

**Análisis hidráulico de un vertedor compuesto
(triangular-rectangular) mediante dinámica de fluidos
computacional (CFD)**

**Hydraulic analysis of a compound weir (triangular-
rectangular) simulated with computational fluid
dynamics (CFD)**

Erick Dante Mattos-Villarroel¹, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5640-5213>

Jorge Flores-Velazquez², ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0895-4645>

Waldo Ojeda-Bustamante³, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7183-9637>

Mauro Iñiguez-Covarrubias⁴

Carlos Díaz-Delgado⁵, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6245-070X>

Humberto Salinas-Tapia⁶, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0075-6997>

¹Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Jiutepec, Morelos, México,
e_mattos_@outlook.com

²Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Jiutepec, Morelos, México,
jorgelv@colpos.mx

³Colegio Mexicano de Ingenieros en Irrigación, México, w.ojeda@riego.mx
Morelos, México

⁴Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, Jiutepec, Morelos, México,
mic@tlaloc.imta.mx

⁵Centro Interamericano de Recursos del Agua, Facultad de Ingeniería,
Universidad Autónoma del Estado de México, Toluca, Estado de México,
México, cdiaz@uaemex.mx

⁶Centro Interamericano de Recursos del Agua, Facultad de Ingeniería,
Universidad Autónoma del Estado de México, Toluca, Estado de México,
México, hsalinas@uaemex.mx

Autor para correspondencia: Jorge Flores-Velazquez, jorgelv@colpos.mx

Resumen

Para hacer una entrega eficiente de agua a usuarios de riego es necesario contar con dispositivos precisos para medir gastos. Entre estos dispositivos están los vertedores triangulares y rectangulares para rangos de flujo entre 30 y 200 l s⁻¹. Sin embargo, la variación de gastos en un año agrícola puede ser un factor de error en la entrega volumétrica, y una posible alternativa de solución es el uso de un vertedor compuesto. El objetivo de este trabajo fue analizar el comportamiento hidráulico de un vertedor triangular-rectangular en función de sus parámetros

geométricos y de flujo, así como obtener una expresión de su coeficiente global de descarga. *ANSYS Fluent* fue usado para simular los caudales del fluido, con el fin de discretizar la dinámica del flujo bajo condiciones específicas. La evaluación del modelo con *ANSYS Fluent*, y su análisis, fue efectuada con base en datos experimentales y la solución analítica correspondiente. Las simulaciones con la dinámica de fluidos computacional (CFD) mostraron concordancia estadística con los datos de laboratorio, encontrándose un error máximo de 0.74 %. Se obtuvo una expresión del coeficiente global de descarga y se logró estimar analíticamente el gasto con un error máximo de 7.8 % con respecto a datos experimentales. Gracias a la simulación con CFD fue posible caracterizar la lámina de descarga y analizar los efectos de la presión y la velocidad sobre el coeficiente de descarga. Los resultados permiten concluir que un vertedor triangular-rectangular satisface ampliamente la precisión requerida en la entrega de agua a usuarios de riego.

Palabras clave: vertedor, simulación numérica, aforo, coeficiente de descarga.

Abstract

To make an efficient delivery of water to irrigation users, it is necessary to have accurate dispositive to measure flow rates. These dispositive include triangular and rectangular weirs for measured flow rates ranges between 30 and 200 l s⁻¹. However, the variation of flows in the execution of an agricultural year can be a factor of error in the volumetric delivery and a possible alternative solution is the use of a compound weir. The aim

of this study was to analyze hydraulic behavior of a triangular-rectangular weir, as a function of geometric and flow parameters and get a new global expression of the discharge coefficient. ANSYS Fluent was used to simulate the flow rates fluid, in order to discretized the dynamics of flow under specific conditions. The evaluation of the model with ANSYS Fluent, and its analysis, was carried out based on experimental data and the corresponding analytical solution. The Computational Fluid Dynamics (CFD) simulations showed statistical agreement with the laboratory data, finding a maximum error of 0.74 %. An expression of the global discharge coefficient was obtained and it was possible to analytically estimate the expenditure with a maximum error of 7.8 % with respect to experimental data. Thanks to the CFD simulation, it was possible to characterize the nappe and to analyze the effects of pressure and velocity on the discharge coefficient. The results allow us to conclude that a triangular-rectangular weir widely satisfies the precision required in the delivery of water to irrigation users.

Keywords: Weir, numerical simulation, gauging, discharge coefficient.

Recibido: 09/01/2020

Aceptado: 27/02/2020

Introducción

Incidir en la conservación y el uso eficiente de los recursos hídricos tiene impacto en la mejora de la gestión del agua. Uno de los componentes del manejo integral del recurso agua (IWRM) es la capacidad de medir con precisión el flujo del agua en puntos específicos en una cuenca en un sistema de distribución, como en la bifurcación de canales, estructura de control y puntos de entrega de agua. Un sistema de medición eficiente del agua permite la contabilidad precisa de su uso y el suministro de agua a tasas óptimas a las áreas de demanda (Clemmens, Wahl, Bos, & Roplog, 2001). Existen diversos tipos de estructuras que pueden usarse para el aforo de caudales: vertedores, aforadores Parshall, compuertas y orificios, entre otras (Skertchly, 1988).

Los vertedores son barreras elevadas localizadas perpendicularmente a la dirección del movimiento del agua con la finalidad de que el líquido se eleve por encima de la obstrucción a través de una abertura de forma regular (Bautista, Robles, Júnez, & Playán, 2013). Los parámetros geométricos que definen el comportamiento hidráulico de vertedores son la longitud de la cresta y la forma de la sección de control de flujo (Emiroglu, Kaya, & Agaccioglu, 2010; USBR, 1997). Los vertedores de pared delgada se estudian utilizando los principios de la física clásica con resultados experimentales para comprender las características del flujo y para determinar el coeficiente de descarga (C_d) bajo diferentes configuraciones; este coeficiente integra

los efectos no considerados en la derivación de las ecuaciones utilizadas para estimar la descarga; tales efectos incluyen viscosidad, capilaridad, tensión superficial, distribución de la velocidad y curvatura aerodinámica atribuible a la contracción del vertedor (Aydin, Altan-Sakarya, & Sisman, 2011; Rady, 2011).

Las especificaciones e instalación de vertedores, con una sola forma geométrica, para la medición del flujo se han documentado por el Instituto de Estándares Británicos (BSI, 1965), la Organización Internacional de Estandarización (ISO, 1980), la Sociedad Americana de Pruebas Materiales (ASTM, 1993) y el United States Bureau of Reclamation (USBR, 1997). En zonas con desnivel, usualmente se recurre al uso de vertedores triangulares cuando se tienen caudales menores a 30 l s^{-1} ; para caudales mayores se usan vertedores rectangulares (Sotelo, 1997).

Shen (1981) describió el procedimiento para el diseño de vertedores triangulares de cresta viva apoyados con resultados experimentales para determinar el coeficiente de descarga reportados en la literatura. El-Alfy (2005) evaluó experimentalmente el efecto de la curvatura de flujo vertical en el coeficiente de descarga (C_d) indicando que es inversamente proporcional al ángulo de la muesca vertedora (θ) y directamente proporcional a la carga relativa (h/P). Bagheri y Heidarpour (2010) obtuvieron una ecuación de coeficiente de descarga para vertedores rectangulares de pared delgada en la parte superior e inferior en los perfiles de la lámina vertiente usando la teoría de vórtice libre. Bautista *et al.* (2013) usaron una técnica fotográfica de flujo lento para caracterizar los perfiles superior e inferior del flujo del calado en un

vertedor triangular. Chen, Fu, Chen y Cui (2018) analizaron los efectos del coeficiente de descarga debido a la variación de la pendiente de la rampa implementada en las caras superior e inferior del flujo en el vertedor rectangular de cresta delgada. Fu, Cui, Dai y Chen (2018) propusieron una ecuación para determinar el coeficiente de descarga en estructuras del tipo vertedor de orificio. Tian, Wang, Bai y Li (2018) investigaron el patrón de flujo y coeficiente de descarga en un vertedor de longitud de cresta finita combinado con paredes paralelas con entradas abocinadas (FGPs) sobre la cresta del vertedor.

Se ha reportado el uso vertedor compuestos, que combinan la forma triangular con la rectangular, para la medición de caudales (Zahiri, Tang, & Azamathulla, 2014). Negm, Al-Brahim y Alhamid (2002) propusieron una estructura compuesta de un vertedor rectangular superior con una compuerta inferior para evitar la acumulación de sedimentos aguas arriba de la estructura. Otro tipo de vertedor compuesto consiste en una muesca rectangular con una muesca triangular en el centro de la cresta rectangular; el vertedor triangular podría medir con precisión el rango normal de caudales menores a 30 l s^{-1} , pero también se pueden medir caudales mayores al operar el vertedor rectangular (USBR, 1997). En canales de riego con variabilidad de descarga es recomendable el uso de vertedores compuestos, para evitar el uso de estructuras separadas, que puedan representar la variabilidad del flujo con mayor precisión; para atender esta necesidad, las estructuras vertedoras descritas en este documento juegan un papel clave en zonas de riego.

Se han usado técnicas de simulación numérica con el propósito de resolver problemas de mecánica de fluidos, en particular con el empleo de herramientas de solución general llamados genéricamente dinámica de fluidos computacional (CFD). Los avances en la capacidad de almacenamiento y procesamiento de las computadoras han permitido que evolucione el proceso de creación y ajuste de un modelo en CFD, y facilite el análisis de resultados en tiempo y costo. En particular, las técnicas CFD resuelven numéricamente las ecuaciones que gobiernan el flujo, como las ecuaciones de Navier-Stokes, y ofrece la posibilidad de evaluar hidráulicamente un vertedor bajo diferentes geometrías y condiciones hidráulicas; una vez validado y evaluado, CFD permite la extracción de información adicional, como fuerzas, campos de velocidades y presiones. Diversos estudios han mostrado las ventajas de las técnicas CFD. Ho Boyes y Donohoo (2001), y Ho, Boyes, Donohoo y Cooper (2003) compararon resultados numéricos de un vertedor de cresta Creager y reportaron resultados muy similares a los estudios experimentales usando modelos físicos. Rady (2011) reportó una desviación máxima de $\pm 3\%$ al comparar el coeficiente de descarga, de un vertedor rectangular de pared delgada, obtenido numéricamente con CFD frente a los calculados con la ecuación general de vertedores. Zuhair y Zubaidy (2013) compararon los resultados de CFD, usando el modelo VOF (volumen de fluido), con los datos experimentales de un prototipo del vertedor Mandali; los resultados indican que el perfil de flujo obtenido con CFD y resultados experimentales con un coeficiente de correlación de Pearson es cercano a 1, por lo que la metodología del CFD constituye una herramienta para la solución de problemas de hidráulica de vertedores.

Una de las dificultades del modelado numérico del flujo sobre vertedores es el seguimiento de la superficie libre. Simulaciones con CFD pueden ser una excelente opción para modelar vertedores y simulación numérica de flujos y seguimiento detallado de la superficie libre. Para analizar este problema se ha reportado el uso de CFD, en particular la plataforma computacional *ANSYS-FLUENT*, conocida por su capacidad de realizar el seguimiento preciso de la superficie libre usando el método volumen de fluido (VOF) (Duró, Dios, López, Liscia, & Angulo, 2012).

El objetivo de este trabajo fue (1) construir y evaluar un modelo un modelo numérico de un vertedor compuesto usando dinámica de fluidos computacional (CFD) y (2) proponer una ecuación de coeficiente de descarga global para un vertedor compuesto (triangular-rectangular). La simulación numérica del vertedor compuesto facilitará la comprensión de su comportamiento hidráulico, el cual depende de sus características geométricas, condiciones hidráulicas y el coeficiente de descarga estimado.

Materiales y métodos

Descripción del modelo prototipo

Los datos experimentales y el modelo prototipo usado los reportó Sotelo (1997) para vertedor rectangular y triangular de pared delgada, y Jan, Chang y Lee (2006) para el vertedor compuesto. La Figura 1 muestra las características geométricas del vertedor rectangular y triangular; ambos vertedores son independientes en un canal con una carga hidráulica de 0.27 m para el vertedor triangular y 0.50 m para el triangular. Ambos vertederos son de cresta delgada para la operación; para la simulación se utilizó el valor estándar de la pared (Skertchly, 1988).

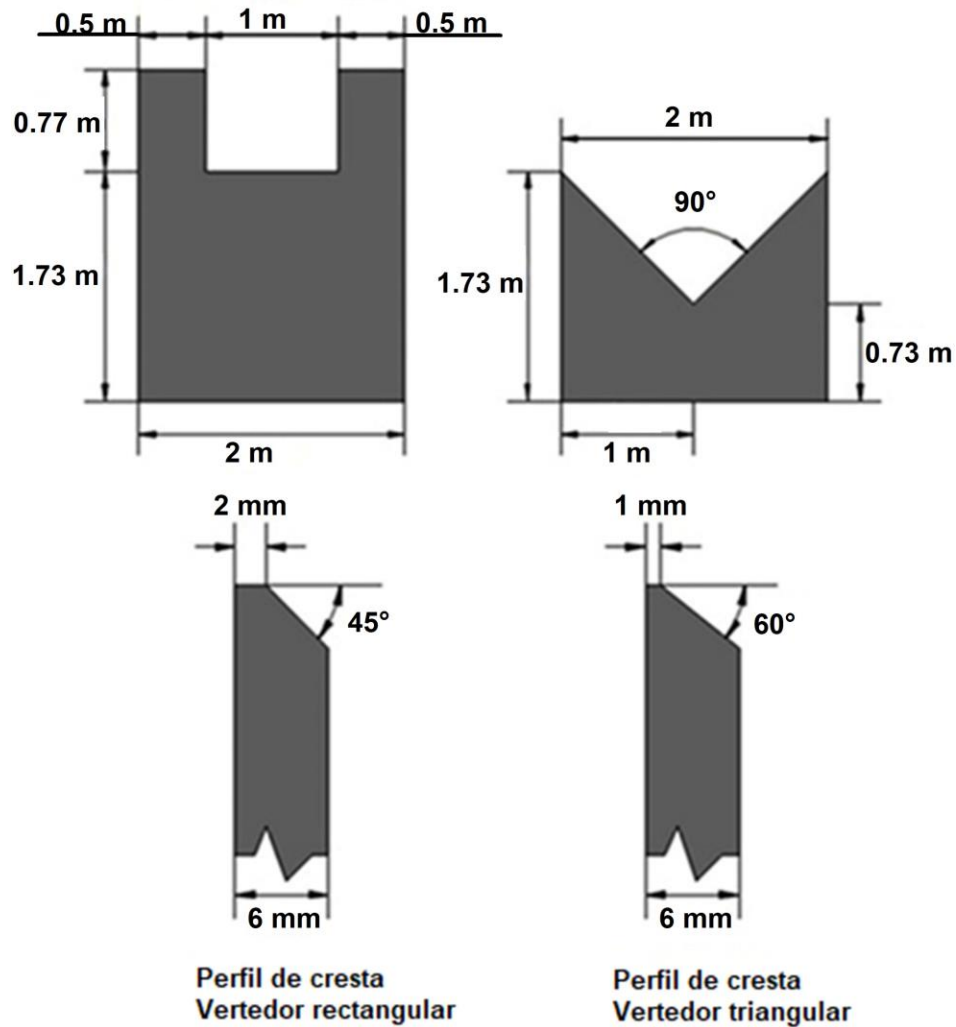


Figura 1. Dimensiones del vertedor prototipo rectangular y triangular.
(Sotelo. 1997; Skertchly, 1988).

Ecuaciones analíticas del vertedor

Se desarrollaron estudios experimentales y analíticos sobre el comportamiento del flujo aguas arriba y aguas abajo del vertedor. Por ejemplo, aguas arriba, cerca del vertedor, se tiene un movimiento variado de velocidad y presenta un remanso de depresión, originando la transformación de energía potencial en energía cinética; se trata de una zona de estancamiento del agua llamada agua muerta. Aguas arriba del vertedor tiene un flujo gradualmente variado; tal área está hasta una distancia de $4h$, siendo h la carga estática sobre la cresta del vertedor (Sotelo, 1997).

La Ecuación (1) muestra la forma general que permite obtener el caudal a través del vertedor (Bos, 1989):

$$Q = k h^n \quad (1)$$

Donde Q = caudal ($\text{m}^3 \text{s}^{-1}$); k = coeficiente, dependiendo de las dimensiones y forma del vertedor ($\text{m}^{1.5} \text{s}^{-1}$) para un vertedor rectangular ($\text{m}^{0.5} \text{s}^{-1}$) en un vertedor triangular), y n = número adimensional que depende de la forma del vertedor; para un vertedor rectangular y triangular n es igual a 1.5 y 2.5, respectivamente (Bos, 1989).

Para Henderson (1966), la ecuación de descarga en un vertedor rectangular se puede simplificar como Ecuación (2):

$$Q = \frac{2}{3} C_d (2g)^{0.5} b h^{1.5} \quad (2)$$

donde C_d es el coeficiente de descarga (adimensional); b , el largo de la cresta del vertedor (m); g , la aceleración de la gravedad (m s^{-2}), y h es la carga estática sobre la cresta del vertedor (m). El coeficiente de descarga depende de las características del flujo y de la geometría del canal (Kumar, Ahmad, & Mansoor, 2011).

Los vertedores de sección triangular se recomiendan para el aforo de gastos inferiores a 30 l s^{-1} y cargas de 6 cm a 60 cm; su precisión es mejor que la de un vertedor rectangular para pequeños caudales. Para descargas mayores es recomendable un vertedor rectangular debido a que el vertedor triangular es más sensible a cualquier cambio en la rugosidad de la placa, y también porque requiere mayor exactitud en la medición de las cargas. La ecuación del gasto para el vertedor triangular se presenta como Ecuación (3) (Sotelo, 1997):

$$Q = \frac{8}{15} C_d (2g)^{0.5} \tan \frac{\theta}{2} h^{2.5} \quad (3)$$

Donde θ es el ángulo de la muesca de la sección triangular ($^\circ$).

Los coeficientes de descarga son calculados con la Ecuación (4) para el vertedor rectangular y la ecuación 5 para el caso de un vertedor triangular cuyo ángulo de la muesca, θ , es 90° (Sotelo, 1997):

$$C_d = \left[0.6075 - 0.045 \frac{(B-b)}{B} + \frac{0.0041}{h} \right] \left[1 + 0.55 \left(\frac{b}{B} \right)^2 \left(\frac{h}{h+P} \right)^2 \right] \quad (4)$$

$$C_d = \left(0.5812 + \frac{0.00375}{h} \right) \left\{ \left[1 + \left[\frac{h^3}{B(h+P)} \right]^2 \right] \right\} \quad (5)$$

Donde B es ancho del canal (m); b , la longitud del vertedor rectangular (m); P , la altura del vertedor (m); h , la carga estática sobre el vertedor (m), y C_d es el coeficiente de descarga (adimensional).

La Figura 2 muestra el vertedor compuesto, con la sección rectangular y triangular. La ecuación de descarga puede derivarse usando el método de combinación lineal de acuerdo con Jan *et al.* (2012), y se expresa con la Ecuación (6):

$$Q = \frac{8}{15} C_{dt} (2g)^{0.5} \tan \frac{\theta}{2} (h_2^{2.5} - h_1^{2.5}) + \frac{2}{3} C_{dr} (2g)^{0.5} (2b_1) h_1^{1.5} \quad (6)$$

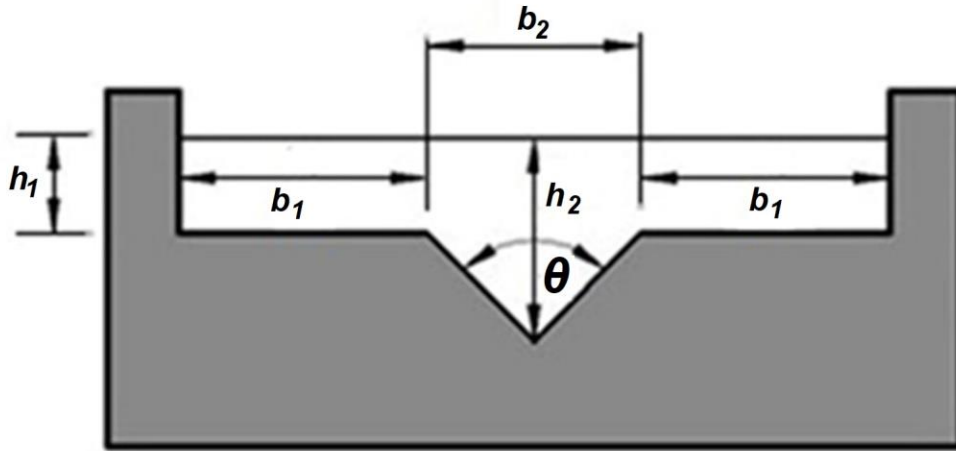


Figura 2. Características del modelo en un vertedor triangular y extendido a un vertedor compuesto.

La ecuación del vertedor compuesto (Ecuación (6)) contiene dos términos básicos: el primero es la descarga de la sección triangular $\left[\frac{8}{15} C_{dt} (2g)^{0.5} \tan \theta / 2 (h_2^{2.5} - h_1^{2.5}) \right]$, y el segundo corresponde a la descarga de la sección rectangular $\left[\frac{2}{3} C_{dr} (2g)^{0.5} (2b_1) h_1^{1.5} \right]$; C_{dt} es el coeficiente de descarga de la sección triangular (adimensional); C_{dr} , el coeficiente de descarga de la sección rectangular (adimensional); b_1 , el ancho del vertedor rectangular (m); h_1 y h_2 son la carga estática sobre la sección rectangular y triangular (m), respectivamente.

El valor de C_{dt} puede estimarse usando la siguiente relación empírica (Jan *et al.*, 2006) (Ecuación (7)):

$$C_{dt} = 0.6085 - 0.0525\theta + 0.02135\theta^2 \quad (7)$$

El valor de C_{dr} depende de la carga h_1 (m), altura de la cresta P (m), longitud de la sección rectangular b (m) y ancho del canal B (m), es descrito con la Ecuación (8) (Jan *et al.*, 2006):

$$C_{dr} = \frac{0.611 + 2.23 \left(\frac{B}{2b_1} - 1\right)^{0.7}}{1 + 3.8 \left(\frac{B}{2b_1} - 1\right)^{0.7}} + \frac{0.075 + 0.011 \left(\frac{B}{2b_1} - 1\right)^{1.46}}{1 + 4.8 \left(\frac{B}{2b_1} - 1\right)^{1.46}} \frac{h_1}{P} \quad (8)$$

Es conveniente aclarar que el valor de C_d en la Ecuación (4) y Ecuación (5) son diferentes del C_{dr} y C_{dt} de la Ecuación (7) y Ecuación (8); el último corresponde a un vertedor compuesto de una sección rectangular y triangular. Sotelo (1997) analizó dos casos de vertedores: el primero usando un vertedor triangular y el segundo con un vertedor rectangular, ambos con diferentes cargas hidráulicas; subsecuentemente evaluó sus coeficientes de descarga con base en el nivel de carga hidráulica obtenida en cada vertedor. Los resultados y datos experimentales se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Datos experimentales y resultados del vertedor triangular y rectangular reportado por Sotelo (1997).

Vertedor	Carga hidráulica h (m)	Coefficiente de descarga C_d	Caudal Q (l s ⁻¹)
----------	--------------------------------	-----------------------------------	------------------------------------

Rectangular	0.27	0.602	249
Triangular	0.50	0.590	246

Por otro lado, para el vertedor combinado con sección rectangular-triangular, Jan *et al.* (2006) reportó resultados experimentales de la descarga para tres casos de vertedores de distinta longitud de la sección rectangular (b_1) con diferentes gastos (Q); en la Tabla 2 se esquematizan las condiciones experimentales y los resultados obtenidos.

Tabla 2. Condiciones experimentales y resultados del vertedor compuesto reportado por Jan *et al.* (2006).

θ (°)	Ancho Canal (m)	b_1 (m)	b_2 (m)	h_1 (m)	h_2 (m)	C_{dr}	C_{dt}	Caudal analítico Q (l s ⁻¹)	Caudal experimental Q (l s ⁻¹)
90	1.49	0.25	0.20	0.013	0.113	0.590	0.579	7.13	8.06
90	1.49	0.25	0.20	0.031	0.131	0.591	0.579	13.02	14.36
90	1.49	0.25	0.20	0.036	0.136	0.591	0.579	14.95	16.33
90	1.49	0.40	0.20	0.022	0.122	0.594	0.579	11.59	13.35
90	1.49	0.40	0.20	0.041	0.141	0.595	0.579	21.41	23.35
90	1.49	0.40	0.20	0.069	0.169	0.597	0.579	39.90	45.50
90	1.49	0.50	0.20	0.01	0.110	0.595	0.579	7.23	8.06

90	1.49	0.50	0.20	0.023	0.123	0.597	0.579	13.30	14.36
90	1.49	0.50	0.20	0.027	0.127	0.598	0.579	15.53	16.33

Simulación con dinámica de fluidos computacional (CFD)

ANSYS WORKBENCH V14.5 fue usado para implementar las simulaciones. CFD es una herramienta numérica que predice el comportamiento de un fluido mediante la resolución de la ecuación general de transporte, también llamadas ecuaciones de Navier-Stokes (NS). Debido a que se carece de una solución analítica, CFD usa el método de volúmenes finitos (FVM), el cual divide el dominio en un número finito de elementos sobre las cuales las ecuaciones de conservación son impuestas.

Ecuación general y submodelos

La Ecuación (9) es la forma diferencial de la ecuación de balance de masa para un flujo incompresible (densidad constante), donde $\nabla \cdot \mathbf{U}$ representa la variación de velocidad.

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

Para un fluido incompresible, la ecuación diferencial de momento puede ser expresada como Ecuación (10):

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{U})}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U} \mathbf{U}) = \nabla(\mu \nabla \mathbf{U}) - \nabla p + \rho \mathbf{f} \quad (10)$$

Donde ρ (kg m^{-3}) es la densidad del fluido; \mathbf{U} (m s^{-1}) es el campo de velocidad; \mathbf{f} (N kg^{-1}) son las fuerzas de cuerpo por unidad de masa; p (N m^{-2}) es la presión dinámica; μ ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$) es la viscosidad dinámica ($0.001 \text{ kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$ for $20 \text{ }^\circ\text{C}$).

El modelo volumen de fluido (VOF) es una técnica de seguimiento de superficie mediante la definición de celdas de cálculo que puede estar vacía, parcialmente llena, o llena del fluido. Fue reportado por Hirt y Nichols (1981), y se basa en un concepto de que el volumen ocupado por un material no puede ser ocupado por el otro. Para cada fase adicional que se agrega al modelo se introduce una nueva variable: la fracción de volumen de la fase en la celda computacional. En cada volumen de control, las fracciones en volumen de todas las fases suman la unidad. La

fracción de volumen del fluido q^{th} en la celda se denota como α_q , entonces las tres condiciones siguientes son posibles: en caso de que $\alpha_q = 0$, la celda está vacía del fluido q^{th} ; si $\alpha_q = 1$, la celda está llena del fluido q^{th} , y si $0 < \alpha_q < 1$, la celda contiene la interfaz entre el fluido q^{th} y el resto de fluidos.

El seguimiento de la interfaz entre las fases se lleva a cabo por la solución de la ecuación de continuidad, Ecuación (11), para la fracción de volumen de una (o más) de las fases. Para la fase de q^{th} , esta ecuación tiene la siguiente forma (Hirt & Nichols, 1981):

$$\frac{1}{\rho_q} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_q \rho_q) + \nabla \cdot (\alpha_q \rho_q \vec{v}_q) \right] = S_{\alpha_q} + \sum_{p=1}^n (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) \quad (11)$$

Donde ρ_q es la densidad de la fase q (kg m^{-3}); \vec{v}_q , la velocidad de la fase q (m s^{-1}); S_{α_q} , el término fuente de la ecuación ($\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}$); \dot{m}_{pq} , la transferencia de masa que pasa de la fase p a la fase q (kg s^{-1}), y \dot{m}_{qp} es la transferencia de masa de la fase q a la fase p (kg s^{-1}).

El modelo de turbulencia $K-\varepsilon$ es un modelo semiempírico basado en las ecuaciones de transporte para la energía turbulenta (k) y para la disipación de la energía cinética turbulenta (ε) (Launder & Spalding, 1974; Spalart & Almaraz, 1992). En la obtención de este modelo se asume que el flujo es totalmente desarrollado y que los efectos de la viscosidad molecular son despreciables (Jones & Launder, 1972); los parámetros K ($\text{m}^2 \text{s}^{-2}$) y ε ($\text{m}^2 \text{s}^{-3}$) se obtienen de la Ecuación (12) y Ecuación (13):

Energía cinética turbulenta (K) (Ecuación (12)):

$$\frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j K)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\partial \mu_t}{\partial \sigma_k} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \varepsilon + P_{kb} \quad (12)$$

Disipación de la energía cinética turbulenta (ε) (Ecuación (13)):

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\partial \mu_t}{\partial \sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{K} (C_{1\varepsilon} P_k + C_{2\varepsilon} \rho \varepsilon + C_{1\varepsilon} P_{\varepsilon b}) \quad (13)$$

donde μ_t es la viscosidad turbulenta ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$) y se presenta como (Ecuación (14)):

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (14)$$

P_{kb} y $P_{\varepsilon b}$ representan la influencia de las fuerzas de flotabilidad. P_K es la generación turbulenta debido a las fuerzas viscosas ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-3}$); se presenta de la forma (Ecuación (15)):

$$P_K = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \left(\mu_t \frac{\partial U_k}{\partial x_{kk}} + \rho K \right) \quad (15)$$

Los valores de los coeficientes C_μ , $C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$, σ_k y σ_ε fueron ajustados por Launder y Spalding (1974), los cuales se presentan como $C_\mu = 0.09$, $C_{1\varepsilon} = 1.44$, $C_{2\varepsilon} = 1.92$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $\sigma_k = 1.0$.

Simulación numérica con CFD

La solución numérica y la solución usando CFD involucra tres principales fases: a) preproceso, b) proceso y c) posproceso. Es una secuencia de actividades que en su conjunto definen la calidad de los resultados.

El primer paso consiste en la generación digital como un sólido de la construcción del modelo físico bajo estudio (Figura 3). Para analizar hidráulicamente el vertedor en CFD el modelo computacional debe ser definido como una geometría tridimensional. El módulo Geometry fue usado para definir el modelo numérico. Las características del modelo numérico se basan en un vertedor prototipo rectangular, triangular y compuesto. Jan *et al.* (2006) y Sotelo (1997) no mencionan la pendiente del canal bajo la cual se condujo el experimento; fue asumida totalmente horizontal y el flujo gradualmente variado, por lo que el coeficiente de descarga no se afecta por la pendiente del canal.

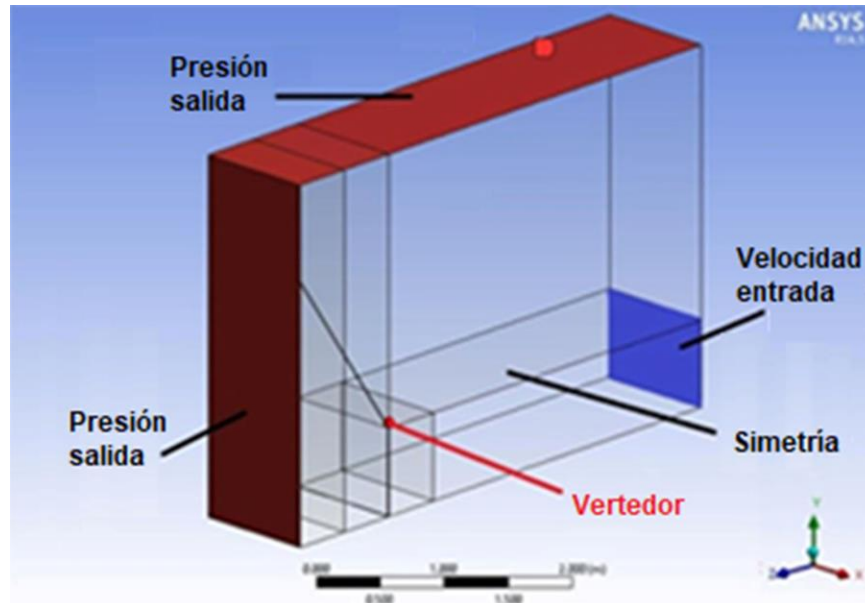


Figura 3. Condiciones de frontera del vertedor.

Después de la generación de la geometría, el dominio se divide en un número finito de celdas o elementos sin traslape que cubran toda la geometría donde se aplicarán las ecuaciones de conservación. El módulo Meshing se usó para generar la malla en el modelo; para la discretización espacial, se decidió emplear una malla principalmente hexaédrica; entre las ventajas de este tipo de malla se cuenta la reducción del número de elementos y la mejor convergencia para la solución (Sánchez & Elsitidié, 2011). Entre los parámetros que definen la viabilidad del modelo computacional está la relación entre los datos experimentales y simulados.

Se establecen las condiciones de frontera del modelo computacional (Tabla 3). La condición de entrada de flujo se localiza aguas arriba del

vertedor, a una distancia mínima de dos veces el ancho del canal (Boss, Replogle, & Clemmens, 1984); para evitar que la carga hidráulica se afecte por la condición de aproximación del flujo, la condición más común de entrada en canales abiertos es la velocidad media del flujo (velocidad de entrada) obtenida desde la tasa de flujo y la ecuación de continuidad; el plano vertical localizado aguas abajo del vertedor se define como salida a superficie libre a la atmósfera; la condición de salida asignada es la presión atmosférica para canales abiertos (presión de salida); debido a que el modelo computacional es simétrico en el eje del vertedor, la condición de simetría se asigna en los planos laterales perpendiculares al eje del vertedor. El vertedor, la plataforma y las paredes laterales del canal se definen como un sólido estacionario y antideslizantes con rugosidad $1.6 \cdot 10^{-9}$ m (polietileno de alta densidad).

Tabla 3. Condiciones de frontera del modelo computacional (Figura 3).

Condiciones de frontera	
Entrada	Entrada de velocidad (aguas arriba)
	Salida de presión (sobre el área del canal)
Salida	Salida de presión (aguas abajo)
Sólido	Vertedor
	Paredes laterales y plataforma del canal
Simetría	Lados frontera y plano perpendicular a los ejes del vertedor

Para un adecuado ajuste y desarrollo de las condiciones físicas del modelo computacional se tiene el esquema numérico, que de manera iterativa resuelve las ecuaciones que describen el flujo. Debido a que se simulan dos fases (aire-agua) y flujo a superficie libre, se asigna el moldeo multifase VOF y el modelo de turbulencia $K-\varepsilon$ (Launder & Spalding, 1974) considerado el método simple más completo con menor costo computacional para simular turbulencia, mostrando ventajas en flujos internos y confinados (Fernández, 2012), y en flujos a superficie libre (Chanel & Doering, 2008; Olsen, Nils, & Kjellesvig, 1998; Jiang, Diao, Sun, & Ren, 2018).

El algoritmo SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations*) se usó para el acoplamiento presión-velocidad; esta aproximación permite la convergencia a través de una serie de campos intermedios de presión y velocidad con satisfactoria continuidad (Fernández, 2012). El uso de "Upwind" sistema de discretización especial asegura esquemas estables, pero la característica de primer orden hace sensible los errores numéricos en difusión. Tales errores pueden ser minimizados usando un esquema con mayor orden de discretización.

Se consideraron varias simulaciones para evaluar la precisión del modelo de acuerdo con resultados previos reportados en bibliografía. Se usaron métodos estadísticos para comparar resultados experimentales con analíticos y simulados. Como indicador de la calidad de los resultados numéricos simulados se empleó el porcentaje de error relativo, el cual

indica qué tan lejano están los datos experimentales con los estimados mediante CFD y puede estimarse mediante la Ecuación (16):

$$\text{Porcentaje de error relativo} = \frac{\text{Simulado} - \text{experimental}}{\text{experimental}} * 100 \quad (16)$$

La Tabla 4 muestra los escenarios de simulación según las condiciones experimentales.

Tabla 4. Escenarios de simulación.

Condiciones experimentales						
Vertedor	Ancho canal (m)	Ancho sección rectangular b_1 (m)	Ancho sección triangular b_2 (m)	Ángulo muesca θ (°)	Carga h (m)	Caudal Q (l s⁻¹)
Rectangular	2.00	1.00	-	-	0.27	249.00
Triangular	2.00	-	2.00	90	0.50	246.00
		0.25	0.20	90	0.113	8.06
		0.25	0.20	90	0.131	14.36
Compuesto	1.49	0.25	0.20	90	0.136	16.33
		0.40	0.20	90	0.122	13.35
		0.40	0.20	90	0.141	23.35

0.40	0.20	90	0.169	45.50
0.50	0.20	90	0.110	8.06
0.50	0.20	90	0.123	14.36
0.50	0.20	90	0.127	16.33

Los resultados son analizados, y se presentan en forma cualitativa (mapas, distribuciones, vectores) y cuantitativa (gráficas, integrales, valores, promedios).

Análisis de resultados y discusión

Evaluación del modelo numérico

En la Tabla 5 se reportan los parámetros de simulación y se muestra la comparación estadística de los datos experimentales presentados por Sotelo (1997) con los simulados en CFD. El coeficiente de descarga del

vertedor rectangular triangular se obtuvo con la Ecuación (4) y Ecuación (5), respectivamente.

Tabla 5. Variables hidráulicas y porcentaje de error relativo entre valores experimentales y numéricos del vertedor rectangular y triangular.

Vertedor	Método	Carga h (m)	Ángulo muesca θ (°)	Coefficiente descarga C_d	Caudal Q (l s⁻¹)
Rectangular	Experimental	0.270	-	0.6017	249
	CFD	0.271	-	0.6016	251
	Error relativo (%)	0.37	-	-0.01	0.66
Triangular	Experimental	0.500	90	0.5902	246
	CFD	0.499	90	0.5902	245
	Error relativo (%)	-0.2	-	0.00	-0.30

De acuerdo con los resultados, el modelo numérico simula ambos vertedores de manera robusta. Aun cuando el modelo CFD predice de mejor manera la descarga en el vertedor triangular que en el caso del rectangular, el error relativo en el vertedor triangular es sustantivamente menor que en el vertedor rectangular. El uso del vertedor triangular se

recomienda para flujos menores que 30 l s^{-1} ; sin embargo, Sotelo (1997) también documentó que esta precisión es mayor que un vertedor rectangular incluso con tasas de flujo de 30 a 300 l s^{-1} .

Una vez que el modelo CFD se evalúa, se simularon nueve escenarios para el vertedor combinado, los cuales fueron estadísticamente comparados con los resultados experimentales reportados por Jan *et al.* (2006). Los coeficientes de descarga C_{dt} y C_{dr} de las secciones triangular y rectangular del vertedor compuesto se calcularon con la Ecuación (7) y la Ecuación (8). En la Tabla 6 se reportan los caudales obtenidos numéricamente para las tres secciones del vertedor compuesto.

Tabla 6. Coeficiente de descarga y caudal en un vertedor compuesto obtenido por medio de simulación en CFD.

Ángulo muesca θ ($^{\circ}$)	Ancho sección rectangular b_1 (m)	Ancho sección triangular b_2 (m)	Carga sección rectangular CFD h_1 (m)	Carga sección triangular CFD h_2 (m)	Coeficiente descarga sección rectangular C_{dr}	Coeficiente descarga sección triangular C_{dt}	Caudal CFD Q (l s^{-1})
90	0.25	0.20	0.014	0.114	0.590	0.579	8.08
90	0.25	0.20	0.033	0.133	0.591	0.579	14.31
90	0.25	0.20	0.040	0.140	0.591	0.579	16.31
90	0.40	0.20	0.028	0.128	0.594	0.579	13.27
90	0.40	0.20	0.042	0.142	0.594	0.579	23.24

90	0.40	0.20	0.079	0.179	0.596	0.579	45.30
90	0.50	0.20	0.010	0.110	0.595	0.579	8.11
90	0.50	0.20	0.025	0.125	0.596	0.579	14.47
90	0.50	0.20	0.029	0.129	0.597	0.579	16.33

El error relativo, calculado con la Ecuación (16), se presenta en la Tabla 7; el caudal estimado analíticamente (estimado con la Ecuación (6)) y el caudal estimado numéricamente (obtenido con CFD) se comparan contra el caudal medido experimentalmente.

Tabla 7. Error relativo entre caudal estimado analítica y numéricamente con datos experimentales.

Ancho sección rectangular $b_1(m)$	Caudal experimental $Q (l s^{-1})$	Caudal analítico $Q (l s^{-1})$	Caudal CFD $Q (l s^{-1})$	Error relativo analítico vs. experimental (%)	Error relativo CFD vs. experimental (%)
0.25	8.06	7.13	8.08	-11.49	0.21
0.25	14.36	13.02	14.31	-9.33	-0.35
0.25	16.33	14.95	16.31	-8.47	-0.14
0.40	13.35	11.59	13.27	-13.21	-0.59
0.40	23.35	21.41	23.24	-8.30	-0.46
0.40	45.50	39.90	45.30	-12.30	-0.44
0.50	8.06	7.23	8.11	-10.28	0.65

0.50	14.36	13.30	14.47	-7.41	0.74
0.50	16.33	15.53	16.33	-4.93	0.00

Estimación del coeficiente de descarga

La ecuación de descarga del vertedor compuesto (Ecuación 6) puede ser reescrita como una función de un coeficiente de descarga simple, como se muestra en la Ecuación (17):

$$Q = C_d(2g)^{0.5} \left[\frac{4}{3}b_1h_1^{1.5} + \frac{8}{15}\tan\theta/2(h_2^{2.5} - h_1^{2.5}) \right] \quad (17)$$

Igualando la Ecuación (7) y Ecuación (17) es posible obtener un coeficiente de descarga estandarizado (Ecuación (18)):

$$C_d = \frac{C_{dr}\frac{4}{3}b_1h_1^{1.5} + C_{dt}\frac{8}{15}\tan\theta/2(h_2^{2.5} - h_1^{2.5})}{\frac{4}{3}b_1h_1^{1.5} + \frac{8}{15}\tan\theta/2(h_2^{2.5} - h_1^{2.5})} \quad (18)$$

El coeficiente de descarga de una sección rectangular (C_{dr}) se calcula con la Ecuación (4) y el de la sección triangular (C_{dt}) se obtiene

con la Ecuación (7). La Ecuación (4) considera la geometría del vertedor y la carga de la sección rectangular, mientras que la Ecuación (7) es independiente de la carga y su valor es constante para cada ángulo de la muesca, y el efecto de tensión superficial y viscosidad son especialmente despreciables.

La Ecuación (18) sólo es válida con cargas mayores que h_1 , esto es, $h_2 > h_1$. El coeficiente de descarga en la Tabla 8 se calculó con la Ecuación (18) para valores de $h_2 / P \leq 1$.

Tabla 8. Cálculo del coeficiente de descarga.

θ (°)	Ancho canal (m)	P (m)	b_1 (m)	b_2 (m)	h_1 (m)	h_2 (m)	C_d	h_2/P
90	1.49	0.2	0.25	0.20	0.013	0.113	0.634	0.565
90	1.49	0.2	0.25	0.20	0.031	0.131	0.626	0.655
90	1.49	0.2	0.25	0.20	0.036	0.136	0.623	0.68
90	1.49	0.2	0.25	0.20	0.02	0.12	0.632	0.60
90	1.49	0.2	0.25	0.20	0.06	0.16	0.613	0.80
90	1.49	0.2	0.25	0.20	0.10	0.20	0.603	1.00
90	1.49	0.2	0.40	0.20	0.022	0.122	0.655	0.61
90	1.49	0.2	0.40	0.20	0.041	0.141	0.641	0.705
90	1.49	0.2	0.40	0.20	0.069	0.169	0.629	0.845

90	1.49	0.2	0.40	0.20	0.01	0.11	0.662	0.55
90	1.49	0.2	0.40	0.20	0.08	0.18	0.626	0.90
90	1.49	0.2	0.40	0.20	0.10	0.20	0.622	1.00
90	1.49	0.2	0.50	0.20	0.01	0.110	0.680	0.55
90	1.49	0.2	0.50	0.20	0.023	0.123	0.669	0.615
90	1.49	0.2	0.50	0.20	0.027	0.127	0.665	0.635
90	1.49	0.2	0.50	0.20	0.04	0.14	0.656	0.70
90	1.49	0.2	0.50	0.20	0.06	0.16	0.647	0.80
90	1.49	0.2	0.50	0.20	0.10	0.20	0.639	1.00

El coeficiente de descarga en la Tabla 8 se presenta como función de la relación h_2/P (Figura 4), y se ajustado a la Ecuación (19) para facilitar el diseño del vertedor.

$$C_d = a_1 + a_2 \cos\left(d * \frac{h_2}{P}\right) + a_3 \sin\left(d * \frac{h_2}{P}\right) + a_3 \cos\left(2d * \frac{h_2}{P}\right) + a_4 \sin\left(2d * \frac{h_2}{P}\right) \quad (19)$$

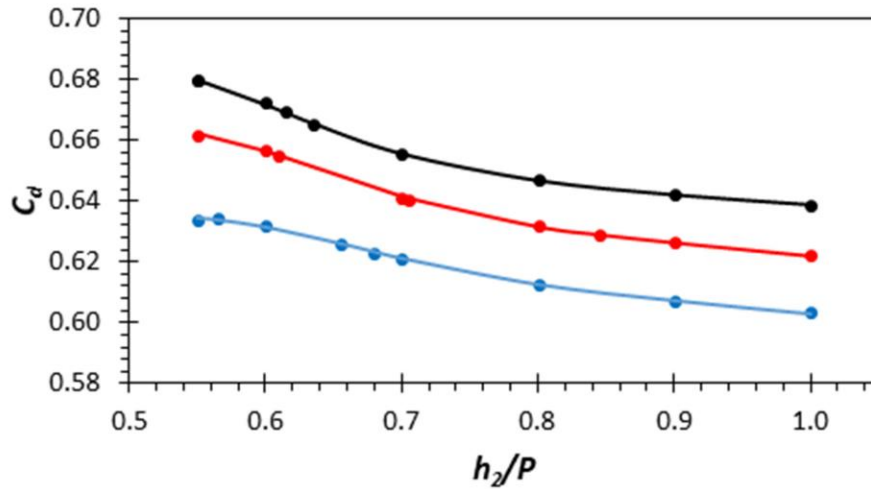


Figura 4. C_d vs. h_2 / P ; $b_1 = \bullet$, $b_2 = \bullet$, $b_3 = \bullet$.

Los coeficientes de la Ecuación (19) se calculan con las ecuaciones (20) a (25):

$$a_1 = 76.96 * 10^{-3} \left[2 \left(b_1 + \tan \frac{\theta}{2} \{ h_2 - h_1 \} \right) \right]^2 - 18.18 * 10^{-2} \left[2 \left(b_1 + \tan \frac{\theta}{2} \{ h_2 - h_1 \} \right) \right] + 69.12 * 10^{-2} \quad (20)$$

$$a_2 = 7.4 * 10^{-5} \left[2 \left(b_1 + \tan \frac{\theta}{2} \{ h_2 - h_1 \} \right) \right]^2 + 29.98 * 10^{-3} \left[2 \left(b_1 + \tan \frac{\theta}{2} \{ h_2 - h_1 \} \right) \right] - 27.86 * 10^{-3} \quad (21)$$

$$a_3 = 90.28 * 10^{-3} \left[2 \left(b_1 + \tan \frac{\theta}{2} \{h_2 - h_1\} \right)^2 \right] - 79.24 * 10^{-3} \left[2 \left(b_1 + \tan \frac{\theta}{2} \{h_2 - h_1\} \right) \right] + 63.36 * 10^{-4} \quad (22)$$

$$a_4 = -77.41 * 10^{-4} \left[2 \left(b_1 + \tan \frac{\theta}{2} \{h_2 - h_1\} \right)^2 \right] - 19.82 * 10^{-4} \left[2 \left(b_1 + \tan \frac{\theta}{2} \{h_2 - h_1\} \right) \right] + 60.47 * 10^{-4} \quad (23)$$

$$a_5 = -39.37 * 10^{-3} \left[2 \left(b_1 + \tan \frac{\theta}{2} \{h_2 - h_1\} \right)^2 \right] + 34.93 * 10^{-3} \left[2 \left(b_1 + \tan \frac{\theta}{2} \{h_2 - h_1\} \right) \right] - 56.38 * 10^{-4} \quad (24)$$

$$d = 6.981 \quad (25)$$

Los coeficientes se usaron como un criterio para evaluar la calidad de las ecuaciones (19) a (25); el coeficiente de determinación R^2 permite evaluar la concordancia entre dos valores relativos lineales. Los valores del coeficiente R^2 de las ecuaciones (19) a (25) fue 0.999, lo cual permitió concluir que existe un alto grado de concordancia entre valores medidos y calculados. Finalmente, los caudales que cruzan por el vertedor y los nuevos coeficientes de descarga obtenidos con las ecuaciones (19) a (25) se muestran en la Tabla 9.

Tabla 9. Cálculo del caudal y coeficiente de descarga.

θ (°)	Ancho canal (m)	b_1 (m)	b_2 (m)	h_1 (m)	h_2 (m)	C_d	Caudal analítico Q (l s ⁻¹)	Caudal experimental Q (l s ⁻¹)
90	1.49	0.25	0.20	0.013	0.113	0.634	7.79	8.06
90	1.49	0.25	0.20	0.031	0.131	0.626	14.00	14.36
90	1.49	0.25	0.20	0.036	0.136	0.623	15.99	16.33
90	1.49	0.40	0.20	0.022	0.122	0.655	13.01	13.35
90	1.49	0.40	0.20	0.041	0.141	0.641	23.40	23.35
90	1.49	0.40	0.20	0.069	0.169	0.629	42.56	45.50
90	1.49	0.50	0.20	0.01	0.110	0.680	8.45	8.06
90	1.49	0.50	0.20	0.023	0.123	0.669	15.18	14.36
90	1.49	0.50	0.20	0.027	0.127	0.665	17.61	16.33

Discusión

Los resultados revelaron que el caudal obtenido de las simulaciones con CFD predice de manera robusta la descarga, en comparación a cuando se obtiene de manera analítica. Analíticamente existe imprecisión de la

medición del caudal durante la transición entre las secciones geométricas, es decir, en la región donde la descarga excede la frontera entre la sección triangular y rectangular. Lee, Chan, Huang y Leu (2012) mencionaron que la discontinuidad de la descarga durante la transición se asocia con cambios en la masa y el momento; son efectos de variables de las ecuaciones de conservación, que no se consideran en las ecuaciones teóricas para la estimación del caudal, como los efectos de viscosidad y distribución de velocidades en la proximidad del vertedor.

Con el fin de mejorar el ajuste del modelo analítico, Jan, Chang y Kuo (2009) propusieron un factor de ajuste α , el cual multiplica los caudales estimados analíticamente para estimar el caudal de descarga; α se define como el promedio de la relación entre el caudal medido experimentalmente y analíticamente (α no se consideró en los resultados de la Tabla 8). El valor de ajuste se estimó en $\alpha = 1.11$, lo cual indica que el método analítico subestima con respecto a los datos experimentales.

La dificultad de describir el flujo en la zona de transición entre la sección triangular y la rectangular es bien conocida. CFD debe asumir hipótesis para simular y probar submodelos para describir el flujo, como la turbulencia y el cambio de fase. Los caudales son muy similares en varias hipótesis. En estas condiciones, las simulaciones CFD permitirán conocer en detalle el comportamiento del flujo en las secciones críticas del vertedero.

Análisis hidráulico del coeficiente de descarga

El propósito de tener una ecuación para estimar el coeficiente de descarga (ecuaciones (19) a (25)) es con el fin de predecir analíticamente el caudal de un vertedor compuesto; tales ecuaciones consideran la geometría del vertedor (ancho, alto, ángulo y altura de la muesca triangular, ancho de la sección rectangular) y el nivel de la carga estática. La Tabla 10 compara el gusto estimado tanto analítica como experimentalmente. El error relativo entre ambos flujos varía entre 0.2 y 7.8 %. Los resultados del caudal obtenido analíticamente con el coeficiente de descarga están dentro del rango aceptable.

Tabla 10. Comparación entre resultados analíticos y experimentales de caudal.

C_d	Caudal analítico	Caudal experimental	Error relativo
	Q (l s ⁻¹)	Q (l s ⁻¹)	(%)
0.634	7.79	8.06	-3.36
0.626	14.00	14.36	-2.50
0.623	15.99	16.33	-2.06
0.655	13.01	13.35	-2.59
0.641	23.40	23.35	0.22

0.629	42.56	45.50	-6.47
0.680	8.45	8.06	4.82
0.669	15.18	14.36	5.72
0.665	17.61	16.33	7.80

La gráfica en la Figura 4 muestra que el vertedor presenta altos coeficiente de descarga para pequeñas cargas hidráulicas $h_2 / P < 0.6$, y un incremento del ancho de la sección rectangular. La reducción de valores del coeficiente de descarga en el vertedor con $b_1 = 0.25$ m es más suave comparado con los otros vertedores; desde valores $h_2 \approx 0.7$, la pendiente de la curva del coeficiente de descarga del vertedor $b_1 = 0.40$ m y $b_1 = 0.50$ m es más fina y tiende a estabilizarse con $h_2 / P \geq 1$. Esto se debe a que desde $h_2 / P \approx 0.7$, el punto de inflexión donde ocurre el cambio en el traslape se debe a la existencia de diferencias de presión entre las secciones triangular y rectangular, así como a la variación de la velocidad del caudal. Aun cuando el propósito de la ecuación de coeficiente de descarga permite una mejor producción del caudal, los resultados no son precisos, como los valores experimentales; la relación carga-descarga está directamente afectada por la discontinuidad del flujo por las cargas alrededor de la cresta horizontal del vertedor (Lee *et al.*, 2012).

Características de la lámina de descarga

En el vertedor compuesto hay dos láminas de descarga (Figura 5) como consecuencia de la diferencia de presiones que se presentan durante la descarga en las secciones triangular y rectangular (Figura 6) Por otro lado, la sección rectangular presenta presiones subatmosféricas y reducidas velocidades de descarga, mientras que en la sección triangular las presiones son mayores a la atmosférica y mayores velocidades de descarga junto con una lámina de descarga más delgado que la sección rectangular (Figura 5). CFD como herramienta numérica permitió identificar la presencia de depresión en la superficie libre del agua y en consecuencia detalles de la velocidad de descarga generadas en la traingular del vertedor compuesto (Figura 7).

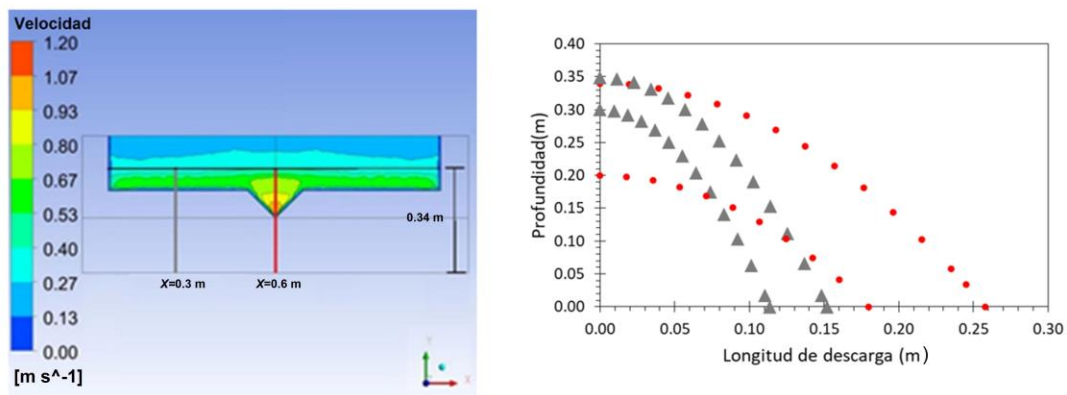


Figura 5. Seguimiento de partículas monitoreadas durante la descarga .

▲ $X = 0.3 \text{ m}$, ● $X = 0.6 \text{ m}$; $b_1 = 0.40 \text{ m}$, $Q = 23.35 \text{ l s}^{-1}$.

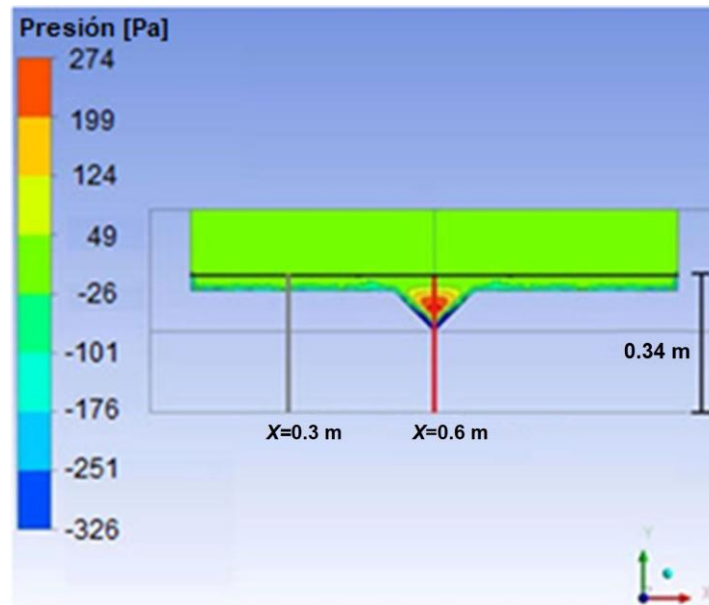


Figura 6. Presiones relativas; $b_1 = 0.40$ m, $Q = 23.35$ l s⁻¹. X en metros. — $x = 0.3$, — $x = 0.6$, — superficie libre.

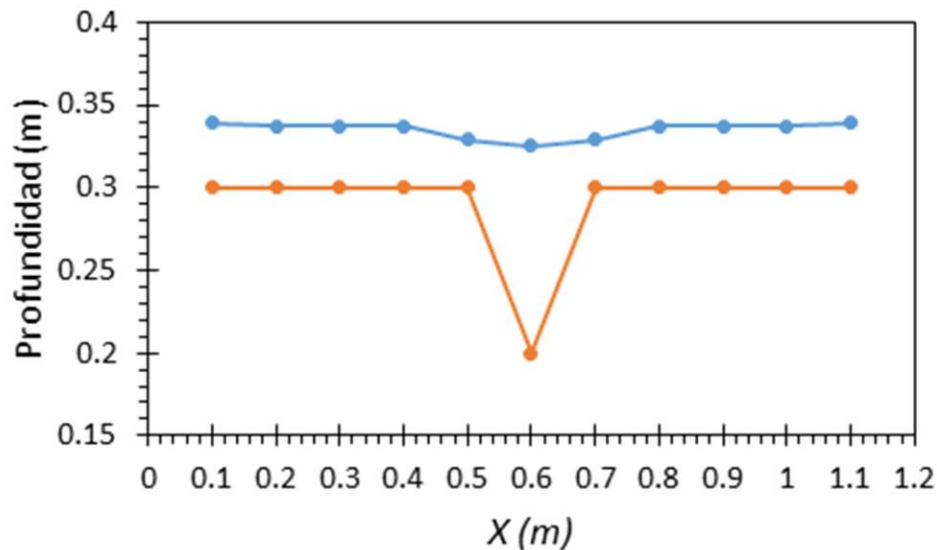


Figura 7. Perfil de la superficie libre del agua durante la descarga. Superficie libre —, eje del vertedor —; $b_1 = 0.40$ m, $Q = 45.30$ l s⁻¹.

1.

De las mediciones de velocidad se observa que ese comportamiento está afectado por la carga hidráulica y la geometría del vertedor compuesto. Una importante consecuencia de la distribución del campo de velocidades (Figura 8) es el impacto de la descarga en específicas secciones del vertedor. En general, los contornos de velocidad de la sección rectangular se presentan casi de forma paralela a la cresta del vertedor. Las velocidades cercanas al traslape de la cresta triangular son menores que el resto de ellas en la sección triangular; cerca de la parte superior de la sección, la velocidad es relativamente alta; la longitud de la descarga en esa área es mayor que en otras zonas del vertedor. Los

perfiles de velocidad en la Figura 8 presentan gradientes de velocidad en la transición desde la sección triangular hacia la rectangular, llamada zona de mezcla (Lee *et al.*, 2012); el gradiente de velocidad decrece y las velocidades en la zona de mezcla se incrementan conforme aumenta la carga hidráulica. Los perfiles de velocidad a lo largo del canal (Figura 8) presentan una reducción en la velocidad de descarga antes de llegar a la sección triangular; ese fenómeno (círculo rojo) se atenúa con cargas pequeñas en la sección rectangular ($Y = 0.31$ m), lo cual ocurre debido a la discontinuidad del flujo cerca de la zona de mezcla; como lo observado por Lee *et al.* (2012), en los cambios de masa y momento para altas cargas, la reducción de velocidad es menos abrupta y con tendencia a estabilizarse ($Y = 0.34$ m).

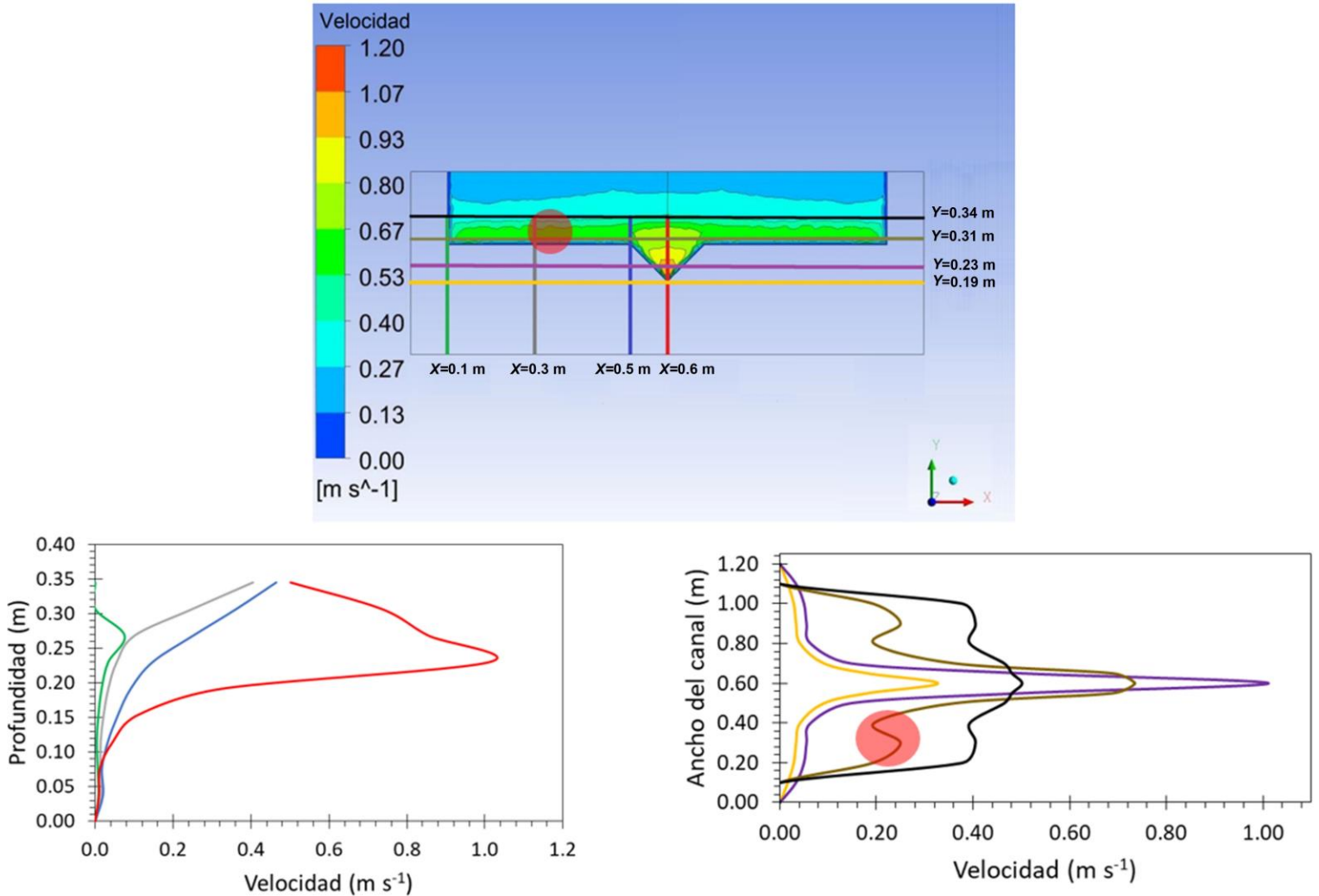


Figura 8. Perfiles de velocidad del agua; $b_1 = 0.40$ m, $Q = 23.35$ l s⁻¹. X en metros. — X = 0.1, — X = 0.3, — X = 0.5, — X = 0.6. — Y = 0.19, — Y = 0.23, — Y = 0.31, — Y = 0.34

Conclusiones

Estudios experimentales y analíticos reportados en la bibliografía permitieron reproducir numéricamente mediante simulaciones en CF el comportamiento hidráulico de un vertedor compuesto (rectangular-triangular). De acuerdo con los objetivos de este trabajo, así como con los resultados obtenidos es importante notar que los caudales obtenidos numéricamente son estadísticamente concordantes con los valores experimentales. Además, ha sido posible mejorar la estimación de los flujos obtenidos de forma analítica. Por lo tanto, las principales conclusiones se pueden resumir como:

1. Se encontró un error máximo de 7.8 % en los caudales estimados mediante cálculos analíticos en relación con el estimado en laboratorio; el error pudo disminuirse hasta 0.74 % cuando se calcula con simulaciones en CFD.
2. Respecto al diseño del vertedor, se propuso una expresión para estimar el coeficiente de descarga global como función de la relación h_2/P y la geometría del vertedor. Los resultados de la simulación detallan que los valores y la variación del coeficiente de descarga se incrementan cuando aumenta el ancho de la sección rectangular (b_1). De hecho, los valores del coeficiente de descarga tienen mayor incremento $h_2/P < 0.6$ y desde $h_2/P \geq 1$ tiende a estabilizarse. Para $h_2/P \approx 0.7$, el decremento en el coeficiente de descarga es menos drástico como consecuencia de la

reducción de los gradientes de velocidad que ocurren en la zona de mezcla y diferencia de presiones

3. Fue posible caracterizar la lámina de descarga del agua. CFD permitió identificar presiones subatmosféricas en la región rectangular, mientras que en la zona triangular las presiones son mayores a las atmosféricas. Aunado a eso, durante la descarga, se observó una delgada lámina de descarga en el área dominada por la sección triangular y una depresión en la superficie libre. Se caracterizó la distribución de velocidades; los contornos de velocidad de la sección rectangular fueron cuasi paralelos a la cresta del vertedor; en la zona baja de la sección triangular se registra una mayor velocidad de descarga que en el resto del vertedor, donde la lámina de descarga es más delgada y se origina una depresión en la superficie del agua. El gradiente de velocidad que se presenta durante la transición de la sección triangular hacia la rectangular decrece con el incremento de la carga hidráulica, y la velocidad en la zona de mezcla se incrementa. En la sección rectangular se observó la reducción de velocidad, que luego crece de modo repentino cerca del área dominada por la sección triangular por causa de la discontinuidad del flujo y la proximidad a la zona de mezcla; la velocidad se incrementa y tiende a estabilizarse con el incremento de la carga hidráulica.
4. De acuerdo con los resultados obtenidos, es posible asumir que el error analítico en la estimación del caudal se debe a la variación de la velocidad de descarga en la transición de la sección triangular a la rectangular y la discontinuidad del flujo.

5. Un vertedor compuesto triangular-rectangular satisface totalmente los criterios de precisión como dispositivo para la entrega de agua para uso de riego, considerando la importancia de la variación de caudales en dispositivos de aforo. Por otro lado, la experimentación y la modelización con CFD son estrategias complementarias para comprender y analizar los detalles del funcionamiento hidráulico de los vertederos compuestos.

Agradecimientos

El presente trabajo es parte de la tesis doctoral del autor Erick Dante Mattos-Villarroel en el posgrado de Tecnología y Ciencias del Agua del Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA).

Nomenclatura

B = Ancho del canal

B = Ancho del vertedor.

b_1 = Ancho de la sección rectangular del vertedor compuesto.

b_2 = Ancho de la sección triangular en el vertedor compuesto.

C_d = Coeficiente de descarga.

C_{dr} = Coeficiente de descarga de la sección rectangular del vertedor compuesto.

C_{dt} = Coeficiente de descarga de la sección triangular del vertedor compuesto.

$C_{\mu}, C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}$ = Constantes del modelo de turbulencia K - ε .

f = Fuerzas de cuerpo por unidad de masa.

g = Aceleración de la gravedad.

h = Carga estática del vertedor.

h_1 = Carga estática en la sección rectangular del vertedor compuesto.

h_2 = Carga estática en la sección triangular del vertedor compuesto.

K = Energía cinética turbulenta.

k = Coeficiente dependiendo de las dimensiones y forma del vertedor.

n = número adimensional que depende de la forma del vertedero.

\dot{m}_{pq} = Transferencia de masa de la fase p a la fase q .

\dot{m}_{qp} = Transferencia de masa de la fase q a la fase p .

P = Altura del vertedor.

P_K = Generación de turbulencia debido a fuerzas viscosas.

$P_{kb}, P_{\varepsilon b}$ = Influencia de las fuerzas de flotabilidad.

p = Presión dinámica.

Q = Descarga sobre el vertedor.

q^{th} = Fase q .

S_{α_q} = Término fuente.

U = Campo de velocidad.

α_q = Fracción de volumen en la fase q .

ε = Dispersión de la energía cinética turbulenta.

θ = Ángulo de la muesca en el vertedor triangular.

μ = Viscosidad dinámica.

μ_t = Viscosidad turbulenta.

ρ = Densidad del fluido.

ρ_q = Densidad de la fase q .

$\sigma_k, \sigma_\varepsilon$ = Constante del modelo de turbulencia K - ε

Referencias

ASTM, American Society for Testing and Materials. (1993). *Standard method for open-channel flow measurement of water with thin-plate weirs* (ASTM D5242). West Conshohocken, USA: American Society for Testing and Materials. Recuperado de <https://allcivilstandard.com/wp-content/uploads/2018/12/D-5242.pdf>

Aydin, I., Altan-Sakarya, A. B., & Sisman, C. (2011). Discharge formula for rectangular Sharp-crested weirs. *Flow Measurement and Instrumentation*, 22(2), 144-151. DOI: 10.1016/j.flowmeasinst.2011.01.003

Bagheri, S., & Heidarpour, M. (2009). Flow over rectangular sharp crested weirs. *Irrigation Science*, 28(2), 173-179. DOI: 10.1007/s00271-009-0172-1

- Bautista, C., Robles, O., Júnez, F. H., & Playán, E. (2013). Discharge coefficient analysis for triangular sharp-crested weirs using low-speed photographic technique. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 140(3), 06013005. DOI: 10.1061/(ASCE)IR.1943-4774.0000683
- Bos, M. G. (1989). *Discharge measurement structures* (3rd revised edition). Wageningen, The Netherlands: International Institute for Land Reclamation and Improvement. Recuperado de <https://www.samsamwater.com/library/pub20.pdf>
- Bos, M. G., Replogle, J. A., & Clemmens, A. J. (1984). *Flow measuring flumes for open channel systems*. New York, USA: John Wiley & Sons.
- BSI, British Standards Institution. (1965). *BSI 3680-4A. Thin-plate weirs and venture flumes in methods of measurement of liquid flow in open channel. Part 4A*. London, UK. DOI: 10.3403/01558628U
- Chanel, P. G., & Doering, J. C. (2008). Assessment of spillway modelling using computational fluid dynamics. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 35(12), 1481-1485. DOI: 10.1139/l08-094
- Chen, Y., Fu, Z., Chen, Q., & Cui, Z. (2018). Discharge coefficient of rectangular short-crested weir with varying slope coefficients. *Water*, 10(2), 204. DOI: 10.3390/w10020204
- Clemmens, A. J., Wahl, T. L., Bos, M. G., & Replogle, J. A. (2001). *Water measurement with flumes and weirs* (Publication 58). Wageningen, The Netherlands: International Institute for Land Reclamation and

Improvement/ILRI. Recuperado
de <https://library.wur.nl/WebQuery/wurpubs/fulltext/82325>

Duró, G., Dios, M. D., López, A., Liscia, S. O., & Angulo, M. A. (September, 2012). Comparación de simulaciones en CFD y modelación física de una central hidrocombinada. In: *XXIV Congreso Latinoamericano de Hidráulica*. San José de Costa Rica, Costa Rica. DOI: 10.13140/RG.2.1.3880.8406

El-Alfy, K. S. (2005). Effect of vertical curvature of flow at weir crest on discharge coefficient. In: *The 9th International Water Technology Conference*. Sharm El-Sheikh, Egypt. Recuperado de https://pdfs.semanticscholar.org/83f8/4250668c383dd5121cf56e343f41d42902e3.pdf?_ga=2.137244208.1604846566.1576367520-1959585653.1576367520

Emiroglu, M. E., Kaya, N., & Agaccioglu, H. (2010). Discharge capacity of labyrinth side weir located on a straight channel. *Journal of Irrigation Drainage Engineering*, 136(1), 37-46. DOI: 10.1061/(ASCE)IR.1943-4774.0000112

Fernández, J. M. (2012). *Técnicas numéricas en ingeniería de fluidos: introducción a la dinámica de fluidos computacional (CFD) por el método de volumen finito*. Barcelona, España: Reverté.

Fu, Z. F., Cui, Z., Dai, W. H., & Chen, Y. J. (2018). Discharge coefficient of combined orifice-weir flow. *Water*, 10(6), 699. DOI: 10.3390/w10060699

- Henderson, F. M. (1966). *Open channel flow*. New York, USA: MacMillan Publishing Co., Inc. Recuperado de <https://heidarpour.iut.ac.ir/sites/heidarpour.iut.ac.ir/files//u32/open-henderson.pdf>
- Hirt, C. W., & Nichols, B. D. (1981). Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39(1), 201-225. DOI: 10.1016/0021-9991(81)90145-5
- Ho, D. K., Boyes, K. M., & Donohoo, S. M. (December, 2001). Investigation of spillway behavior under increased maximum flood by computational fluid dynamics technique. *Procedures. 14th Australasian Fluid Mechanics Conference*. Adelaide University, Adelaide, Australia. Recuperado de <https://people.eng.unimelb.edu.au/imarusic/proceedings/14/fm010091.pdf>
- Ho, D. K., Boyes, K. M., Donohoo, S. M., & Cooper, B. (October, 2003). Numerical flow analysis for spillways. *Procedures. 43rd ANCOLD Conference*. Hobart, Tasmania. Recuperado de <https://www.flow3d.com/wp-content/uploads/2014/08/Numerical-Flow-Analysis-for-Spillways.pdf>
- ISO, International Organization for Standardization. (1980). ISO 1438/1-1980(E), *Water flow measurement in open channels using weirs and venturi flumes. Part 1: Thin plate weirs*. International Organization for Standardization. Geneve, Switzerland

- Jan, C. D., Chang, C. J., & Kuo, F. H. (2009). Experiments on discharge equations of compound broad-crested weirs. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 135(4), 511-515. DOI: 10.1061/(ASCE)IR.1943-4774.0000019
- Jan, C. D., Chang, C. J., & Lee, M. H. (2006). Discussion of "Design and calibration of a compound sharp-crested weir" by Martinez, J., Reza, J., Morillas, M. T., & López, J. G. *Journal of Hydraulic Engineering*, 132(8), 868-871. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(2006)132:8(868)
- Jiang, L., Diao, M., Sun, H., & Ren, Y. (2018). Numerical modeling of flow over a rectangular broad-crested weir with a sloped upstream face. *Water*, 10(11), 1663. DOI: 10.3390/w10111663
- Jones, W. P., & Launder, B. E. (1972). The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat Mass Transfer*, 15(2), 301-314. DOI: 10.1016/0017-9310(72)90076-2
- Kumar, S., Ahmad, Z., & Mansoor, T. (2011). A new approach to improve the discharging capacity of sharp-crested triangular plan form weirs. *Flow Measurement and Instrumentation*, 22(3), 175-180. DOI: 10.1016/j.flowmeasinst.2011.01.006
- Launder, B. E., & Spalding, D. B. (1974). The numerical computation of turbulence flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(2), 269-289. DOI: 10.1016/0045-7825(74)90029-2
- Lee, J. T., Chan, H. C., Huang, C. K., & Leu, J. M. (2012). Experiments on hydraulic relations for flow over a compound sharp-crested weir.

International Journal of Physical Sciences, 7(14), 2229-2237. DOI: 10.5897/IJPS11.1695

Negm, A. A., Al-Brahim, A. M., & Alhamid, A. A. (2002). Combined-free flow over weirs and below gates. *Journal of Hydraulic Research*, 40(3), 359-365. DOI: 10.1080/00221680209499950

Olsen, N. R., Nils, R. B., & Kjellesvig, H. M. (1998). Three-dimensional numerical flow modeling for estimation of spillway capacity. *Journal of Hydraulic Research*, 36(5), 775-784. DOI: 10.1080/00221689809498602

Rady, R. M. A. (2011). 2D-3D modeling of flow over sharp-crested weirs. *Journal of Applied Sciences Research*, 7(12), 2495-2505. Recuperado de <https://www.flow3d.com/wp-content/uploads/2014/08/2D-3D-Modeling-of-Flow-Over-Sharp-Crested-Weirs.pdf>

Sánchez, J. M. C., & Elsitdié, L. G. C. (Mayo, 2011). Consideraciones del mallado aplicadas al cálculo de flujos bifásicos con las técnicas de dinámica de fluidos computacional. *Jornada de Introducción a la Investigación de la UPCT*. Universidad Politécnica de Cartagena, Fuente Álamo, España. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Luis_Castillo26/publication/277210544_Consideraciones_del_mallado_aplicadas_al_calculo_de_flujos_bifasicoscon_las_tecnicas_de_dinamica_de_fluidos_computacional/links/55a7f20808ae815a042129f3/Consideraciones-del-mallado-aplicadas-al-calculo-de-flujos-bifasicoscon-las-tecnicas-de-dinamica-de-fluidos-computacional.pdf

- Shen, J. (1981). *Discharge characteristics of triangular-notch thin-plate weirs. Studies of flow of water over weirs and dams*. Geological Survey Water-Supply Paper 1617-B. Washington, DC, USA: United States Department of the Interior. DOI: 10.3133/wsp1617B
- Skertchly, M. L. (1988). *Manual de diseño de estructuras de aforo*. Jiutepec, México: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Recuperado de <https://www.scribd.com/document/342624769/MANUAL-DISENO-ESTRUCTURAS-DE-AFORO-pdf>
- Sotelo, G. (1997). *Hidráulica general* (Vol. 1). México, DF, México: Editorial Limusa-Noriega. Recuperado de https://www.academia.edu/38544755/Hidr%C3%A1ulica_General_Vol_1_Fundamentos_Gilberto_Sotelo_%C3%81vila
- Spalart, P.R. and Allmaras, S.R., "A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamics Flows", Boeing Commercial Airplane Group, Seattle, Washington, 1992.
- Tian, Z., Wang, W., Bai, R., & Li, N. (2018). Effect of flaring gate piers on discharge coefficient for finite crest-length weirs. *Water*, 10(10), 1349. DOI: 10.3390/w10101349
- USBR, United States Department of the Interior, Bureau of Reclamation. (1997). *Water measurement manual* (3rd ed.). Denver, USA: U.S. Government Printing Office. Recuperado de https://www.usbr.gov/tsc/techreferences/mands/wmm/WMM_3rd_2001.pdf

Zahiri, A., Tang, X., & Azamathulla, H. Md. (2014). Mathematical modeling of flow discharge over compound sharp-crested weirs. *Journal of Hydro-Environment Research*, 8(3), 194-193. DOI: 10.1016/J.JHER.2014.01.001

Zuhair, A., & Zubaidy, R. (2013). Numerical simulation of two-phase flow. *International Journal of Structural and Civil Engineering Research*, 2(3). Recuperado de <http://www.ijscer.com/uploadfile/2015/0429/20150429074507182.pdf>