{k+1} - H_r^k}{\Delta\tau} \\ & + \frac{-8U_0^{k+1}A_0^k + 9U_{1/2}^{k+1}A_{1/2}^k - U_{3/2}^{k+1}A_{3/2}^k}{3\Delta\xi} \\ & = q_0^{k+1}(x_f^k - x_r^k) \end{aligned} \quad (196)$$

$$\begin{aligned} & B_{N+1}^k \frac{H_{N+1}^{k+1} - H_{N+1}^k}{\Delta\tau} \\ & - B_{N+1}^k \frac{3H_{N+1}^k - 4H_N^k - H_{N-1}^k}{2\Delta\xi} \left(\frac{dx_f}{dH_f} \right)^k \frac{H_f^{k+1} - H_f^k}{\Delta\tau} \\ & + \frac{8U_{N+1}^{k+1}A_{N+1}^k - 9U_{N+1/2}^{k+1}A_{N+1/2}^k + U_{N-1/2}^{k+1}A_{N-1/2}^k}{3\Delta\xi} \\ & = q_0^{k+1}(x_f^k - x_r^k) \end{aligned} \quad (197)$$

Ilustración 32. Sistema coordinado transformado y discretización longitudinal del cauce.



Evidentemente $H_0^{k+1} = H_r^{k+1}$ y $H_{N+1}^{k+1} = H_f^{k+1}$. Adicionalmente, conforme a la ecuación 192, $U_{j-1/2}^{k+1}$ puede ser expresada como una combinación lineal de H_j^{k+1} y H_{j+1}^{k+1} . Por tanto, $U_0^{k+1}A_0^k$ puede ser despejada de la ecuación 196 y $U_{N+1}^{k+1}A_{N+1}^k$, de la ecuación 197, produciendo expresiones del tipo siguiente:

$$U_0^{k+1} A_0^k = \alpha_0^k H_r^{k+1} + \beta_0^k H_1^{k+1} + \gamma_0^k H_2^{k+1} + \delta_0^k \quad (198)$$

$$U_{N+1}^{k+1} A_{N+1}^k = \alpha_{N+1}^k H_f^{k+1} + \beta_{N+1}^k H_N^{k+1} + \gamma_{N+1}^k H_{N-1}^{k+1} + \delta_{N+1}^k \quad (199)$$

donde $\alpha_0^k, \beta_0^k, \gamma_0^k, \delta_0^k, \alpha_{N+1}^k, \beta_{N+1}^k, \gamma_{N+1}^k$ y δ_{N+1}^k son coeficientes que sólo dependen de información definida en el instante k .

Sea η_m^{k+1} la elevación de la superficie libre del agua en la laguna de interconexión m , correspondiente al instante $k + 1$. Entonces, la ecuación de continuidad (ecuación 184) para esa laguna se puede discretizar implícitamente como sigue:

$$\left(\frac{dV_m}{d\eta_m} \right)^k \frac{\eta_m^{k+1} - \eta_m^k}{\Delta\tau} = \sum_{F=1}^{F_T} \left(U_{N+1}^{k+1} A_{N+1}^k \right)_F - \sum_{R=1}^{R_T} \left(U_0^{k+1} A_0^k \right)_R \quad (200)$$

donde los subíndices F y R respectivamente denotan el F -ésimo tramo de cauce cuyo frente incide en la laguna y el R -ésimo tramo de cauce cuya retaguardia sale de la laguna. Consecuentemente, F_T y R_T respectivamente representan el número total de tramos que llegan y que salen de la laguna. Evidentemente, bajo la hipótesis de que la superficie libre de la laguna se mantiene horizontal:

$$\eta_m^{k+1} = \left(H_f^{k+1} \right)_F = \left(H_r^k \right)_R ; \quad (201)$$

para $F = 1, 2, \dots, F_T$ y $R = 1, 2, \dots, R_T$

Sustituyendo las ecuaciones 198, 199 y 201 en la ecuación 200 se obtiene una ecuación del tipo siguiente:

$$\zeta_m^k \eta_m^{k+1} = \sum_{F=1}^{F_T} \left(\beta_{N+1}^k H_N^{k+1} + \gamma_{N+1}^k H_{N-1}^{k+1} \right)_F - \sum_{R=1}^{R_T} \left(\beta_0^k H_1^{k+1} + \gamma_0^k H_2^{k+1} \right)_R + \theta_m^k \quad (202)$$

donde ζ_m^k y θ_m^k son coeficientes que dependen exclusivamente de información definida en el instante k .

El escurrimiento en la red completa de cauces se simula resolviendo simultáneamente ecuaciones del tipo 193 para cada uno de los tramos que integran la red, así como ecuaciones del tipo 202 para cada una de

las lagunas de interconexión. Evidentemente, el sistema de ecuaciones es poroso, pero no posee una estructura bandeada. Con el objeto de construir un algoritmo eficiente de solución del sistema, a continuación se presenta la técnica propuesta por Aldama y Aparicio (1994) y Aparicio *et al.* (1999).

Considérese primeramente la ecuación 193. El vector de elevaciones en el tramo de cauce puede ser expresado como sigue:

$$H^{k+1} = H_h^{k+1} + H_r^{k+1} G_r^{k+1} + H_f^{k+1} G_f^{k+1} \quad (203)$$

donde $H_h^{k+1} \equiv (H_{h,1}^{k+1}, H_{h,2}^{k+1}, \dots, H_{h,N}^{k+1})^T$ representa la solución "homogénea" del sistema (ecuación 193), que satisfaca la ecuación:

$$A^k H_h^{k+1} = b^k \quad (204)$$

Por otra parte, $G_r^{k+1} \equiv (G_{r,1}^{k+1}, G_{r,2}^{k+1}, \dots, G_{r,N}^{k+1})^T$ y $G_f^{k+1} \equiv (G_{f,1}^{k+1}, G_{f,2}^{k+1}, \dots, G_{f,N}^{k+1})^T$ respectivamente representan "funciones de Green numéricas" asociadas con la retaguardia y el frente del tramo de cauce, y que satisfacen las siguientes formas no homogéneas de la ecuación 193:

$$A^k G_r^{k+1} = c^k \quad (205)$$

$$A^k G_f^{k+1} = d^k \quad (206)$$

Desde el punto de vista físico, H_h^{k+1} representa la respuesta del tramo de cauce a una situación en la que las elevaciones de la superficie libre del agua en su frente y retaguardia son nulas. Por otra parte, G_r^{k+1} representa la respuesta del tramo de cauce a una situación en la que los valores de las elevaciones en el instante anterior son nulos, la elevación de la superficie libre del agua en la retaguardia es unitaria y la correspondiente al frente es nula. Finalmente, G_f^{k+1} representa la respuesta del tramo de cauce a una situación en la que los valores de las elevaciones en el instante anterior son nulos, la elevación de la superficie libre del agua en el frente es unitaria y la correspondiente a la retaguardia es nula.

De acuerdo con las ecuaciones 204, 205 y 206, la obtención de H_h^{k+1} , G_r^{k+1} y G_f^{k+1} puede realizarse de manera muy eficiente, ya que ello implica solamente solucionar tres sistemas tridiagonales de orden N . Por otra parte, conforme a la ecuación 203, la ecuación 202 puede ser escrita como sigue:

$$\zeta_m^k \eta_m^{k+1} = \sum_{F=1}^{F_T} \left[\beta_{N+1}^k (H_{h,N}^{k+1} + G_{r,N}^{k+1} H_r^{k+1} + G_{f,N}^{k+1} H_f^{k+1}) + \gamma_{N+1}^k (H_{h,N-1}^{k+1} + G_{r,N-1}^{k+1} H_r^{k+1} + G_{f,N-1}^{k+1} H_f^{k+1}) \right]_F - \sum_{R=1}^{R_T} \left[\beta_0^k (H_{h,1}^{k+1} + G_{r,1}^{k+1} H_r^{k+1} + G_{f,1}^{k+1} H_f^{k+1}) \right]_{R=1} + \gamma_0^k (H_{h,2}^{k+1} + G_{r,2}^{k+1} H_r^{k+1} + G_{f,2}^{k+1} H_f^{k+1}) \Big]_R + \theta_m^k \quad (207)$$

Ahora bien, sea $\mathbf{e}^{k+1} \equiv (\eta_1^{k+1}, \eta_2^{k+1}, \dots, \eta_m^{k+1})^T$ el vector de elevaciones de la superficie libre del agua en las lagunas de interconexión, donde M representa el número total de lagunas. Entonces, aplicando la ecuación 201 a cada una de las lagunas, la ecuación 207 puede ser escrita en la forma siguiente:

$$\mathbf{K}^k \mathbf{e}^{k+1} = \mathbf{f}^k \quad (208)$$

donde \mathbf{K}^k y \mathbf{f}^k respectivamente son una matriz cuadrada y un vector, ambos de orden M y con elementos que dependen exclusivamente de información definida en el instante k .

Las ventajas computacionales del enfoque descrito se vuelven ahora evidentes. Supóngase que existen P tramos de cauce en la red y, por facilidad en la argumentación, que todos ellos se subdividen en N intervalos espaciales. Recordando que M representa el número

de lagunas de interconexión, la solución simultánea de P sistemas del tipo de la ecuación 193 y de M ecuaciones del tipo 202, implica resolver un sistema de ecuaciones no bandedado de orden $NP + M$ en cada intervalo de tiempo, lo cual requiere realizar un número de operaciones de $O(NP + M)^3$ si se empleara un método directo de solución (Dalhquist y Björck, 1974). El algoritmo de las funciones de Green numéricas antes presentado implica resolver los tres sistemas de tridiagonales de orden N (ecuaciones 204 a 206) en cada tramo de la red y un sistema de orden M , en cada intervalo de tiempo. Esto requeriría realizar un número de operaciones de $O(NP + M^3)$ (Dalhquist y Björck, 1974) que es mucho menor que $O(NP + M)^3$.

El modelo descrito ha sido empleado para simular la inundación que ocurrió en mayo de 1970 en la cuenca baja del río Grijalva, cuya hidrografía se muestra en la ilustración 30. En la ilustración 33 se muestra una comparación entre el hidrograma registrado en la estación hidrométrica Las Gaviotas y el calculado con el modelo. Como puede observarse, la correspondencia entre ambos es muy satisfactoria. La evolución de las zonas inundables se muestra en las ilustraciones 34 a 38.

Ilustración 34. Evolución de las zonas inundables en la cuenca del río Grijalva. Condiciones iniciales.

Ilustración 33. Hidrogramas registrado y calculado en la estación Las Gaviotas.

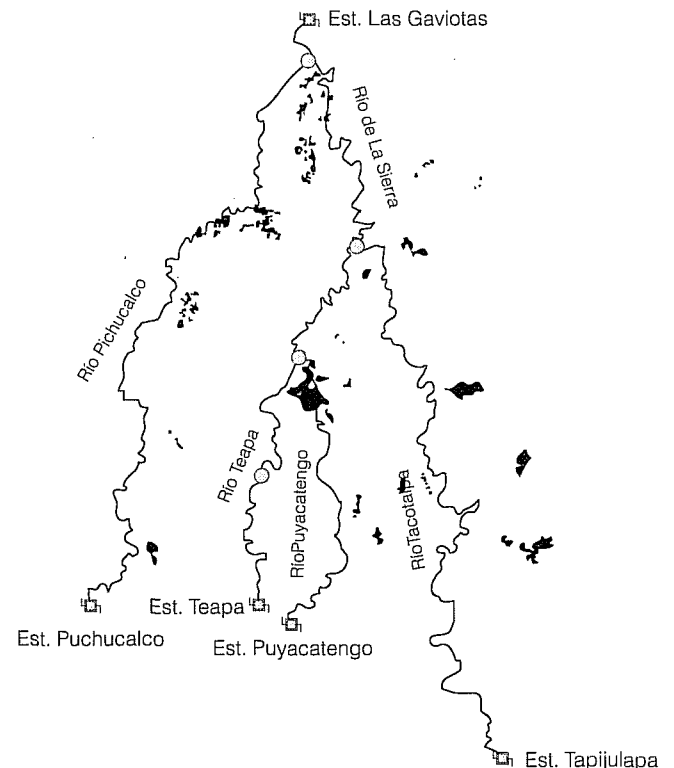
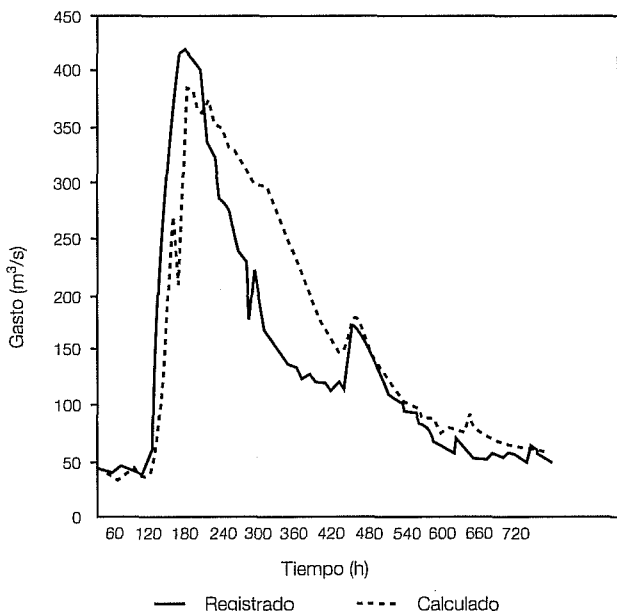


Ilustración 35. Evolución de las zonas inundables en la cuenca del río Grijalva. Tiempo = 126 horas.

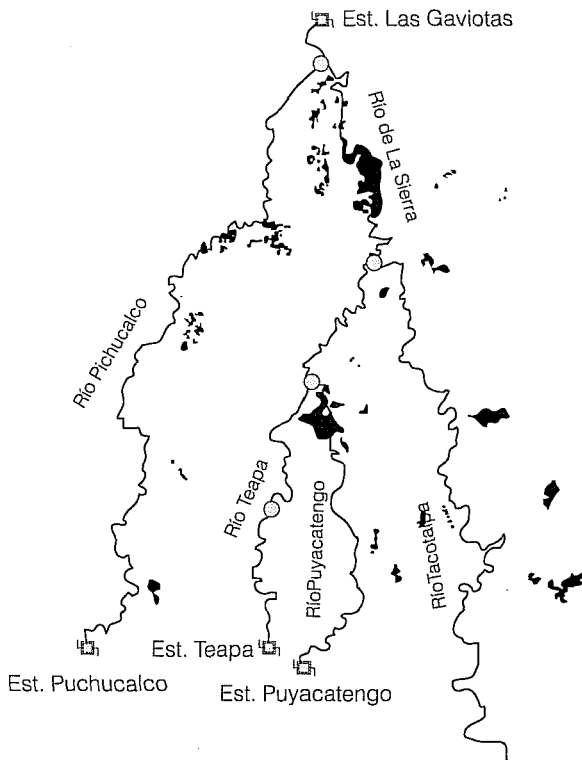
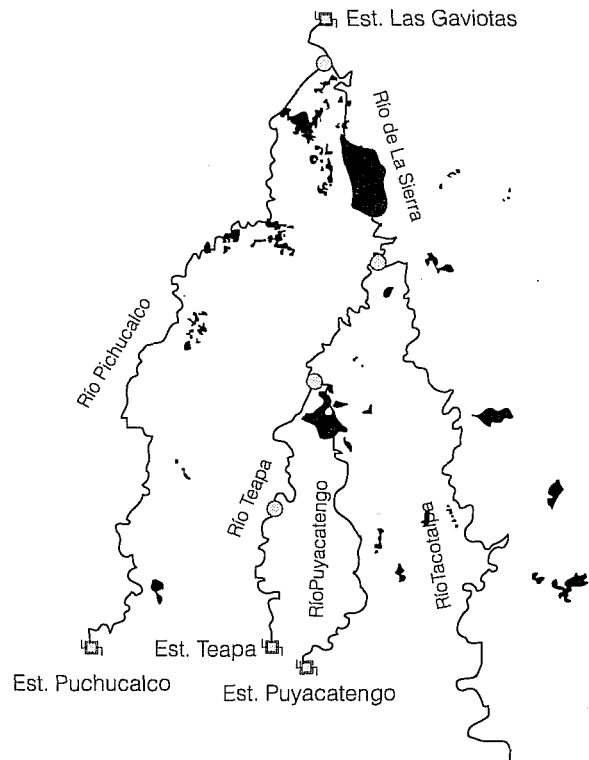


Ilustración 36. Evolución de las zonas inundables en la cuenca del río Grijalva. Tiempo = 204 horas.



Conclusiones

Se han presentado diversos métodos desarrollados por el autor y sus colaboradores en el tema de hidrología de avenidas. En particular, se ha mostrado un método de tránsito inverso de avenidas para la estimación de hidrogramas de ingreso a vasos, que no propaga errores en el tiempo. También se ha demostrado la independencia funcional de los principales parámetros que caracterizan una avenida: gasto pico, tiempo pico y volumen. Esto permite emplear esa terna en una descripción probabilista multivariada de un hidrograma de diseño. Se ha desarrollado una solución analítica del problema de tránsito de avenidas en vasos, lo que ha permitido realizar un análisis de la sensibilidad que exhibe la respuesta de los vasos de almacenamiento a variaciones en los parámetros que caracterizan hidrogramas de ingreso. Con base en este análisis se ha concluido que la respuesta de los vasos es igualmente sensible a variaciones en el gasto pico y el volumen, siendo en cambio prácticamente insensible a variaciones en el tiempo pico. Esto permite simplificar la caracterización probabilista de hidrogramas de diseño, haciendo posible el uso de distribuciones bivariadas de extremos en las que las variables aleatorias son el

gasto pico y el volumen. Por medio del uso de estas distribuciones se ha desarrollado una metodología que emplea el concepto de periodo de retorno conjunto. Así, el problema de determinar la avenida de diseño de una presa se plantea como un problema de optimización no lineal, en el que se maximiza el efecto de una avenida (caracterizada por su gasto pico y su volumen con un periodo de retorno predeterminado).

Por otra parte, se comparan diversos métodos de mínimos cuadrados para la estimación de los parámetros del método de Muskingum para el tránsito hidrológico de avenidas en cauces. También se establecen las propiedades de estabilidad y factibilidad física del método de Muskingum y se demuestra que este método no es una aproximación discreta de la ecuación de advección-difusión. Posteriormente se procede a presentar un método para el tránsito hidrológico de avenidas en cauces con base física. Por medio de ejemplos numéricos se demuestra la bondad del método para fines de pronóstico.

Finalmente, se aborda el tema de hidrología de redes de ríos. Se considera primeramente el problema de diseñar obras para control de avenidas en redes de ríos cuando se carece de información hidrométrica en el sitio en el que se construirá la obra y sólo se cuenta

Ilustración 37. Evolución de las zonas inundables en la cuenca del río Grijalva. Tiempo = 306 horas.

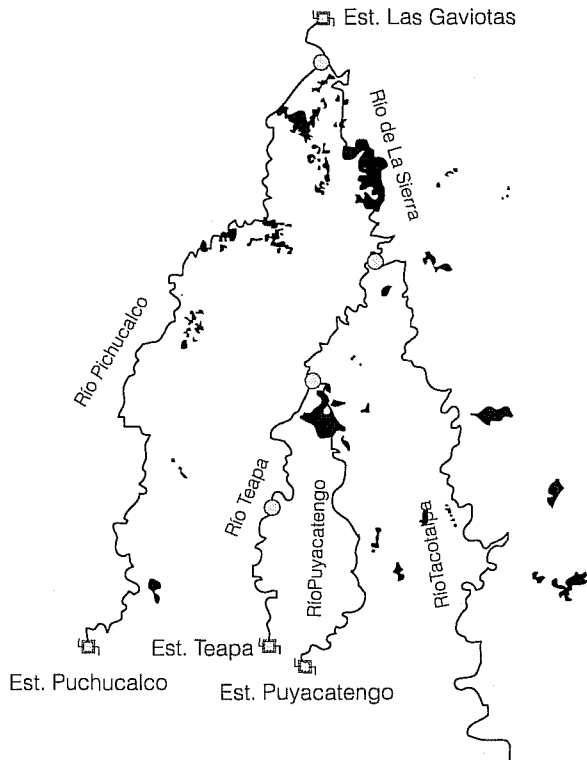
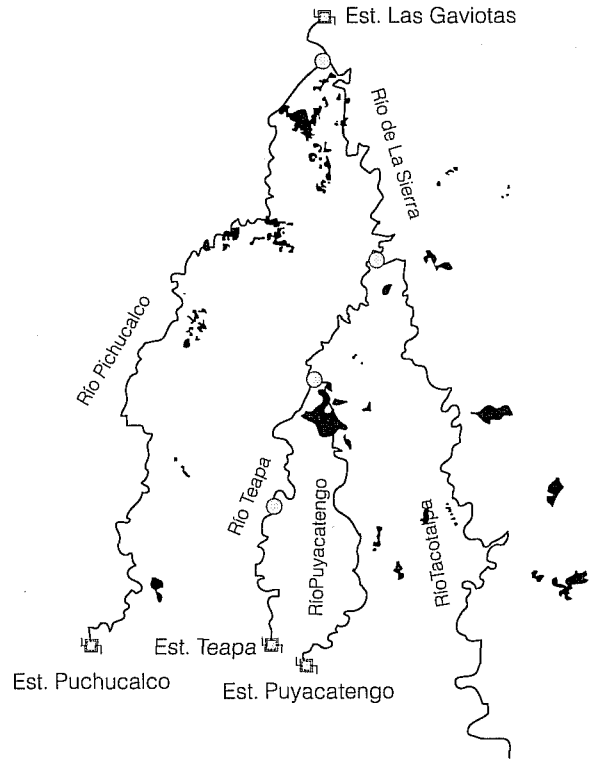


Ilustración 38. Evolución de las zonas inundables en la cuenca del río Grijalva. Tiempo = 738 horas.



con datos de gastos máximos en sitios ubicados aguas arriba. Por medio del uso de distribuciones de probabilidad multivariadas de valores extremos se determina la avenida de diseño con un periodo de retorno prescrito mediante una metodología similar a la empleada para estimar avenidas de diseño de presas. Para el caso del tránsito hidráulico de avenidas en redes de ríos con lagunas de interconexión, se desarrolla una metodología basada en el uso de una transformación de coordenadas que permite simular con precisión el efecto que tiene el vaciado y llenado de las lagunas sobre los cauces de la red. Asimismo, se propone un algoritmo altamente eficiente para resolver el sistema de ecuaciones resultante, que emplea el concepto de funciones de Green numéricas.

Agradecimientos

Los trabajos aquí presentados se han desarrollado con la valiosa colaboración de los doctores Javier Aparicio y Aldo I. Ramírez, así como del maestro en ingeniería Ernesto Aguilar, del Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, y del maestro en ingeniería Horacio Rubio, de la Comisión Nacional del Agua. A lo largo de los años, el autor ha colaborado también en el tema de hidrología de avenidas con el profesor James Smith, el doctor Wei-Hao Chung y los ingenieros André Dieffenthaler y William Smith, de la Universidad de Princeton, con el doctor Jaime Collado y el ingeniero Alfredo Ocón, del Instituto

Mexicano de Tecnología del Agua, y con el maestro en ciencias Carlos Espinosa, así como con el maestro en ingeniería José Luis Acosta, de la Comisión Nacional del Agua. A todos ellos les hago patente mi amplio reconocimiento. También expreso mi agradecimiento al maestro en administración Francisco Salinas, por su asistencia en la preparación de este documento.

Un hombre sin familia es un hombre sin amor. Un hombre sin patria es un hombre sin honor. Un hombre sin escuela y sin maestros, es un hombre sin principios. Un hombre sin amigos es un hombre sin lealtad. Finalmente, un hombre sin Dios es un hombre sin esperanza.

Es por ello que expreso mi más profundo agradecimiento a mi esposa Elizabeth, mis hijos David y Abraham y a mi madre Gloria, quienes me han brindado su cariño y apoyo, y han tolerado mis malos ratos, que no han sido pocos, y mis limitaciones, que son muchas. Estoy muy orgulloso de ser mexicano y de esforzarme por contribuir al desarrollo de la gran nación que es México. Doy gracias a mis dos escuelas: la UNAM y el MIT, y a mis dos principales maestros: Enzo Levi, quien me enseñó el amor a la investigación, y Donald Harleman, quien me enseñó las minucias del oficio de la investigación. Agradezco a mis amigos y colaboradores su compañerismo. Finalmente, pero también primordialmente, agradezco a mi Señor, mi Dios y mi todo: a Ab El Shaddai, Yesua Ha'Mashiach, Ruach Ha'Kodesh, a Quien siempre dará la gloria, el honor y la magnificencia, y Quien, a propósito de las inundaciones que tenemos que sortear en la vida, ha dejado el siguiente mensaje de esperanza a quienes atienden Su llamado, creen en Él y Le entregan su vida: "Así dice Jehová, Creador tuyo... y Formador tuyo... No temas, porque Yo te redimí; te puse nombre, Mío eres tú. Cuando pases por las aguas, Yo estaré contigo; y si por los ríos, no te anegarán". (Isaías 43:1,2).

Referencias

- Aldama, A., "Modificación al método de Muskingum", *Memorias del VI Congreso Nacional de Hidráulica*, Mérida, 1980.
- Aldama, A., "Least squares parameter estimation for Muskingum flood routing", *J. Hydraulic Engineering*, vol. 116, 1990, pp. 580-586.
- Aldama, A., "Pumping rate optimization in a storm drainage system through the combined use of numerical simulation and linear programming", *Adv. Water Resources*, vol. 14, 1991, pp. 192-202.
- Aldama, A. y E. Aguilar, "Tránsito inverso para la estimación de avenidas de ingreso a vasos", *Ingeniería Hidráulica en México*, vol. XII, México, 1997, pp. 15-26.
- Aldama, A. y E. Aguilar, "Acerca de las condiciones de estabilidad, realizabilidad física y congruencia del método de Muskingum", *Avances en Hidráulica 1*, Aldama et al., editores IMTA-AMH, Oaxaca, 1998a, pp. 622-630.
- Aldama, A. y E. Aguilar, "A physically-based hydrologic method for flood routing in river channels", *Water Resources Engineering'98*, vol. 2, ASCE, Memphis, 1998b, pp. 1601-1606.
- Aldama, A. y J. Aparicio, "Numerical simulation of flow in river networks with complex topology", *Computational Methods in Water Resources X*, vol. 2, Peters et al., editores, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994, pp. 1131-1138.
- Aldama, A. y A. Ramírez, "Parametrización de hidrogramas mediante interpolantes hermitianos", *Ingeniería Hidráulica en México*, vol. XIII, México, 1998a, pp. 19-28.
- Aldama, A. y A. Ramírez, "Tránsito de avenidas en almacenamientos a través de una solución analítica", *Avances en Hidráulica 1*, Aldama et al., editores, IMTA-AMH, México, 1998b, pp. 565-573.
- Aldama, A. y A. Ramírez, "Hidrología de presas: un enfoque tecnológico en el desarrollo de las presas en México", *Avances en Hidráulica 5*, Arreguín et al. editores, IMTA-AMH, México, 1999a, pp. 117-128.
- Aldama, A. y A. Ramírez, "A new approach for dam design flood estimation" *Memorias*, XXVIII International Association for Hydraulic Research Congress, Graz, Austria, 1999b (Disco compacto).
- Aldama, A., A. Ramírez y J. Aparicio, "Design floods in river networks", *Water Resources Engineering'98*, vol. 2, ASCE, Memphis, 1998, pp. 1607-1612.
- Aparicio, J., "Inundaciones: la otra cara de la moneda", *Tlaloc*, vol. 5, núm. 11, México, 1998, pp. 15-20.
- Aparicio, J., A. Aldama y H. Rubio, "Flood routing in river networks with flooding lagoons", *Memorias*, ASCE 1999 International Water Resources Engineering Conference, Seattle, 1999.
- Bradley, A. y K. Potter, "Flood frequency analysis of simulated flows", *Water Resources Research*, vol. 28, 1992, pp. 2375-2385.
- Castillo, E., *Extreme value theory in engineering*, Academic Press, Boston, 1988.
- Cunge, J., "On the subject of a flood propagation computation method (Muskingum method)", *J. Hydraulic Research*, vol. 7, 1969, pp. 205-230.
- Dahlquist, G. y A. Björck, *Numerical methods*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1974.
- Fréchet, M. "Sur la loi de probabilité de l'ecart maximum", *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, vol. 6, Cracovia, 1927.
- Galambos, J., *The asymptotic theory of extreme order statistics*, John Wiley and Sons, Nueva York, 1978.
- Gill, M., "Routing of floods in river channels", *Nordic Hydrology*, vol. 8, 1977, pp. 163-170.
- Gumbel, E., *Statistics of extremes*, Columbia University Press, Irvington, Nueva York, 1958.
- Gumbel, E., "Distributions de valeurs extremes en plusieurs dimensions", *Publications de L'Institute de Statistique*, vol. 9, París, 1960.
- Gumbel, E. y C. Mustafi, *Some analytical properties of bivariate extremal distributions*, publicación de la American Statistical Association, vol. 62, 1967.
- Heggen, R., "Univariate least squares muskingum flood routing", *Water Resources Bulletin*, vol. 20, 1984, pp. 103-107.
- Horn, D. R., "Graphic estimation of peak flow reduction in reservoirs", *J. Hydraulic Engineering*, vol. 113, 1987, pp. 1441-1450.
- Kendall, M. y A. Stuart, *The advanced theory of statistics*, vol. 2, Inference and Relationship, Griffin & Company, Londres, 1973.
- Kite, G., *Frequency and risk analysis in hydrology*, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, 1988.
- Levi, E., "Sur l'analyse des hydrogrammes", *Comp. Rend. Acad. Sci.*, vol. 256, París, pp. 5176-5178.
- Levi, E. y R. Valdés, "Sur l'analyse des hydrogrammes - 2^{ma} partie", *Comp. Rend. Acad. Sci.*, vol. 258, París, pp. 2637-2640.
- Levi, E. y R. Valdés, "A method for the direct analysis of hydrograms", *J. Hydrology*, vol. 2, pp. 182-190.
- Marengo, H., *Análisis de riesgo de falla en presas de tierra y enrocamiento ante avenidas*, tesis doctoral, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México, 1994.
- Mickens, R., *Difference equations*, Van Nostrand Reinhold Co., Nueva York, 1987.
- Mockus, V., *Use of storm and watershed characteristics in synthetic unit hydrograph analysis and applications*, U. S. Soil Conservation Service, 1957.
- Nayfeh, A., *Introduction to perturbation techniques*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1981.
- O'Donnell, T., "A direct three-parameter Muskingum procedure incorporating lateral inflow", *Hydrological Sciences Journal*, vol. 30, 1985, pp. 479-496.

- Ponce, V., *Engineering Hydrology*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1989.
- Rosenlicht, M., *Introduction to analysis*, Scott, Foresman and Co., Glenview, Illinois, 1968.
- Singh, V., *Kinematic wave modeling in water resources*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1996.
- Smith, G., *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*, Clarendon Press, Oxford, Inglaterra, 1985.
- Snell, J. y M. Sivalpan, "Application of the meta-channel concept: construction of the meta-channel hydraulic geometry for a natural catchment", *Hydrological Processes*, vol. 9, 1995, pp. 485-505.
- Venetis, C., "The IUH of the Muskingum channel reach", *J. Hydrology*, vol. 7, 1969, pp. 444-447.
- Warming, R. y B. Hyett, "The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods", *J. Computational Physics*, vol. 14, 1974, pp. 159-179.

Abstract

Aldama, A., "Flood hydrology", *Hydraulic Engineering in Mexico (in Spanish)*, vol. XVI, num. 3, pp. 5-46 September-December, 2000.

Flood hydrology is a topic of significant relevance nowadays, in view of the damages recently produced by flooding events throughout the world. This paper presents the results of a series of investigations performed by the author and his collaborators on the subject matter. In particular, methods for the estimation of design floods for dams and river networks, for hydrologic flood routing in river channels and for hydraulic flood routing in river networks are discussed.

Keywords: *inverse routing, design flood parameterization, design hydrographs, extreme value multivariate probability distributions, joint return period, Muskingum method, advection-diffusion equation, flood forecast, interconnection lagoons.*

Dirección institucional del autor:

Álvaro A. Aldama
aaldama@tlaloc.imta.mx

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
Paseo Cuauhnáhuac 8532, colonia Progreso
62550 Jiutepec, Morelos
Teléfono (7) 3 19 40 00