

DINÁMICA DE LOS MANTOS FREÁTICOS SOMEROS EN LOS DISTRITOS DE RIEGO

SHALLOW WATER TABLE DYNAMICS IN IRRIGATION DISTRICTS

Pedro Lázaro¹, Carlos Fuentes¹, Manuel Ortega-Escobar², Luis Rendón-Pimentel³ y Felipe Zataráin-Mendoza¹

¹Coordinación de Tecnología de Riego y Drenaje. Instituto Mexicano de Tecnología del Agua. Paseo Cuauhnáhuac Núm. 8532, Col. Progreso, Jiutepec, Morelos. (plazaro@riego.imta.mx) (cfuentes@riego.imta.mx) ²Especialidad de Postgrado en Hidrociencias. IRENAT. Colegio de Postgraduados. 56230, Montecillo, Edo. de México. ³Gerencia de Distritos y Unidades de Riego. Comisión Nacional del Agua. Insurgentes Sur 1960, México, D.F.

RESUMEN

Se presenta un modelo numérico para simular la transferencia de agua en los mantos freáticos someros. El modelo se basa en la ecuación diferencial que resulta de la integración de la ecuación de Richards en la dirección vertical. El esquema numérico para la solución de la ecuación se obtiene de la integración de ésta utilizando el método del elemento finito en el espacio y un esquema centrado en diferencias finitas en el tiempo. El dominio de solución utilizado en la construcción, calibración y aplicación del modelo es el Distrito de Riego 076 Valle del Carrizo ubicado al norte del Edo. de Sinaloa, México. La aplicación del modelo se efectuó en dos etapas: la primera es una simulación inversa para estimar el flujo de recarga en diferentes intervalos y la segunda es una simulación directa de la respuesta del sistema para diversos escenarios. Los resultados permiten concluir que el modelo es útil para fines de planificación. Se presenta también un estudio de la variabilidad espacial de la elevación de la superficie de manto freático en el dominio de estudio, en el que se muestra que los semivariogramas para esta variable pueden ser adecuadamente representados con un semivariograma teórico potencial con valor de la potencia $\beta=1.5$ y que está relacionada de manera única con la dimensión fractal ($D \cong 2.25$) de la superficie del manto.

Palabras clave: Hidrología, recarga, simulación numérica, variabilidad espacial.

INTRODUCCIÓN

El entendimiento de los procesos que rigen la transferencia de agua en los mantos freáticos someros, es cada vez más necesario al incrementarse los problemas originados por la sobre-elevación de la superficie de los mantos freáticos (oxigenación deficiente, salinización progresiva de los suelos, etc.) en los distritos de riego, causada a su vez por la baja eficiencia global en el manejo del agua utilizada en el riego. El estudio de la dinámica de este fenómeno, basado en el uso de modelos físico-matemáticos, permite identificar las

ABSTRACT

A numerical model for water transfer simulation in shallow water tables is presented. The model is based on a differential equation resulting from the integration of Richards' equation in the vertical direction. The numerical scheme to solve this equation is obtained from its integration using a finite element approach in space, and from the integration using a finite difference-centered-scheme approach in time. The solution domain used in the construction, calibration, and application of the model was the irrigation district 076 "Valle del Carrizo" located in the northern part of the State of Sinaloa, México. The application of the model was carried out in two stages: the first is an inverse simulation to estimate the recharge flow for several periods of time, and the second is a direct simulation of the response of the system under different scenarios. It was concluded that the model is very useful for planning purposes. Additionally, a study on spatial variability of shallow water-table fluctuation in the domain study is presented, where semivariograms of this variate can be adequately represented by a potential theoretical semivariogram with an exponent $\beta=1.5$, and this is uniquely related to the fractal dimension ($D \cong 2.25$) for shallow water-table surfaces.

Key words: Hydrology, recharge, numerical simulation, spatial variability.

INTRODUCTION

Understanding the processes involved in water transfer in shallow water tables is necessary due to the increasing problems caused by their surface elevation (deficient oxygenation, progressive soil salinization, etc.) in irrigation districts. This, in turn, is caused by low global efficiency in irrigation water management. The study of the dynamics of this phenomenon using physical and mathematical models helps to identify the main causes of these problems. They are also helpful predicting its space-time behavior in order to create strategies to solve them.

Water transfer in the shallow water tables can be strictly studied by applying the Mass Conservation

Recibido: Septiembre, 1998. Aprobado: Enero, 2000.

Publicado como ARTÍCULO en *Agrociencia* 34: 387-402. 2000.

causas principales que originan el problema y predecir su comportamiento en el espacio y el tiempo para elaborar estrategias que permitan solucionar estos problemas.

La transferencia de agua en los mantos freáticos someros puede estudiarse en forma rigurosa con la aplicación del Principio de Conservación de Masa y la Ley de Darcy en la zona saturada del medio poroso, es decir:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} + T = 0 \tag{1}$$

$$\vec{q} = -K(\psi)\nabla(\psi + z) \tag{2}$$

donde $\theta = \theta(x, y, z, t)$ es el contenido volumétrico de agua (L^3L^{-3}), t es el tiempo (T), ∇ es el operador gradiente, $T = T(x, y, z, t)$ es la tasa de extracción de agua por las plantas en la unidad de tiempo (T^{-1}), $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$ es el flujo unitario de agua (gasto por unidad de superficie de suelo expuesto perpendicularmente al movimiento del agua) y q_x, q_y, q_z son sus componentes siguiendo los ejes cartesianos (LT^{-1}), z es el potencial gravitacional asimilado a la coordenada espacial vertical (L), ψ es el potencial de presión del agua en el suelo expresado como altura equivalente de columna de agua (L), y $K(\psi)$ es el coeficiente de proporcionalidad conocido como conductividad hidráulica (LT^{-1}).

La ecuación diferencial que describe la dinámica de los mantos freáticos someros resulta de la integración de la Ecuación 1 en la dirección z , desde H_o a H (Figura 1), es decir:

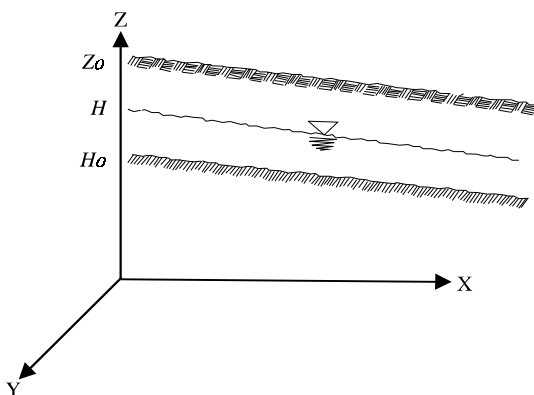


Figura 1. Esquema general de la posición del manto freático en el perfil del suelo. H = Elevación de la superficie del manto freático; Z_o = Cota de terreno; H_o = Elevación del estrato impermeable.

Figure 1. General position scheme of the water table in the ground profile. H = Water table elevation; Z_o = Terrain limit; H_o = Impermeable layer elevation.

Principle and Darcy's Law in the saturated zone of the porous media,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} + T = 0 \tag{1}$$

$$\vec{q} = -K(\psi)\nabla(\psi + z) \tag{2}$$

where $\theta = \theta(x, y, z, t)$ is the volumetric water content (L^3L^{-3}), t is time (T), ∇ is the gradient operator, $T = T(x, y, z, t)$ is the water extraction rate by plants in time (T^{-1}), $\vec{q} = q(q_x, q_y, q_z)$ is the unitary water flow (flow per surface unit of soil perpendicularly exposed to the water movement, and q_x, q_y, q_z are its components in the Cartesian axis (LT^{-1}), z is the gravity potential in the vertical spatial coordinate (L), ψ is the water pressure potential in the ground expressed as the equivalent water column height (L) and $K(\psi)$ is the proportionality coefficient known as hydraulic conductivity (LT^{-1}).

The differential equation that describes the shallow water table dynamics results from integrating Equation 1 in the z -direction, from H_o to H (Figure 1),

$$\int_{H_o}^H \frac{\partial \theta}{\partial t} dz = - \int_{H_o}^H \frac{\partial q_x}{\partial x} dz - \int_{H_o}^H \frac{\partial q_y}{\partial y} dz - \int_{H_o}^H \frac{\partial q_z}{\partial z} dz - \int_{H_o}^H T dz \tag{3}$$

To evaluate the integrals, Leibnitz's Rule and the Mean Value Theorem are used, giving the following results,

$$\int_{H_o}^H \frac{\partial \theta}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{H_o}^H \theta(x, y, z, t) dz - \theta(x, y, H, t) \frac{\partial H}{\partial t} \tag{4}$$

$$\int_{H_o}^H \frac{\partial q_x}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} [(H - H_o)\langle q_x \rangle] - q_{xH} \frac{\partial H}{\partial x} + q_{xH_o} \frac{\partial H_o}{\partial x} \tag{5}$$

$$\int_{H_o}^H \frac{\partial q_y}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} [(H - H_o)\langle q_y \rangle] - q_{yH} \frac{\partial H}{\partial y} + q_{yH_o} \frac{\partial H_o}{\partial y} \tag{6}$$

$$\int_{H_o}^H \frac{\partial q_z}{\partial z} dz = q_{zH} - q_{zH_o} \tag{7}$$

$$\int_{H_o}^H T dz = \langle T \rangle (H - H_o) \tag{8}$$

$$\int_{H_o}^H \frac{\partial \theta}{\partial t} dz = - \int_{H_o}^H \frac{\partial q_x}{\partial x} dz - \int_{H_o}^H \frac{\partial q_y}{\partial y} dz - \int_{H_o}^H \frac{\partial q_z}{\partial z} dz - \int_{H_o}^H T dz \quad (3)$$

Para evaluar las integrales se utiliza la Regla de Leibnitz y el Teorema del Valor Medio que conducen a los siguientes resultados:

$$\int_{H_o}^H \frac{\partial \theta}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{H_o}^H \theta(x, y, z, t) dz - \theta(x, y, H, t) \frac{\partial H}{\partial t} \quad (4)$$

$$\int_{H_o}^H \frac{\partial q_x}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} [(H - H_o) \langle q_x \rangle] - q_{xH} \frac{\partial H}{\partial x} + q_{xH_o} \frac{\partial H_o}{\partial x} \quad (5)$$

$$\int_{H_o}^H \frac{\partial q_y}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} [(H - H_o) \langle q_y \rangle] - q_{yH} \frac{\partial H}{\partial y} + q_{yH_o} \frac{\partial H_o}{\partial y} \quad (6)$$

$$\int_{H_o}^H \frac{\partial q_z}{\partial z} dz = q_{zH} - q_{zH_o} \quad (7)$$

$$\int_{H_o}^H T dz = \langle T \rangle (H - H_o) \quad (8)$$

donde $H=H(x, y, t)$ es la elevación de la superficie del manto freático (L), $H_o = H_o(x, y)$ es la elevación del estrato impermeable (L), $z_o = z_o(x, y)$ es la cota de la superficie del terreno (L), $\langle q_x \rangle$ y $\langle q_y \rangle$ son los flujos promedios de Darcy en el espesor saturado $(H-H_o)$, q_{xH} , q_{xH_o} , q_{yH} , q_{yH_o} , q_{zH} y q_{zH_o} son los flujos darcinianos en la dirección de las coordenadas espaciales en las elevaciones H y H_o , respectivamente; $\langle T \rangle$ es la tasa media de extracción de agua por las plantas en la unidad de tiempo, y el coeficiente de porosidad drenable se define como: $\langle \mu \rangle = \langle \theta_s \rangle - \langle \theta_{NS} \rangle$. Se denota por $\langle \theta_s \rangle$ y $\langle \theta_{NS} \rangle$ a los valores medios del contenido de humedad en la zona saturada y la no saturada, respectivamente.

Al sustituir las Ecuaciones 4, 5, 6, 7 y 8 en la 3, se obtiene la ecuación diferencial de los mantos freáticos someros en su forma general:

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle \frac{\partial H}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial x} [(H - H_o) \langle q_x \rangle] - \frac{\partial}{\partial y} [(H - H_o) \langle q_y \rangle] \\ & + q_{xH} \frac{\partial H}{\partial x} + q_{yH} \frac{\partial H}{\partial y} - q_{xH_o} \frac{\partial H_o}{\partial x} - q_{yH_o} \frac{\partial H_o}{\partial y} \\ & - (q_{zH} - q_{zH_o}) - \langle T \rangle (H - H_o) \end{aligned} \quad (9)$$

where $H=H(x, y, z)$ is the water table elevation (L), $H_o = H_o(x, y)$ is the impermeable layer elevation (L), $z_o = z_o(x, y)$ is the ground surface (L), $\langle q_x \rangle$ and $\langle q_y \rangle$ are Darcy's mean flows in the saturated layer $(H-H_o)$, the Darcinian flows in the direction of the spatial coordinates in elevations H and H_o are expressed by q_{xH} , q_{xH_o} , q_{yH} , q_{yH_o} , q_{zH} and q_{zH_o} , respectively, $\langle T \rangle$ is the mean water extraction rate by plants in time, and the drainable porosity coefficient is defined as: $\langle \mu \rangle = \langle \theta_s \rangle - \langle \theta_{NS} \rangle$. Here, $\langle \theta_s \rangle$ and $\langle \theta_{NS} \rangle$ are the mean moisture content values in the saturated and unsaturated zones, respectively.

By substituting Equations 4, 5, 6, 7, and 8 in Equation 3, the differential equation for the shallow water tables in its general form is obtained,

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle \frac{\partial H}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial x} [(H - H_o) \langle q_x \rangle] - \frac{\partial}{\partial y} [(H - H_o) \langle q_y \rangle] \\ & + q_{xH} \frac{\partial H}{\partial x} + q_{yH} \frac{\partial H}{\partial y} - q_{xH_o} \frac{\partial H_o}{\partial x} - q_{yH_o} \frac{\partial H_o}{\partial y} \\ & - (q_{zH} - q_{zH_o}) - \langle T \rangle (H - H_o) \end{aligned} \quad (9)$$

Darcy's mean flows are calculated using Equation 2 given a hydrostatic pressure distribution, meaning that $\psi(x, y, z, t) = H(x, y, t) - z$. Using the Mean Value Theorem to evaluate the integrals within the defined limits, the following expressions for mean flows are obtained,

$$\langle q_x \rangle = - \langle Ks \rangle \frac{\partial H}{\partial x}; \quad \langle q_y \rangle = - \langle Ks \rangle \frac{\partial H}{\partial y} \quad (10)$$

It is evident that acceptance of a hydrostatic pressure distribution in Equations 9 and 10 is the same as adopting Dupuit's hypothesis. This is, to consider that the flow is proportional to the H-gradient in the flow direction, being $\langle Ks \rangle$ a weighted proportionality constant known as saturated hydraulic conductivity.

The substitution of Equation 10 in 9, considering that Darcy's flows are negligible in the impermeable layer, results in

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle \frac{\partial H}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x} \left(\langle Ks \rangle (H - H_o) \frac{\partial H}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\langle Ks \rangle (H - H_o) \frac{\partial H}{\partial y} \right) + r \end{aligned} \quad (11)$$

where r has been defined as,

Los flujos medios de Darcy se calculan con la Ecuación 2 bajo el supuesto de una distribución hidrostática de presiones, es decir: $\psi(x, y, z, t) = H(x, y, t) - z$; y al utilizar el Teorema del Valor Medio para evaluar las integrales en los límites definidos se obtienen las expresiones para los flujos medios:

$$\langle q_x \rangle = -\langle Ks \rangle \frac{\partial H}{\partial x}; \quad \langle q_y \rangle = -\langle Ks \rangle \frac{\partial H}{\partial y} \quad (10)$$

Es evidente que en las Expresiones 9 y 10 el aceptar una distribución hidrostática de presiones equivale a adoptar la hipótesis de Dupuit, es decir, considerar que el flujo es proporcional al gradiente de H en la dirección del flujo, con $\langle Ks \rangle$ como una constante de proporcionalidad ponderada conocida como conductividad hidráulica a saturación.

Finalmente, la sustitución de la Ecuación 10 en la 9, y el considerar que los flujos de Darcy son despreciables en el estrato impermeable, se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\langle Ks \rangle (H - H_o) \frac{\partial H}{\partial x} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\langle Ks \rangle (H - H_o) \frac{\partial H}{\partial y} \right) + r \end{aligned} \quad (11)$$

en donde r se ha definido como:

$$r(x, y, t) = q_{xH} \frac{\partial H}{\partial x} + q_{yH} \frac{\partial H}{\partial y} - q_{zH} - \langle T \rangle (H - H_o)$$

La resolución analítica o numérica de la Ecuación 11, sujeta a condiciones límites adecuadas, proporciona la variación de la superficie libre de los mantos freáticos si la porosidad drenable, la conductividad hidráulica a saturación y la intensidad de recarga son conocidas. De estas variables, las más difíciles de estimar son la porosidad drenable y la intensidad de recarga.

Una fórmula para calcular la porosidad drenable, en función de la elevación de la superficie del manto freático, puede obtenerse al considerar el aporte de la zona no saturada a la zona saturada, y al tener en cuenta que la lámina de agua drenada, por definición, se calcula como el producto de la porosidad drenable y la profundidad del nivel freático (P), es decir: $\ell = \mu P$. Se consideran las características hidrodinámica de Fujita-Parlage (Fuentes *et al.*, 1992) y se supone una distribución hidrostática de presiones:

$$r(x, y, t) = q_{xH} \frac{\partial H}{\partial x} + q_{yH} \frac{\partial H}{\partial y} - q_{zH} - \langle T \rangle (H - H_o)$$

Analytic or numeric solving of Equation 11, within the adequate limit conditions, gives the free surface variation of the water tables if the drainable porosity, saturated hydraulic conductivity, and the recharge intensity are known. Drainable porosity and recharge intensity are the most difficult variables to estimate.

A formula to calculate the drainable porosity in terms of the water table elevation can be obtained considering the contribution of the unsaturated zone to the saturated zone and taking into account that the drained water film, by definition, is calculated as the product of the drainable porosity and the water table depth (P), that is, $\ell = \mu P$. Fujita-Parlage's hydrodynamic characteristics (Fuentes *et al.*, 1992) are considered, and a hydrostatic pressure distribution is assumed,

$$\begin{aligned} \mu(H) = \phi \left[1 - \frac{\lambda_c}{\alpha(z_o - H)} \right. \\ \left. \ln \left(\frac{1}{1 - \alpha + \alpha \exp[-(z_o - H)/\lambda_c]} \right) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

where ϕ is the volumetric porosity of the soil, α is a non-dimensional parameter ($0 < \alpha < 1$) and λ_c is Bouwer's Integral Scale (1964).

One of the procedures to estimate the recharge intensity is from space-time observations of the water table position, which are usually obtained in irrigation districts. This procedure is part of the Theory of Inverse Methods (*i.e.*, Sun and Yeh, 1983).

Since these observations are taken in a discrete set of space-time points, the recharge intensity needs to be calculated using interpolation methods, so that values for H in points where there are no measurements are obtained.

One of the most used methods is kriging, in which variable (\hat{H}) at a given point (\bar{x}) can be estimated as a lineal combination of the observed values $H(\bar{x}_j)$, that is,

$$\hat{H}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n \eta_j(\bar{x}) H(\bar{x}_j) \quad (13)$$

The weight factors $\eta_j(\bar{x})$ (Equation 13) corresponding to point \bar{x} are calculated considering null bias and minimizing the squared estimate error. The general solution is expressed as

$$\mu(H) = \phi \left[1 - \frac{\lambda_c}{\alpha(z_o - H)} \right] \ln \left(\frac{I}{I - \alpha + \alpha \exp[-(z_o - H) / \lambda_c]} \right) \quad (12)$$

$$\eta = K^{-1} \bar{k} \quad (14)$$

donde ϕ es la porosidad volumétrica del suelo, α es un parámetro adimensional ($0 < \alpha < 1$) y λ_c es la escala integral de Bouwer (1964).

Uno de los procedimientos para estimar la intensidad de recarga es a partir de las observaciones espacio-temporales de la posición de los mantos freáticos que se obtienen normalmente en los distritos de riego. Este procedimiento forma parte de la Teoría de los Métodos Inversos (*i.e.*, Sun y Yeh, 1983).

Puesto que las observaciones se llevan a cabo en un conjunto discreto de puntos del espacio y el tiempo, para calcular la intensidad de recarga es necesario utilizar métodos de interpolación, que proporcionen los valores de H en puntos donde no hay mediciones.

Uno de los métodos más utilizados es el "krigeado" en el cual la estimación de la variable (\hat{H}) en un punto dado (\bar{x}), se obtiene como una combinación lineal de los valores observados $H(\bar{x}_j)$, es decir:

$$\hat{H}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n \eta_j(\bar{x}) H(\bar{x}_j) \quad (13)$$

Los factores de peso $\eta_j(\bar{x})$ (Ecuación 13), correspondientes al punto \bar{x} se calculan bajo las consideraciones de sesgo nulo y minimización del cuadrado del error de estimación. La solución general se expresa como:

$$\eta = K^{-1} \bar{k} \quad (14)$$

donde K es la nxn-matriz de covariancia de los datos y \bar{k} es el n-vector de covariancia entre los datos y la incógnita. En la Ecuación 14 pueden ser incluidos multiplicadores de Lagrange, y su resolución se simplifica cuando la covariancia o el semivariograma sólo depende de la distancia entre los puntos.

El semivariograma expresa matemáticamente la manera como la variancia de una propiedad cambia con la distancia y dirección que separa dos puntos. La hipótesis que la variancia depende únicamente de la separación, y no de las posiciones absolutas de los puntos, permite definir la semivariancia γ como la mitad de la esperanza del

where K is the nxn-covariance data matrix and \bar{k} is the covariance n-vector between the data and the unknown. LaGrange multipliers can be included into Equation 14, simplifying its solution when the covariance or the semivariogram only depends on the distance between the points.

The semivariogram mathematically expresses how the variance of a property changes with the distance between two points. The hypothesis that variance only depends on the points separation of the points and not on their absolute position allows to define the semivariance γ as half the expected value of the squared difference between the values of the studied variable at a given separation (Oliver and Webster, 1991),

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E \left\{ \left[Z(\bar{x} + \bar{h}) - Z(\bar{x}) \right]^2 \right\} \quad (15)$$

where $h = |\bar{h}|$, $Z(\bar{x})$ and $Z(\bar{x} + \bar{h})$ are Z 's values in any two points \bar{x} and $\bar{x} + \bar{h}$ separated by vector or distance \bar{h} and E is the expected value, then the semivariogram is the function that relates semivariance with distances.

The experimental semivariogram (Equation 15) can be calculated using the following classic estimate,

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{j=1}^{N(h)} \left[Z(\bar{x}_j + \bar{h}) - Z(\bar{x}_j) \right]^2 \quad (16)$$

where $N(h)$ is the number of point pairs separated by a distance h .

The experimental semivariogram is usually represented by theoretical models to facilitate the calculation of the covariance matrix (Samper and Carrera, 1990). Of these models, the linear, spherical, exponential, Gaussian and power model are most frequently used. The power semivariogram may be used to estimate the fractal dimension of the water table elevation since that dimension allows estimating the surface roughness, which is not possible using Gaussian or exponential semivariograms. The potential model is defined by the following equation:

$$\gamma(h) = Ch^\beta; \quad 0 < \beta < 2 \quad (17)$$

cuadrado de la diferencia entre los valores de la variable estudiada a una separación dada (Oliver y Webster, 1991):

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E \left\{ \left[Z(\bar{x} + \bar{h}) - Z(\bar{x}) \right]^2 \right\} \quad (15)$$

donde $h = |\bar{h}|$, $Z(\bar{x})$ y $Z(\bar{x} + \bar{h})$ son los valores de Z en dos puntos cualesquiera \bar{x} y $\bar{x} + \bar{h}$, separados por el vector \bar{h} que es la distancia y E es el operador esperanza. El semivariograma es, entonces, la función que relaciona la semivariancia con las distancias.

El semivariograma experimental (Ecuación 15) se puede calcular con el estimador clásico siguiente:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{j=1}^{N(h)} \left[Z(\bar{x}_j + \bar{h}) - Z(\bar{x}_j) \right]^2 \quad (16)$$

donde $N(h)$ es el número de pares de puntos separados por una distancia h .

El semivariograma experimental generalmente es representado por modelos teóricos para facilitar el cálculo de la matriz de covarianza (Samper y Carrera, 1990). De entre éstos, los de uso más frecuente son: el lineal, el esférico, el exponencial, el gaussiano y el potencial. El semivariograma potencial se puede utilizar para estimar la dimensión fractal de la elevación del manto freático, y conocer la rugosidad de la superficie, a diferencia de modelos como el gaussiano o exponencial. El modelo potencial está definido por la ecuación:

$$\gamma(h) = Ch^\beta; \quad 0 < \beta < 2 \quad (17)$$

donde C describe la intensidad de la variación y β describe la curvatura. Si $\beta=1$ el semivariograma es lineal y C es simplemente el gradiente; si $\beta < 1$ el semivariograma es convexo hacia arriba y si $\beta > 1$ el semivariograma es cóncavo hacia arriba.

El objetivo general del presente trabajo fue desarrollar un modelo numérico de simulación de la ecuación diferencial de los mantos freáticos someros, con el fin de proporcionar una aproximación a la descripción de la transferencia de agua en estos sistemas; los objetivos particulares fueron: 1) Estimar la intensidad de recarga del manto freático del Distrito de Riego (DDR) 076 Valle del Carrizo, Sin; 2) Simular la respuesta del sistema para diversos escenarios; y 3) Estudiar la variabilidad espacial de la elevación de la superficie del manto freático.

where C describes the variation intensity and β describes the curvature. If $\beta=1$, the semivariogram is linear and C is only the gradient; if $\beta < 1$, the semivariogram is convex upwards; and if $\beta > 1$, the semivariogram is concave downwards.

The general objective of this study was to develop a numerical simulation model of the differential equation of shallow water tables so that an approximation of the water transfer description in these systems could be obtained. The specific objectives were: 1) to estimate the recharge intensity for the water table in Irrigation District (IR) 076 Valle del Carrizo, Sinaloa; 2) to simulate the system's response in different scenarios; and 3) to study the spatial variability of water table elevation.

MATERIALS AND METHODS

Study area

The Irrigation District 076 Valle del Carrizo, Sinaloa, is located in the north of the State of Sinaloa. It extends over part of the Ahome and El Fuerte municipalities within 26° 05' and 26° 22' N and 108° 53' and 109° 00' W.

The total area is 45 000 ha, of which 43 259 ha are under irrigation with clay and loamy soils with low to moderate permeability. Four main channels make up the conveyance system: Fuerte - Mayo, 30 km long, concrete lined and 100 m³/s capacity; Carrizo, which has its origin in 26+960 of the Fuerte - Mayo channel, 3 km long, 60 m³/s capacity, completely lined; and Principal Norte and Principal Sur channels. Carrizo channel diverges into these last two channels at the end of its course. The first one is 27 km long, 18 of them lined, and has 28 m³/s capacity; the second is 41 km long, 16 km lined with 31 m³/s capacity.

Inefficient water use in this district has caused 20 433 ha with shallow water tables, and 8 500 ha with different salinity levels (Patrón, 1996)⁴.

The basic information for construction, adjustment and calibration of this model was, 1) geometry of the solution domain: the geometric form, area and boundaries; 2) physical characteristics: saturated hydraulic conductivity, drainable porosity, geology, etc.; and 3) water table records: location and distribution of water table observation wells within the solution domain and the available observation period.

Semivariogram estimation

The experimental semivariogram (Equation 16) was calculated based on the data and structure of the phenomenon. The calculation process for two dimensions and an irregular point distribution was based on the Momentum Method, which consists in defining the inter-distance (h) that depends on the separation between points, a tolerance (L) with respect to the inter-distance embracing all the point-pairs which are within the interval (the distance between the points in each pair are different, since it is not possible to find two point-pairs situated at

MATERIALES Y MÉTODOS

Localización y características del área de estudio

El DDR 076 Valle del Carrizo, Sinaloa, se localiza al norte del Edo. de Sinaloa. Abarca parte de los municipios de Ahome y El Fuerte; geográficamente se ubica entre las coordenadas 26° 05' y 26° 22' N y 108° 53' y 109° 00' O.

El área total es de 45 000 ha, de las cuales 43 259 ha son de riego, constituidas por suelos arcillosos y migajones, con permeabilidades de moderada a baja. El sistema de conducción está integrado por cuatro canales principales: el Fuerte-Mayo, con una longitud de 30 km, totalmente revestido de concreto y una capacidad de conducción de 100 m³/s; el Carrizo, que nace en el km 26+960 del canal Fuerte-Mayo, con una longitud de 3 km y que se encuentra revestido en su totalidad, con una capacidad de 60 m³/s. En su punto final se bifurca en los otros dos canales, el Principal Norte y Principal Sur. El primero tiene una longitud de 27 km, de los cuales 18 km están revestidos, con capacidad de 28 m³/s; y el segundo, con una longitud de 41 km con revestimiento de 16 km y una capacidad de conducción de 31 m³/s.

A causa de un uso ineficiente del agua este distrito presenta una superficie aproximada de 20 433 ha con manto freático somero y 8 500 ha con salinidad en diferente grado (Patrón, 1996)⁴.

La información básica para la construcción, ajuste y calibración del modelo fue: 1) Geometría del dominio de solución: la forma geométrica, área y fronteras; 2) Características físicas: conductividad hidráulica a saturación, porosidad drenable, geología, etc.; y 3) Historial freático: ubicación y distribución de los pozos de observación freática dentro del dominio de solución, y periodo de observación disponible.

Estimación del semivariograma

El semivariograma experimental (Ecuación 16) se calculó con base en los datos y en la estructura del fenómeno. El proceso de cálculo para dos dimensiones y una distribución irregular de puntos, con base en el Método de los Momentos, consiste en definir la interdistancia (h) que depende de la separación entre puntos, una tolerancia (L) con respecto a la interdistancia que considere en forma conjunta todas las parejas de puntos cuyas distancias se encuentren en el intervalo (debido a que la distancia entre los puntos de cada pareja son distintos y pueden no existir dos parejas de puntos situados a la misma distancia, por lo tanto no se puede aplicar la expresión correspondiente), un azimut θ puesto que $\gamma(h)$ es una función que depende de la dirección, y un ángulo de tolerancia $\Delta\theta$. El semivariograma se calculó con el número total de parejas de puntos separados una distancia h y su semivariancia.

Esquema numérico

La ecuación diferencial de los mantos freáticos someros (Ecuación 11) se resuelve en forma numérica, sujeta a las siguientes condiciones límite:

the same distance, and therefore the corresponding expression cannot be applied), an azimuth θ because $\gamma(h)$ is a direction-dependent function, and a tolerance angle $\Delta\theta$. The semivariogram was calculated according to the total number of point-pairs separated by a distance h and its semivariance.

Numerical scheme

The differential equation for the shallow water tables (Equation 11) is solved numerically subject to the following limit conditions:

1) Initial condition:

$$H(x, y, 0) = H_o(x, y); \quad t = 0, H \in \Omega$$

2) Boundary condition (Dirichlet type):

$$H(x, y, t) = H_c(x, y, t); \quad t > 0, H \in \Gamma$$

The solution domain is divided into small triangles that make up the finite elements. The base functions are defined on these elements in relation to each triangle vertex or node.

The weak form is the base equation for the solution using the Finite Element Method. It is the result of multiplying Equation 11 by a weight function (v) and integrating over the solution domain (Ω) using Green's Theorem, that is,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu v \frac{\partial H}{\partial t} d\Omega &= - \int_{\Omega} Ks\alpha(H) \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} Ks\alpha(H) \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma} Ks\alpha(H) \frac{\partial H}{\partial x} v n_x d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma} Ks\alpha(H) \frac{\partial H}{\partial y} v n_y d\Gamma + \int_{\Omega} r v d\Omega \end{aligned} \quad (18)$$

where Γ represents the domain boundary, $\alpha(H) = (H - H_o)$ is the saturated layer, n_x and n_y are the directing cosines of the angle formed by the x or y coordinate and the normal.

Equation 11 is proposed as a lineal combination of the set of base functions:

$$H \approx \hat{H}(x, y, t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \varphi_j(x, y) + \sum_{j=n+1}^{n+\tau} b_j(t) \varphi_j(x, y); \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

where $a_j(t)$ are the coefficients to be determined, $\varphi_j(x, y)$ are the linearly independent base functions, n is the number of internal nodes in the domain solution, $n+\tau$ are the boundary nodes and $b_j(t)$ is a vector of known boundary values.

⁴ Patrón C., P. 1996. Detección de necesidades de drenaje parcelario en el Valle del Carrizo, Sinaloa. Distrito de Riego Valle del Carrizo. Villa Gustavo Díaz Ordaz, Sin. México. Informe Interno. 29 p.

1) Condición inicial:

$$H(x, y, 0) = H_o(x, y), \quad t = 0, H \in \Omega$$

2) Condición de frontera (tipo Dirichlet):

$$H(x, y, t) = H_c(x, y, t), \quad t > 0, H \in \Gamma$$

El dominio de solución se divide en pequeños triángulos que constituyen los elementos finitos, sobre los cuales se definen las funciones de base en relación con cada vértice del triángulo que corresponde a un nudo.

La forma débil es la ecuación de base para la solución con el Método de los Elementos Finitos, y resulta de multiplicar la Ecuación 11 por una función de peso (v) e integrar sobre el dominio de solución (Ω) mediante el Teorema de Green, esto es:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mu v \frac{\partial H}{\partial t} d\Omega &= - \int_{\Omega} Ks\alpha(H) \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} d\Omega \\ &- \int_{\Omega} Ks\alpha(H) \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma} Ks\alpha(H) \frac{\partial H}{\partial x} v n_x d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} Ks\alpha(H) \frac{\partial H}{\partial y} v n_y d\Gamma + \int_{\Omega} r v d\Omega \end{aligned} \quad (18)$$

donde Γ representa la frontera del dominio, $\alpha(H)=(H-H_o)$ es el espesor del estrato saturado, n_x y n_y los cosenos directores del ángulo que forma la normal con la coordenada x ó y respectivamente.

La solución de la Ecuación 11 se propone como una combinación lineal del conjunto de funciones de base:

$$H \approx \hat{H}(x, y, t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \varphi_j(x, y) + \sum_{j=n+1}^{n+\tau} b_j(t) \varphi_j(x, y); \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

donde $a_j(t)$ son los coeficientes a ser determinados, $\varphi_j(x, y)$ son las funciones de base linealmente independientes, n es el número de nudos interiores en el dominio de solución, $n+\tau$ son los nudos de frontera y $b_j(t)$ es un vector de valores conocidos en la frontera.

La aplicación del enfoque de "Residuos Ponderados" de Galerkin (Zienkiewicz y Taylor, 1994) y la sustitución de la Ecuación 19 en la 18 permite obtener el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\sum_{j=1}^n \left[M_{kj} \frac{da_j}{dt} + K_{kj} a_j \right] = -C_{kj} b + Q_k + R_k; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

donde:

By applying Galerkin's weighted Residues Approach (Zienkiewicz and Taylor, 1994) and substituting Equation 19 in Equation 18, the following ordinary system of differential equations is obtained

$$\sum_{j=1}^n \left[M_{kj} \frac{da_j}{dt} + K_{kj} a_j \right] = -C_{kj} b + Q_k + R_k; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

where,

$$\begin{aligned} M_{kj} &= \sum_{j=1}^n \left[\int_{\Omega} \mu \bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_k d\Omega \right] \\ K_{kj} &= \sum_{j=1}^n \left[\int_{\Omega} Ks_m \alpha(H) \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right) d\Omega \right] \\ C_{kj} &= \sum_{j=n+1}^{n+\tau} \left[\int_{\Omega} Ks_m \alpha(H) \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right) d\Omega \right] \\ Q_k &= \int_{\Gamma} Ks_m \alpha(H) \frac{\partial H}{\partial x} \bar{\varphi}_k n_x d\Gamma + \int_{\Gamma} Ks_m \alpha(H) \frac{\partial H}{\partial y} \bar{\varphi}_k n_y d\Gamma \\ R_k &= \int_{\Omega} r_j \varphi_k d\Omega \end{aligned}$$

where $\bar{\varphi}$ are the concentrated mass functions defined as unitary functions in the barycentric region corresponding to each node and zero in the rest of the domain (Mori, 1986) and m represents a free index to describe Ks ' variation within the element. In the traditional terminology of structural mechanics, term M is known as concentrated mass system and K as the stiffness matrix.

Using linear shape form functions, the system of matrixes (Equation 20) is calculated through the following expressions,

$$\begin{aligned} M_{kj} &= \sum_e \mu_j \frac{\Delta}{3} \\ K_{kj} &= \sum_e \frac{\bar{K} s \alpha(H)}{4\Delta} (b_j b_k + c_j c_k) \\ Q_k &= \sum_e \left(\frac{L_j \alpha(H) q_x}{2} + \frac{L_j \alpha(H) q_y}{2} \right) \\ R_k &= \sum_e \frac{r_j \Delta}{3} \end{aligned}$$

where Δ is the element area, Ks is the saturated hydraulic conductivity in the element taken as the arithmetic mean according to the base functions (Neuman, 1973), μ_j is the drainable porosity corresponding to node j , L_j is the boundary length associated to each node under Dirichlet's condition, b and c are geometric factors defined according to the form functions like: $b_i = y_j - y_k$ and $c_i = x_j - x_k$. Subindices i, j , and k , each corresponding to the triangular element's vertex, run along their three possible permutations.

The time integration of System 20 is made through a finite difference centered scheme. The derivative for a_j is estimated with

$$\begin{aligned}
M_{kj} &= \sum_{j=1}^n \left[\int_{\Omega} \mu \bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_k d\Omega \right] & \left(\frac{da_j}{dt} \right)^{k+\omega} &= \frac{a_j^{k+1} - a_j^k}{\Delta t} & (21) \\
K_{kj} &= \sum_{j=1}^n \left[\int_{\Omega} K S_m \alpha(H) \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right) d\Omega \right] \\
C_{kj} &= \sum_{j=n+1}^{n+\tau} \left[\int_{\Omega} K S_m \alpha(H) \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right) d\Omega \right] \\
Q_k &= \int_{\Gamma} K S_m \alpha(H) \frac{\partial H}{\partial x} \bar{\varphi}_k n_x d\Gamma + \int_{\Gamma} K S_m \alpha(H) \frac{\partial H}{\partial y} \bar{\varphi}_k n_y d\Gamma \\
R_k &= \int_{\Omega} r_j \varphi_k d\Omega
\end{aligned}$$

donde $\bar{\varphi}$ son funciones de masa concentrada, definidas como funciones unitarias en la región baricéntrica correspondiente a cada nudo y cero en el resto del dominio (Mori, 1986), y m representa un índice libre para describir la variación de Ks en el elemento. El término M en la terminología tradicional de la mecánica estructural, se conoce como sistema de masa concentrada, y K , la matriz de rigidez.

Las matrices del sistema (Ecuación 20), al utilizar funciones de forma de tipo lineal, se calculan mediante las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
M_{kj} &= \sum_e \mu_j \frac{\Delta}{3} \\
K_{kj} &= \sum_e \frac{\bar{K} S \alpha(H)}{4\Delta} (b_j b_k + c_j c_k) \\
Q_k &= \sum_e \left(\frac{L_j \alpha(H) q_x}{2} + \frac{L_j \alpha(H) q_y}{2} \right) \\
R_k &= \sum_e \frac{r_j \Delta}{3}
\end{aligned}$$

donde Δ es el área del elemento, Ks es la conductividad hidráulica a saturación en el elemento, tomada como el promedio aritmético de acuerdo con las funciones de base utilizadas (Neuman, 1973), μ_j es la porosidad drenable correspondiente al nudo j , L_j es la longitud de la frontera asociada con cada nudo bajo condición de Dirichlet, b y c son factores geométricos definidos según las funciones de forma como: $b_i = y_j - y_k$ y $c_i = x_j - x_k$. Los subíndices i, j y k que corresponden a los vértices del elemento triangular, corren sobre sus tres posibles permutaciones.

La integración en el tiempo del Sistema 20 se efectúa mediante un esquema centrado en diferencias finitas. La derivada de a_j se aproxima con:

$$\left(\frac{da_j}{dt} \right)^{k+\omega} = \frac{a_j^{k+1} - a_j^k}{\Delta t} \quad (21)$$

Los coeficientes a_j para un tiempo intermedio $k+\omega$ se calculan con la expresión siguiente:

Coefficients for a_j for an intermediate time $k+\omega$ are calculated with the following expression:

$$a_j^{k+\omega} = (1-\omega)a_j^k + \omega a_j^{k+1}; \quad 0 \leq \frac{t_{k+\omega} - t_k}{t_{k+1} - t_k} \leq 1 \quad (22)$$

where ω is the interpolation factor.

The substitution of Equations 21 and 22 in Equation 20 results in a numerical scheme for the differential equation of the shallow water tables:

$$\left[\frac{M^{k+\omega}}{\Delta t} + \omega K^{k+\omega} \right] a^{k+1} = \left[\frac{M^{k+\omega}}{\Delta t} - (1-\omega)K^{k+\omega} \right] a^k - C^{k+\omega} b + Q^{k+\omega} + R^{k+\omega} \quad (23)$$

Water table fluctuation simulation

Direct simulation was used to predict the elevation of the water table surface by using the characteristics of the system like drainable porosity (μ), hydraulic conductivity and recharge intensity solving the numerical scheme for Equation 11.

The flow in the boundary for the same iteration, and if the related node is subject to Dirichlet's condition, is calculated by

$$Q = K^{k+\omega} a^k + C^{k+\omega} b - R^{k+\omega}$$

The inverse simulation allows a recharge intensity estimate given the actions and responses of the system under study. The numerical scheme used is obtained by directly solving for the variable R in Equation 23.

The boundary flow was calculated with the following equation,

$$Q = -\frac{L_j q_x \alpha(H)}{2} \cos\theta_x - \frac{L_j q_y \alpha(H)}{2} \cos\theta_y$$

where q_x and q_y are Darcian flows calculated with form functions along the Cartesian axes, θ_x and θ_y are the angles forming the normal with the x or y coordinate, respectively, and L_j is the length of the associated edge of element for each boundary node.

The difficulty to establish a general convergence and stability criterion for the numeric scheme solution developed requires the calibration of the model comparing the results with the data obtained from the field.

RESULTS AND DISCUSSION

The network is made up of 167 two-meter-deep observation wells. Their distribution in the area is shown in Figure 2. The approximate density is one well per

$$a_j^{k+\omega} = (1-\omega)a_j^k + \omega a_j^{k+1}; \quad 0 \leq \frac{t_{k+\omega} - t_k}{t_{k+1} - t_k} \leq 1 \quad (22)$$

donde ω es el factor de interpolación.

La sustitución de las Ecuaciones 21 y 22 en la 20, permite obtener el esquema numérico para la ecuación diferencial de los mantos freáticos someros:

$$\left[\frac{M^{k+\omega}}{\Delta t} + \omega K^{k+\omega} \right] a^{k+1} = \left[\frac{M^{k+\omega}}{\Delta t} - (1-\omega)K^{k+\omega} \right] a^k - C^{k+\omega} b + Q^{k+\omega} + R^{k+\omega} \quad (23)$$

Simulación del comportamiento del manto freático

La simulación directa se utilizó para predecir la elevación de la superficie del nivel freático, conocidas las características del sistema como son: porosidad drenable (μ), conductividad hidráulica y la intensidad de recarga, al resolver el esquema numérico de la Ecuación 11.

El flujo en la frontera para una misma iteración y si el nudo en cuestión está sujeto a la condición de Dirichlet, se calcula como:

$$Q = K^{k+\omega} a^k + C^{k+\omega} b - R^{k+\omega}$$

La simulación inversa permite estimar la intensidad de recarga, conocidas las acciones y respuestas del sistema en estudio. El esquema numérico utilizado se obtiene al despejar en forma directa la variable R de la Ecuación 23.

El flujo en la frontera se calculó con la ecuación siguiente:

$$Q = -\frac{L_j q_x \alpha(H)}{2} \cos\theta_x - \frac{L_j q_y \alpha(H)}{2} \cos\theta_y$$

donde q_x y q_y son los flujos darcinianos calculados con las funciones de forma siguiendo los ejes cartesianos, θ_x y θ_y son los ángulos que forma la normal con la coordenada x ó y , respectivamente, y L_j es la longitud de la arista del elemento asociado con cada nudo de frontera.

La dificultad de establecer un criterio general de convergencia y estabilidad para la solución del esquema numérico desarrollado, hace necesario calibrar el modelo comparando los resultados con los datos medidos en campo.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La red de pozos de observación freaticométrica tiene un total de 167 con una profundidad de 2.0 m y su distribución en el área se presenta en la Figura 2; la densidad aproximada es de un pozo en 260 ha. Las lecturas de la profundidad del manto freático se tomaron a intervalos de un mes, mediante el método de la manguera. El registro histórico de observaciones del manto freático

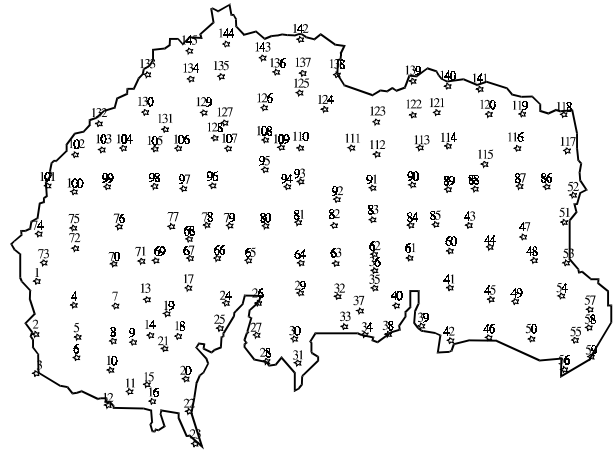


Figura 2. Distribución de los pozos de observación freaticométrica en DDR 076 Valle del Carrizo, Sinaloa.

Figure 2. Distribution of the water table observation wells, DDR 076 Valle del Carrizo, Sinaloa.

260 ha. Water table depth readings are taken every month, using the hose method. The water table observation records were available for five years, from 1992 to 1996. The saturated hydraulic conductivity (K_s) varies from 0.08 to 2.25 m/day. The arithmetic mean was 0.585 m/day and the geometric mean was 0.395 m/day.

The water table surface reacts to the recharge and discharge variation that characterizes the system; these variations reflect constant water table fluctuations. The critical months for water table height for this time interval were February (most critical) and June (least critical).

General semivariogram for the water table surface

The experimental semivariograms were calculated using Equation 16 with $z=H$. Figure 3 shows the 60 experimental variograms.

The theoretical model of power adjustment (Equation 17) was used because a well represented variable obtained from this type of semivariogram exhibits a fractal structure. When the variable depends only on independent variable $(x, Z) \in \mathbb{R}^2$, the relationship between β (Equation 17) and the fractal dimension (D) is: $\beta=4-2D$ (Falconer, 1990). The generalization of this result, when the variable depends on $(n-1)$ independent variables $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, Z) \in \mathbb{R}^n$, is $\beta=2(n-D)$ where n is the Dimension of Euclides.

For a given month and water table height, the fractal dimension is calculated as $D=3-\beta/2$ with $n=3$ because $(x, y, H) \in \mathbb{R}^3$.

Parameters C and β in Equation 17 can be obtained by the Least Square Method, that is, by minimizing the squared error sum. The monthly semivariogram points in Figure 3 show approximately the same slope. In other

disponible es de cinco años (1992 a 1996). La conductividad hidráulica a saturación (K_s) varía entre 0.08 y 2.25 m/día. La media aritmética es de 0.585 m/día y la geométrica de 0.395 m/día.

La superficie del manto freático reacciona a la variación de la recarga y descarga que caracteriza al sistema, por lo que ésta presenta un continuo cambio. Los meses más y menos críticos respecto a la profundidad de esta superficie, para el periodo de estudio, corresponden a febrero y junio, respectivamente.

Semivariograma general de la superficie del manto freático

Para calcular los semivariogramas experimentales se utilizó la Ecuación 16 con $z=H$. La Figura 3 muestra los 60 semivariogramas experimentales.

Se utilizó el modelo teórico potencial en el ajuste (Ecuación 17), pues una variable bien representada por un semivariograma de este tipo presenta una estructura fractal. Cuando la variable depende de una sola variable independiente $(x, Z) \in \mathbb{R}^2$, la relación entre β (Ecuación 17) y la dimensión fractal (D) es $\beta=4-2D$ (Falconer, 1990). La generalización de este resultado, cuando la variable depende de $(n-1)$ variables independientes $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, Z) \in \mathbb{R}^n$, es: $\beta=2(n-D)$ donde n es la Dimensión de Euclides.

Para la elevación de los mantos freáticos, en un mes dado, la dimensión fractal se calcula como: $D=3-\beta/2$, con $n=3$ puesto que $(x, y, H) \in \mathbb{R}^3$.

Los parámetros C y β de la Ecuación 17 se pueden obtener por el método de mínimos cuadrados, es decir, con la minimización de la suma de cuadrados del error. En la Figura 3 se observa que los puntos de los semivariogramas correspondientes a cada mes presentan aproximadamente la misma pendiente. En otros términos, se puede aceptar un solo valor de β de la Ecuación 17, sobre el intervalo $0 < h < 30$ km. Los resultados obtenidos son: $\beta=1.5$, $D=2.25$ y las constantes están en el intervalo $1.2 < C_j < 1.4$.

La introducción de las variancias de la posición de la superficie del manto σ_j^2 , permite definir una escala mensual (λ_j) para las interdistancias, de tal forma que $\sigma_j^2 = C_j \lambda_j^\beta$. La Ecuación 17 correspondiente a cada mes toma la forma:

$$\frac{\gamma_j(h)}{\sigma_j^2} = \left(\frac{h}{\lambda_j} \right)^\beta; \quad j = 1, 2, \dots, M$$

En escritura adimensional, la Ecuación 17 puede escribirse como: $\gamma_a = h_a^\beta$, donde $\gamma_a = \gamma_j / \sigma_j^2$ y $h_a = h / \lambda_j$. Los semivariogramas experimentales adimensionales y

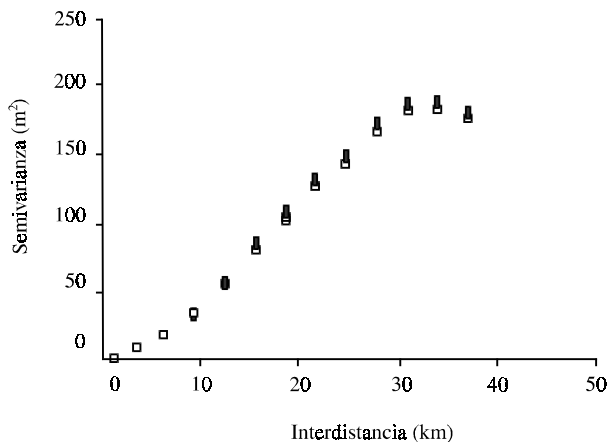


Figura 3. Semivariogramas experimentales calculados con la Ecuación 16.
Figure 3. Experimental semivariograms calculated with Equation 16.

terms, a single β value from Equation 17 can be accepted in the $0 < h < 30$ -km interval. The results are $\beta=1.5$ and $D=2.25$, and the constants are in the interval $1.2 < C_j < 1.4$.

The introduction of variancias for the water table height σ_j^2 defines a monthly scale (λ_j) for the inter-distances; so that, $\sigma = C_j \lambda_j^\beta$. Equation 17 for every month takes the following form,

$$\frac{\gamma_j(h)}{\sigma^2} = \left(\frac{h}{\lambda_j} \right)^\beta; \quad j = 1, 2, \dots, M$$

In non-dimensional terms, Equation 17 can be written as $\gamma_a = h_a^\beta$ where $\gamma_a = \gamma_j / \sigma_j^2$ and $h_a = h / \lambda_j$. The non-dimensional experimental and theoretical semivariograms are shown in Figure 4. The compound function that represents the non-dimensional theoretical semivariogram is

$$\begin{aligned} \gamma_a(h_a) &= h_a^\beta & 0 \leq h_a < h_{acr} \\ \gamma_a(h_{acr}) &= \gamma_{acr} & h_{acr} \leq h_a \\ &\text{with } h_{acr} = 1.29 \text{ and } \gamma_{acr} = 1.46 \end{aligned}$$

The water table elevation in February 1995 is shown in Figure 5. The fractal dimension $D \approx 2.25$ for the water table elevation does not change with the time, and it indicates that mathematically the water table surface has a value between 2 (a plane) and 3 (a cube); it is a rough surface.

Solution domain

The finite element network used in the numerical simulation is shown in Figure 6. The number of nodes

el semivariograma teórico adimensional se muestran en la Figura 4. La función compuesta que representa el semivariograma teórico adimensional es:

$$\begin{aligned} \gamma_a(h_a) &= h_a^\beta & 0 \leq h_a < h_{acr} \\ \gamma_a(h_{acr}) &= \gamma_{acr} & h_{acr} \leq h_a \\ \text{con } h_{acr} &= 1.29 \text{ y } & \gamma_{acr} = 1.46 \end{aligned}$$

La Figura 5 muestra la elevación del manto freático en el mes de febrero de 1995. La dimensión fractal $D \approx 2.25$ de la elevación de los mantos freático no cambia con el tiempo e indica que esta superficie es más que un plano pero menos que un cubo; es una superficie rugosa.

Discretización del dominio de solución

La malla de elementos finitos utilizada en la simulación numérica se muestra en la Figura 6. El número de nudos utilizados fueron 473 y se concentran más en las cercanías de la frontera que en el resto del dominio.

La simulación numérica se llevó a cabo considerando las siguientes características de los suelos: $Ks=2.32 \text{ cm h}^{-1}$, $\phi=0.5 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$, $\alpha=0.95$ y $\lambda_c=0.45 \text{ m}$ (tomadas de González *et al.*, 1997) y se supuso que no cambian en el tiempo. Los parámetros anteriores se utilizan para calcular la porosidad drenable (Ecuación 12) para cada nivel de tiempo, en función de la elevación del nivel freático (H).

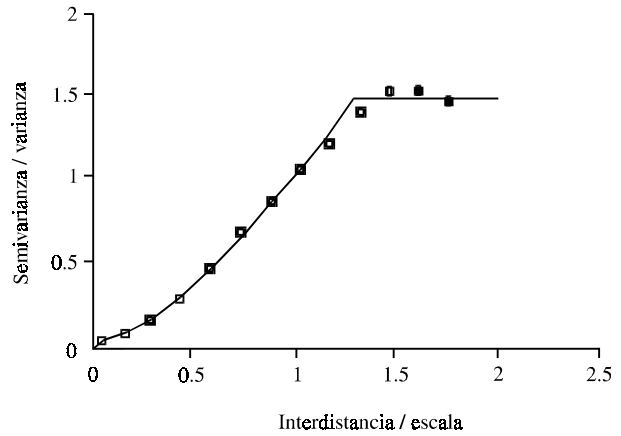


Figura 4. Semivariogramas experimental y la función teórica de ajuste.

Figure 4. Experimental semivariograms and the theoretical adjustment function.

used was 473, and they concentrate closer to the boundary than to the rest of the domain.

The numerical simulation was carried out considering the following soil characteristics (taken from González *et al.*, 1997): $Ks=2.32 \text{ cm h}^{-1}$, $\phi=0.5 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$, $\alpha=0.95$ and $\lambda_c=0.45 \text{ m}$. It was assumed that these parameters do not change in time. The given parameters are used to calculate drainable porosity (Equation 12) for each time interval with relation to the water table fluctuation (H).

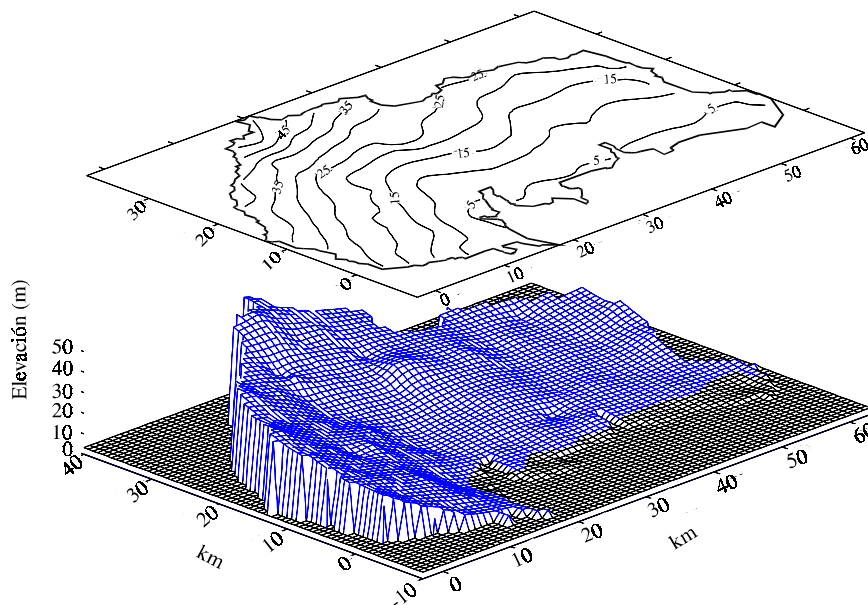


Figura 5. Elevación del manto freático para febrero de 1995. La dimensión fractal de la superficie es de 2.25.
Figure 5. Water table elevation for February 1995. The surface's fractal dimension is 2.25.

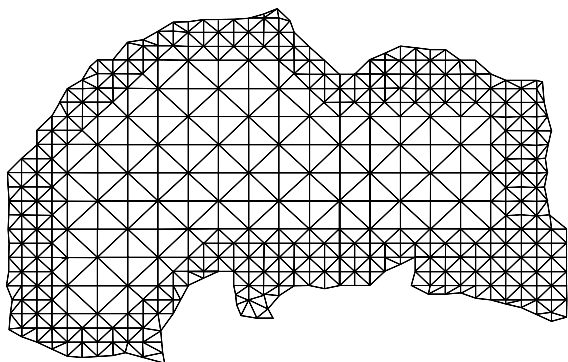


Figura 6. Malla de elementos, DDR 076 Valle del Carrizo, Sinaloa.
Figure 6. Elements network, DDR 076 Valle del Carrizo, Sinaloa.

Simulación inversa

La simulación inversa se efectuó para calcular la recarga mensual para cuatro ciclos agrícolas (1993 a 1996) utilizando pasos de tiempo de un día. Los resultados indicaron que durante los meses de octubre a febrero se presentan las mayores recargas a nivel global en el distrito. Lo anterior es evidente puesto que durante este periodo se aplica la mayor cantidad de riegos para satisfacer la demanda de los cultivos.

Es importante mencionar que del volumen total que entra en la frontera, en promedio para los cuatro ciclos agrícolas, aproximadamente 86 % se aporta en la frontera delimitada por el canal de distribución norte. Probablemente estas aportaciones se deben a pérdidas en el canal u otras contribuciones del área adyacente.

En la Figura 7 se presenta la configuración de las isorrecargas para febrero de 1995, que corresponde al mes más crítico, observándose que cerca de 48.3 % del área presenta recargas entre 0 y 20 mm, 21.57 % entre 20

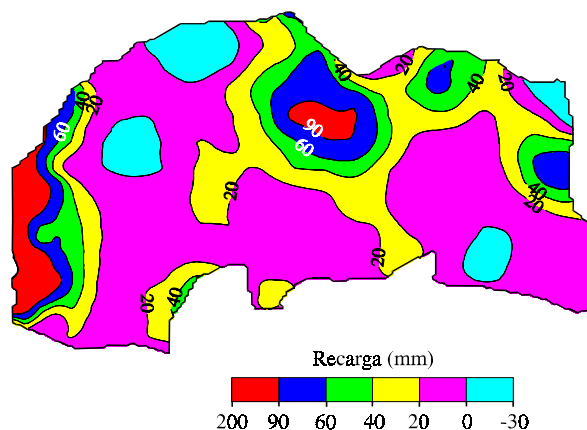


Figura 7. Recarga a nivel mensual para febrero de 1995, DDR 076 Valle del Carrizo, Sinaloa.
Figure 7. Monthly recharge for February 1995, DDR 076 Valle del Carrizo, Sinaloa.

Inverse simulation

Inverse simulation was used to calculate the monthly recharge for four agricultural cycles (1993 to 1996) using one-day time steps. The results indicated that the biggest recharges occur from October to February at a global district level. This is evident because during this period most of the irrigation is applied to satisfy water demand of the crop.

It is important to mention that approximately 86 % of the total water volume that enters this boundary (average in the four agricultural cycles) comes from the boundary limited by Canal Norte. Probably these contributions are due to water filtration through the channel or other contributions from the adjacent area.

The configuration of the recharge contour for February 1995, which corresponds to the most critical month, is shown in Figure 7. Approximately 48.3 % of the area presents recharges between 0 and 20 mm, 21.57 % between 20 and 40 mm, 18.06 % between 40 and 90 mm, and 4.78 % between 90 and 200 mm. Recharges greater than 20 mm occur at the boundary where Canal Norte is located and in some nearby zones to distribution Canal Sur and estuaries.

For June 1995 (least critical month), only 10.76 % of the area shows recharges between 0 and 20 mm, and there are none greater than 20 mm.

It was observed that when calculating the recharge, the value obtained from the first and second terms of the right side of Equation 11 were very small compared to that obtained from the left side term of the same equation. This implies that to estimate this variable, it is sufficient to consider only the left side term of Equation 11. It is important to analyze this approach in future studies.

Direct simulation

Direct simulation was used to evaluate the effect of different recharge options for four hypothetical scenarios. The simulation time was 60 days with one-day time steps. The simulation was made for January and February 1995.

The reference month was February 1995 (Figure 8) with the following percentages of affectation degrees as a function of the water table depth (WTD): 16.63 % between 0 and 1.0 m, 53 % from 1.0 to 1.5 m, 22 % from 1.5 to 2.0 m, and 8.37 % between 2.0 and 3.0 m.

Scenario 1: Due to the existing problems related to shallow water table levels in the area, the efficiency in the water application and conduction was improved, causing a 20 % recharge reduction within the domain. The same estimated variation of WTD within the boundary line remained unchanged. The isobate configuration is shown in Figure 9, where a decrease of

y 40 mm, 18.06 % entre 40 y 90 mm y 4.78 % entre 90 y 200 mm. Las recargas mayores de 20 mm se presentan en la frontera donde se localiza el canal de distribución norte y en algunas zonas cercanas al canal de distribución sur y esteros.

Para el mes de junio de 1995 (mes menos crítico), sólo 10.76 % del área presenta recargas que varían entre 0 y 20 mm, sin haber mayores de 20 mm.

Por otra parte, se observó que al calcular la recarga, el primero y el segundo término del lado derecho de la Ecuación 11 es muy pequeño comparado con el del lado izquierdo. Esto implica que para estimar esta variable sería suficiente si sólo se considera el término del lado izquierdo de la Ecuación 11. Es importante que en trabajos posteriores se analice esta posibilidad.

Simulación directa

La simulación directa se utilizó para evaluar el efecto de diferentes opciones de recarga para cuatro escenarios supuestos. El tiempo de simulación que se considera son 60 días con pasos de tiempo de un día. La simulación se realizó para enero y febrero de 1995.

El mes de referencia corresponde a febrero de 1995 (Figura 8), con los siguientes porcentajes de grado de afectación según la profundidad del nivel freático (PNF): 16.63 % entre 0 y 1.0 m, 53 % de 1.0 a 1.5 m, 22 % entre 1.5 y 2.0 m y 8.37 % entre 2.0 y 3.0 m.

Escenario 1: Para este ejemplo se consideró que debido a los problemas que se presentan en el área por niveles freáticos elevados, se mejoró la eficiencia en la aplicación y conducción del agua en las parcelas, originando una reducción de 20 % de la recarga en el interior del dominio. Se ha mantenido la misma variación de la profundidad del manto freático en la frontera. En la Figura 9 se presenta la configuración de las isobatas y se estimó una disminución de 7.6 % de la superficie con niveles entre 0 y 1.0 m de profundidad, y 2.25 % para niveles entre 1.0 y 1.5 m. En cambio, para valores mayores de 1.5 m la superficie se incrementó en 7.7 % y 2.18 % para profundidades mayores que 2.0 m.

Escenario 2: En este caso se consideró que debido a diversos factores, la eficiencia en el manejo del recurso disminuyó de tal forma que las recargas se incrementaron en 20 % para los meses de análisis y para los nodos que se encuentran en el interior del dominio. Esto provocó un incremento de 5 % de la superficie con niveles entre 0 y 1.0 m de profundidad, y 0.9 % para profundidades entre 1.0 y 1.5 m. La configuración de las isobatas para esta condición se muestra en la Figura 10.

Escenario 3: En este escenario se combinó la condición de recarga cero en la frontera donde se localiza el

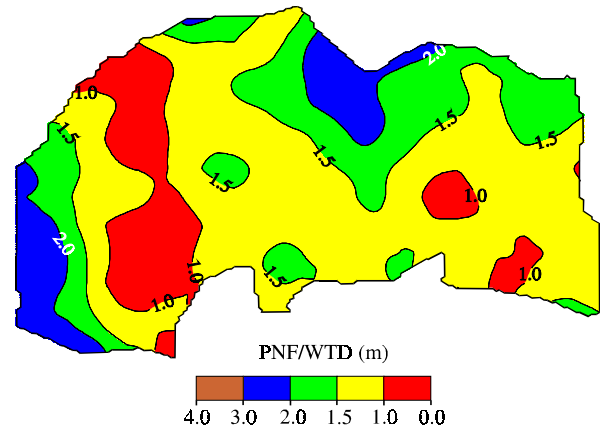


Figura 8. Configuración de las isobatas para febrero de 1995, en el DDR 076 Valle de Carrizo Sinaloa. Condición de referencia.

Figure 8. Isobate configuration for February 1995, DDR 076 Valle del Carrizo, Sinaloa. Reference condition.

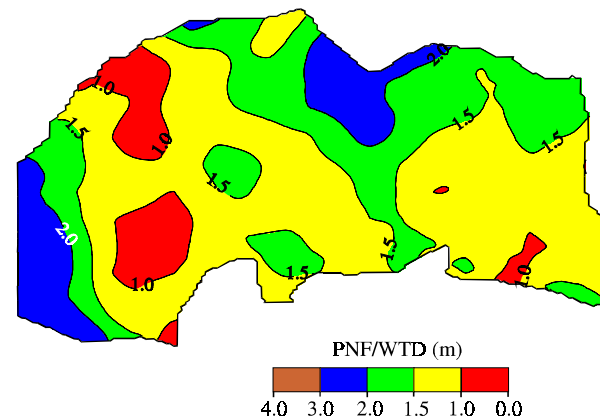


Figura 9. Configuración de las isobatas para febrero de 1995, en el DDR 076 Valle del Carrizo, Sinaloa. Escenario 1.

Figure 9. Isobate configuration for February 1995, DDR 076 Valle del Carrizo, Sinaloa. Scenario 1.

7.6 % in the area with WTD between 0 and 1.0 m was estimated and 2.25 % in the area with WTD between 1.0 and 1.5 m. For WTD greater than 1.5 m, there was an increase of 7.7 %, and for those greater than 2.0 m the area increased 2.18 %.

Scenario 2: Due to several factors, water management efficiency decreased in such a way that the recharge increased by 20 % for the months being analyzed and for the nodes within the domain. This causes a 5 % increase in the area with WTD between 0 and 1.0 m and a 0.9 % increase in the area with WTD between 1.0 and 1.5 m. The isobate configuration for this condition is shown in Figure 10.

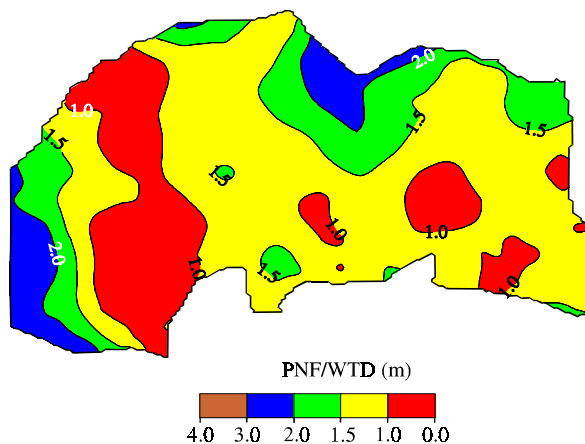


Figura 10. Configuración de las isobatas para febrero de 1995 en el DDR 076 Valle del Carrizo, Sinaloa. Escenario 2.

Figure 10. Isobate configuration for February 1995, DDR 076 Valle del Carrizo, Sinaloa. Scenario 2.

canal de distribución norte y una disminución de 20 % de la recarga en el interior del dominio. El efecto de ambas condiciones se manifiesta en la presencia de zonas con profundidades mayores de 3.0 m y una disminución de la superficie con profundidad menor de 1.5 m (Figura 11).

Los escenarios simulados muestran que el modelo numérico puede ser de gran utilidad para analizar alternativas que permitan solucionar problemas de manto freático somero y planificar mejor el recurso hidráulico en los distritos de riego.

CONCLUSIONES

La transferencia de agua en los mantos freáticos someros puede estudiarse con base en la ecuación diferencial que resulta de la integración de la ecuación de

Scenario 3: A combination of the zero recharge condition on the boundary line of Canal Norte and a 20 % recharge decrease within the domain was simulated. The effect of this combination was the presence of areas with WTD greater than 3.0 m and a decrease of the area with WTD lower than 1.5 m (Figure 11).

The simulated scenarios show that the numerical model can be useful to analyze alternatives for solving shallow water table problems and to implement appropriate water resource planning in irrigation districts.

CONCLUSIONS

Water transfer in the shallow water tables can be studied based on the differential equation resulting from the integration of Richard's equation in the vertical direction, as shown in the present study. The numerical model for this equation allows the calculation of recharge flows using inverse simulation; there is no need for expensive techniques, and it does not require large amounts of information. At the same time, the water table fluctuation for different scenarios can be predicted using direct simulation. The quality of the results is a function of the field data quality. Since the soil is heterogeneous and anisotropic, its properties changes from one point to another, so it is important to include the stochastic approach in the differential equation used. The spatial variability of the water table elevation shows a fractal structure. Using this fact, a general theoretical semivariogram was calculated with exponent $\beta=1.5$ for a power adjustment model and a fractal dimension equal to 2.25 corresponding to the water table shape found in this study.

—End of the English version—

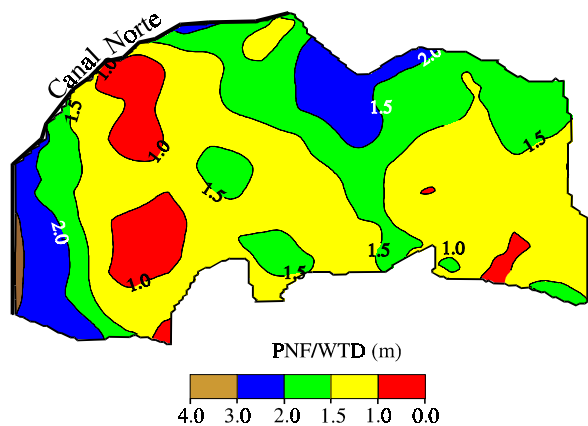


Figura 11. Configuración de las isobatas para febrero de 1995 en el DDR 076 Valle del Carrizo, Sinaloa. Escenario 3.

Figure 11. Isobates configuration for February 1995, DDR 076 Valle del Carrizo, Sinaloa. Scenario 3.

Richards en la dirección vertical, como se demuestra en el presente estudio. El modelo numérico de simulación para esta ecuación permite calcular los flujos de recarga a partir de la simulación inversa, sin emplear técnicas costosas ni requerir gran cantidad de información. Asimismo, el comportamiento de la elevación de la superficie del manto freático puede predecirse para diferentes escenarios mediante la simulación directa. La calidad de los resultados es función de la confiabilidad de los datos experimentales. Debido a que el suelo nunca es homogéneo e isotrópico, sus propiedades varían de un punto a otro, por lo que es importante incluir el aspecto estocástico en la ecuación diferencial mecanicista aquí utilizada. La variabilidad espacial de la elevación de la superficie del manto freático presenta una estructura fractal, hecho que permite calcular un semivariograma teórico general con exponente $\beta=1.5$ para un modelo potencial de ajuste y una

dimensión fractal de 2.25 para la superficie que forma.

LITERATURA CITADA

- Bouwer, H. 1964. Rapid field measurement of air entry value and hydraulic conductivity of soil as significant parameters in flow system analysis. *Water Resources Res.* 2: 729-738.
- Falconer, K. 1990. *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons. New York, USA. 288 p.
- Fuentes, C., R. Haverkamp, and J. Y. Parlange. 1992. Parameter constraints on close-form soil water relationships. *J. Hydrology* 134: 117-142.
- González, A., C. Fuentes, L. Rendón, R. Patrón, H. Saucedo, F. Brambila, R. Namuche y R. Mercado. 1997. Sobre la ecuación de Richards y la ecuación de Boussinesq de los acuíferos libres: la porosidad drenable. *In: VII Congreso Nacional de Irrigación*. Hermosillo, Son. pp: 141-145.
- Mori, M. 1986. *The Finite Element Method and Its Applications*. Macmillan. New York, USA. 187 p.
- Neuman, S. P. 1973. Saturated-unsaturated seepage by finite elements. *J. Hydraulics Division, ASAE* 99(12): 2233-2250.
- Oliver, M. A., and R. Webster. 1991. How geostatistics can help you. *Soil Use Manage.* 7(4): 206-217.
- Samper, F. J. y J. Carrera 1990. *Geoestadística: Aplicación a la Hidrogeología Subterránea*. Barcelona, España. 484 p.
- Sun, N. Z., and W. W. G. Yeh. 1983. Identification of parameter structure in groundwater inverse problem. *Water Resources Res.* 21: 869-883.
- Zienkiewicz, O. C. y R. L. Taylor. 1994. *El Método de los Elementos Finitos*. 4 ed. Mc Graw Hill. Barcelona, España. 650 p.