

Artículo publicado en el Repositorio Institucional del IMTA

<i>Título</i>	Parametrización de hidrogramas mediante interpolantes hermitianos.
<i>Autor / Adscripción</i>	Álvaro Alberto Aldama Rodríguez Aldo Iván Ramírez Orozco Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
<i>Publicación</i>	Ingeniería Hidráulica en México, 13(3): 19-28
<i>Fecha de publicación</i>	1998
<i>Resumen</i>	La parametrización de hidrogramas resulta útil en la definición de avenidas de diseño, por lo que diversas opciones de parametrización han sido propuestas en la literatura. No obstante, éstas exhiben ciertas limitaciones que restringen su aplicación en la representación de hidrogramas naturales. Esto ha motivado a los autores a desarrollar una parametrización polinomial basada en el empleo de interpolantes hermitianos, cuyas principales propiedades son la continuidad de derivadas hasta de cierto orden y la invariancia de volumen. Dichas propiedades se demuestran en este artículo así como dos ejemplos de aplicación.
<i>Identificador</i>	<a href="http://hdl.handle.net/123456789/1254">http://hdl.handle.net/123456789/1254</a>

# Parametrización de hidrogramas mediante interpolantes hermitianos

Álvaro Alberto Aldama Rodríguez  
Aldo Iván Ramírez Orozco

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

*La parametrización de hidrogramas resulta útil en la definición de avenidas de diseño, por lo que diversas opciones de parametrización han sido propuestas en la literatura. No obstante, éstas exhiben ciertas limitaciones que restringen su aplicación en la representación de hidrogramas naturales. Esto ha motivado a los autores a desarrollar una parametrización polinomial basada en el empleo de interpolantes hermitianos, cuyas principales propiedades son la continuidad de derivadas hasta de cierto orden y la invariancia de volumen. Dichas propiedades se demuestran en este artículo. También se presentan dos ejemplos de aplicación en los cuales se ha utilizado el procedimiento propuesto para definir la forma de un hidrograma unitario generado sintéticamente y para la representación de un hidrograma real de un solo pico.*

**Palabras clave:** avenidas de diseño, hidrogramas, interpolación hermitiana, parametrización polinomial.

## Introducción

En diversos estudios relacionados con la hidrología de avenidas es común que surja la necesidad de parametrizar hidrogramas, con el objeto de reducir el número de variables involucradas en su descripción. En este sentido, Hiemstra y Francis (1981) y Gutiérrez y Aldama (1990) han reconocido la importancia de parametrizar hidrogramas de diseño, con la finalidad de eliminar la arbitrariedad en la selección de su forma, y respectivamente han recomendado el empleo de funciones de Pearson y funciones triangulares. Por otra parte, Henderson (1966) ha parametrizado hidrogramas de entrada a almacenamientos en términos de una función senoidal, con el objeto de estudiar ciertos aspectos del tránsito de avenidas a través de vasos de almacenamiento. Finalmente, en la caracterización de hidrogramas unitarios generados en forma sintética, es común el empleo del hidrograma triangular (Ponce, 1989) o del hidrograma propuesto por el Servicio de Conservación de Suelos de los Estados Unidos de América (USSCS, por sus siglas en inglés), que ha sido parametrizado a través de una función Pearson por Horn (1987).

Las parametrizaciones antes mencionadas, si bien han resultado útiles, tienen diferentes limitaciones. El hidrograma triangular, debido a que su primera derivada no es continua en el pico, y el hidrograma senoidal, debido a su simetría, no son representaciones realistas de hidrogramas que ocurren en la naturaleza. Por otro lado, para el caso de los hidrogramas Pearson, la obtención de expresiones simples que relacionen los parámetros que los caracterizan (por ejemplo, volumen, tiempo base y gasto pico) no es tarea fácil. Estas observaciones han motivado a los autores de este artículo a desarrollar una parametrización polinomial de hidrogramas que posee diversas propiedades notables, entre las cuales está una relación muy sencilla entre volumen, tiempo base y gasto pico, lo cual resulta conveniente para la representación de hidrogramas naturales. Dicha parametrización, así como la demostración de sus propiedades, se presentan a continuación.

## Hidrogramas triparamétricos hermitianos

Al parametrizar un hidrograma, es deseable que el número de parámetros involucrados en su caracterización sea el mínimo indispensable. Evidentemente, para

finde de diseño, los parámetros más importantes para la caracterización de un hidrograma son el gasto pico,  $Q_p$ , el tiempo pico,  $t_p$ , y el volumen de escurrimiento directo,  $V$ . Puesto que un hidrograma representa la relación funcional entre gasto y tiempo,  $Q = Q(t)$ , es más sencillo desarrollar una parametrización en términos de  $Q_p$ ,  $t_p$  y el tiempo base,  $t_b$ . De ahí que sea conveniente que exista una relación sencilla entre  $Q_p$ ,  $t_p$  y  $V$ .

La parametrización de hidrogramas de escurrimiento directo a través de la triada  $\mathbf{p} = (Q_p, t_p, t_b)$  puede efectuarse a través de polinomios de grado impar como sigue:

$$Q_{2n+1}(t; \mathbf{p}) \equiv Q_{2n+1}(t) = Q_p \left[ a_0^{(2n+1)} + a_1^{(2n+1)} \frac{t}{t_p} + \dots + a_{2n+1}^{(2n+1)} \left( \frac{t}{t_p} \right)^{2n+1} \right] \\ \equiv Q_p \sum_{k=0}^{2n+1} a_k^{(2n+1)} \left( \frac{t}{t_p} \right)^k; t \in [0, t_p] \quad (1)$$

$$Q_{2n+1}(t; \mathbf{p}) \equiv Q_{2n+1}(t) = Q_p \left[ b_0^{(2n+1)} + b_1^{(2n+1)} \frac{t-t_p}{t_b-t_p} + \dots + b_{2n+1}^{(2n+1)} \left( \frac{t-t_p}{t_b-t_p} \right)^{2n+1} \right] \\ \equiv Q_p \sum_{k=0}^{2n+1} b_k^{(2n+1)} \left( \frac{t-t_p}{t_b-t_p} \right)^k; t \in [t_p, t_b] \quad (2)$$

$$Q_{2n+1}(t; \mathbf{p}) \equiv Q_{2n+1}(t) = 0; t \in (-\infty, 0) \cup (t_b, \infty) \quad (3)$$

donde  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $(2n + 1)$  representa el grado del polinomio y los  $2n + 2$  coeficientes  $a_k^{(2n+1)}$  ( $k = 0, 1, \dots, 2n + 1$ ) se calculan a partir de las  $2n + 2$  condiciones siguientes:

$$\left. \begin{aligned} Q_{2n+1}(0) &= 0 \\ Q'_{2n+1}(0) &= 0 \\ &\vdots \\ Q_{2n+1}^{(n)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{2n+1}(t_p) &= Q_p \\ Q'_{2n+1}(t_p) &= 0 \\ &\vdots \\ Q_{2n+1}^{(n)}(t_p) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

mientras que los  $2n + 2$  coeficientes  $b_k^{(2n+1)}$  ( $k = 0, 1, \dots, 2n + 1$ ) se determinan a partir de las  $2n + 2$  condiciones dadas por (5) y por:

$$\left. \begin{aligned} Q_{2n+1}(t_b) &= 0 \\ Q'_{2n+1}(t_b) &= 0 \\ &\vdots \\ Q_{2n+1}^{(n)}(t_b) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Como puede observarse, de las condiciones (4)-(6), la parametrización polinomial de hidrogramas dada por las expresiones (1)-(3) posee derivadas continuas hasta de orden  $n$  en los puntos  $t = 0$ ,  $t = t_p$  y  $t = t_b$ . Esto es una característica conveniente, en términos de su potencialidad para representar hidrogramas naturales, ya que en general, el régimen de escurrimientos de una corriente natural no cambia radicalmente en forma instantánea. En la recesión de una avenida por ejemplo, es de esperar que el escurrimiento disminuya paulatinamente, lo cual implica variaciones pequeñas en los gastos.

De (1) y (4), es evidente que

$$a_k^{(2n+1)} = 0 \text{ para } k = 0, 1, \dots, n \quad (7)$$

Por tanto, la ecuación (1) se simplifica a la expresión

$$Q_{2n+1}(t) = Q_p \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k^{(2n+1)} \left( \frac{t}{t_p} \right)^k; t \in [0, t_p] \quad (8)$$

cuyos coeficientes  $a_k^{(2n+1)}$  ( $k = n + 1, n + 2, \dots, 2n + 1$ ) se determinan al resolver el sistema de ecuaciones que resulta de combinar (5) con (8).

De manera similar, de (2) y (5) se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} b_0^{(2n+1)} &= 1 \\ b_k^{(2n+1)} &= 0; k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

de modo que la ecuación (2) se convierte en:

$$Q_{2n+1}(t) = Q_p \left[ 1 + \sum_{k=n+1}^{2n+1} b_k^{(2n+1)} \left( \frac{t-t_p}{t_b-t_p} \right)^k \right]; t \in [t_p, t_b] \quad (10)$$

donde los coeficientes  $b_k^{(2n+1)}$  ( $k = n + 1, n + 2, \dots, 2n + 1$ ) se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones que resulta de combinar (6) con (10).

En vista de que las condiciones (3)-(6) especifican la continuidad de  $Q_{2n+1}(t)$  y de sus derivadas hasta de orden  $n$ , los hidrogramas (8) y (10) están expresados en términos de interpolantes hermitianos, del tipo utilizado en los métodos de colocación (véase, por ejemplo, Allen *et al.*, 1988). Por tal motivo, de aquí en adelante se utilizará la siguiente

**Definición.** Se denomina hidrograma triparamétrico hermitiano de orden  $2n + 1$  a  $Q_{2n+1}(t)$ , expresado según (3), (8) y (10). ■

A continuación se muestran, como ejemplo, los hidrogramas triparamétricos hermitianos de órdenes 1, 3 y 5:

$$Q_1(t; Q_p, t_p, t_b) = \begin{cases} Q_p \frac{t}{t_p}; & t \in [0, t_p] \\ Q_p \left(1 - \frac{t-t_p}{t_b-t_p}\right); & t \in [t_p, t_b] \\ 0; & t \in (-\infty, 0) \cup (t_b, \infty) \end{cases} \quad (11)$$

$$Q_3(t; Q_p, t_p, t_b) = \begin{cases} Q_p \left[3 \left(\frac{t}{t_p}\right)^2 - 2 \left(\frac{t}{t_p}\right)^3\right]; & t \in [0, t_p] \\ Q_p \left[1 - 3 \left(\frac{t-t_p}{t_b-t_p}\right)^2 + 2 \left(\frac{t-t_p}{t_b-t_p}\right)^3\right]; & t \in [t_p, t_b] \\ 0; & t \in (-\infty, 0) \cup (t_b, \infty) \end{cases} \quad (12)$$

$$Q_5(t; Q_p, t_p, t_b) = \begin{cases} Q_p \left[10 \left(\frac{t}{t_p}\right)^3 - 15 \left(\frac{t}{t_p}\right)^4 + 6 \left(\frac{t}{t_p}\right)^5\right]; & t \in [0, t_p] \\ Q_p \left[1 - 10 \left(\frac{t-t_p}{t_b-t_p}\right)^3 + 15 \left(\frac{t-t_p}{t_b-t_p}\right)^4 - 6 \left(\frac{t-t_p}{t_b-t_p}\right)^5\right]; & t \in [t_p, t_b] \\ 0; & t \in (-\infty, 0) \cup (t_b, \infty) \end{cases} \quad (13)$$

Conforme a (11), el hidrograma triangular es un miembro de la familia de hidrogramas triparamétricos hermitianos. A pesar de que, como antes se había señalado, dicho hidrograma tiene el inconveniente de exhibir una discontinuidad en su primera derivada en el pico, el resto de los miembros de la familia poseen derivadas continuas en ese punto.

Los hidrogramas expresados por (11)-(13) se muestran gráficamente en las ilustraciones 1-3, para el caso particular de una relación  $t_p/t_b = 1/3$ . Estos hidrogramas podrían generarse, desde luego, para cualquier valor de dicha relación.

En la tabla 1 se consignan valores del hidrograma triparamétrico hermitiano adimensional de orden 3 para algunas relaciones  $t_p/t_b$ .

### Formas canónicas adimensionales

Una propiedad interesante que posee cualquier hidrograma triparamétrico hermitiano es que las curvas que los definen en los intervalos  $[0, t_p]$  y  $[t_p, t_b]$  tienen la misma forma adimensional, bajo escalamiento, rotación y traslación apropiados.

**Proposición 1.** Las expresiones (8) y (10), que definen al hidrograma triparamétrico hermitiano de orden  $2n + 1$  (para  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) poseen la misma forma adimensional canónica.

**Demostración.** En el caso de la ecuación (8), sean

$$\tilde{Q}_{2n+1} = \frac{Q_{2n+1}}{Q_p} \quad (14)$$

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_p} \quad (15)$$

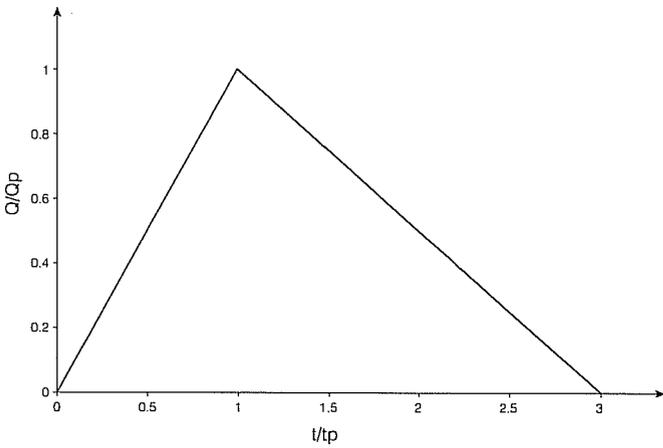
el gasto adimensional y el tiempo adimensional, para el intervalo  $[0, t_p]$ , respectivamente. Entonces, la versión adimensional de (8) puede escribirse como:

$$\tilde{Q}_{2n+1}(\tilde{t}) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k^{(2n+1)} \tilde{t}^k; \tilde{t} \in [0, 1] \quad (16)$$

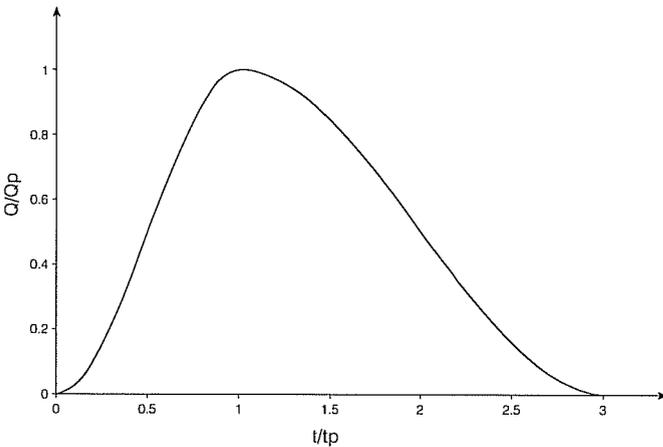
cuyos coeficientes se determinan requiriendo que se satisfaga la versión adimensional de (5), esto es:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Q}_{2n+1}(1) &= 1 \\ \tilde{Q}_{2n+1}^{(k)}(1) &= 0; k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

**1. Hidrograma triparamétrico hermitiano de orden 1**



**2. Hidrograma triparamétrico hermitiano de orden 3**



La ecuación (16) define la forma adimensional canónica del hidrograma triparamétrico hermitiano de orden  $2n + 1$ , en el intervalo  $[0, t_p)$ .

Al combinar (16) y (17) se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$A^{(n)} a^{(n)} = f \tag{18}$$

donde

$$A^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ (n+1) & (n+2) & (n+3) & \dots & (2n+1) \\ (n+1)n & (n+2)(n+1) & (n+3)(n+2) & \dots & (2n+1)2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n+1)n\dots 2 & (n+2)(n+1)\dots 3 & (n+3)(n+2)\dots 4 & \dots & (2n+1)2n\dots(n+2) \end{bmatrix} \tag{19}$$

**1. Ordenadas de los hidrogramas triparamétricos hermitianos de orden 3**

Relación $t/t_p$	Relación $t_p/t_b$		
	1/3	1/4	1/5
0.0	0.000	0.000	0.000
0.1	0.028	0.028	0.028
0.2	0.104	0.104	0.104
0.3	0.216	0.216	0.216
0.4	0.352	0.352	0.352
0.5	0.500	0.500	0.500
0.6	0.648	0.648	0.648
0.7	0.784	0.784	0.784
0.8	0.896	0.896	0.896
0.9	0.972	0.972	0.972
1.0	1.000	1.000	1.000
1.2	0.972	0.987	0.993
1.4	0.896	0.951	0.972
1.6	0.784	0.896	0.939
1.8	0.648	0.825	0.896
2.0	0.500	0.741	0.843
2.2	0.352	0.648	0.784
2.4	0.216	0.550	0.718
2.6	0.104	0.450	0.648
2.8	0.028	0.352	0.575
3.0	0.000	0.259	0.500
3.2		0.175	0.425
3.4		0.104	0.352
3.6		0.049	0.282
3.8		0.013	0.216
4.0		0.000	0.156
4.2			0.104
4.4			0.061
4.6			0.028
4.8			0.007
5.0			0.000

$$a^{(n)T} = [a_{n+1}^{(2n+1)} \ a_{n+2}^{(2n+1)} \ \dots \ a_{n+1}^{(2n+1)}] \quad (20)$$

$$f^T = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (21)$$

Ahora bien, en el caso de la ecuación (10), sean

$$\tilde{Q}_{2n+1} = \frac{Q_p - Q_{2n+1}}{Q_p} \quad (22)$$

$$\tilde{t} = \frac{t - t_p}{t_b - t_p} \quad (23)$$

el gasto adimensional y el tiempo adimensional para el intervalo  $[t_p, t_b]$ , respectivamente. Entonces, la versión adimensional de (10) puede escribirse como:

$$\tilde{Q}_{2n+1}(\tilde{t}) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} c_k^{(2n+1)} \tilde{t}^k; \tilde{t} \in [0,1] \quad (24)$$

donde

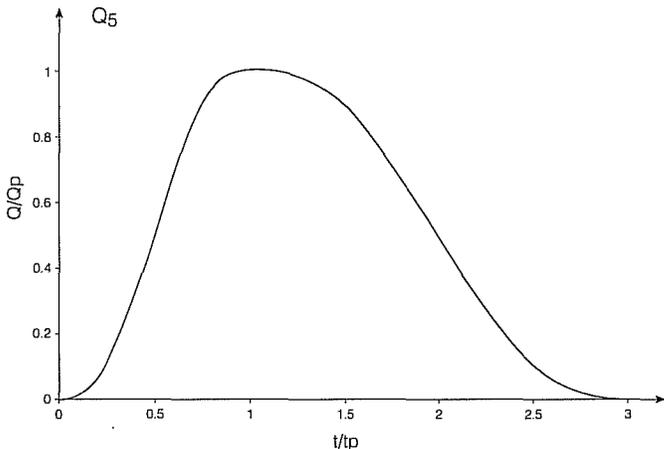
$$c_k^{(2n+1)} = -b_k^{(2n+1)} \quad (25)$$

Los coeficientes de (24) se obtienen al requerir que dicha ecuación satisfaga la versión adimensional de (6), esto es

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Q}_{2n+1}(1) &= 1 \\ \tilde{Q}_{2n+1}^{(k)}(1) &= 0; \ k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

La ecuación (24) define la forma adimensional canónica del hidrograma triparamétrico hermitiano de orden  $2n + 1$ , en el intervalo  $[t_p, t_b]$ .

### 3. Hidrograma triparamétrico hermitiano de orden 5



La satisfacción simultánea de (24) y (26) produce el sistema

$$\mathbf{A}^{(n)} \mathbf{c}^{(n)} = \mathbf{f} \quad (27)$$

donde  $c^{(n)T} = [c_{n+1}^{(2n+1)} \ c_{n+2}^{(2n+1)} \ \dots \ c_{2n+1}^{(2n+1)}]$ . De (19), es evidente que ninguno de los renglones de  $\mathbf{A}^{(n)}$  es linealmente dependiente de los demás. Por tanto,  $\mathbf{A}^{(n)}$  no es singular y (18) tiene solución única. Pero la estructura de (18) y (27) es la misma, de donde,

$$c_k^{(2n+1)} = a_k^{(2n+1)}; \ k = n + 1, n + 2, \dots, 2n + 1 \quad (28)$$

Esto es, las formas canónicas adimensionales (16) (correspondiente a  $t \in [0, t_p]$ ) y (24) (correspondiente a  $t \in [t_p, t_b]$ ) son idénticas. ■

La demostración de esta propiedad de los hidrogramas triparamétricos hermitianos muestra que si se eligen adecuadamente los factores de escalamiento, rotación y traslación, las curvas que los definen en los intervalos  $[0, t_p]$  y  $[t_p, t_b]$  son idénticas en forma adimensional. Esto no quiere decir que la rama de ascenso del hidrograma (dimensional) y su rama de recesión sean iguales, sino que manejadas en forma adimensional apropiada coinciden. Como podrá observarse a continuación las formas canónicas adimensionales servirán como base para demostrar la invariancia del volumen.

**Observación.** En virtud de (14) y (15):

$$\int_0^{t_p} Q_{2n+1}(t) dt = Q_p t_p \int_0^1 \tilde{Q}_{2n+1}(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (29)$$

y, en vista de (16), (22), (23), (24) y (28):

$$\int_{t_p}^{t_b} Q_{2n+1}(t) dt = Q_p (t_b - t_p) \left[ 1 - \int_0^1 \tilde{Q}_{2n+1}(\tilde{t}) d\tilde{t} \right] \quad (30)$$

Por tanto, el volumen de un hidrograma triparamétrico hermitiano de orden  $2n + 1$  está dado por:

$$\begin{aligned} V_{2n+1} &= \int_0^{t_b} Q_{2n+1}(t) dt = \int_0^{t_p} Q_{2n+1}(t) dt + \int_{t_p}^{t_b} Q_{2n+1}(t) dt \\ &= Q_p t_b \left[ 1 - \int_0^1 \tilde{Q}_{2n+1}(\tilde{t}) d\tilde{t} \right] + Q_p t_p \left[ 2 \int_0^1 \tilde{Q}_{2n+1}(\tilde{t}) d\tilde{t} - 1 \right] \end{aligned} \quad (31)$$

En particular, para  $n = 0$ :

$$\int_0^1 \tilde{Q}_1(\tilde{t}) d\tilde{t} = \frac{1}{2} \quad (32)$$

de donde

$$V_1 = \frac{Q_p t_b}{2} \equiv V \quad (33)$$

El resultado anterior simplemente expresa la conocida fórmula para calcular el volumen de un hidrograma triangular.

### Invariancia del volumen

Los miembros de la familia de hidrogramas triparamétricos hermitianos poseen una notable propiedad, en el sentido de que todos ellos tienen el mismo volumen. Esta propiedad se demuestra a continuación.

**Proposición 2.** La integral de la forma canónica adimensional (16) (o (24)) de los hidrogramas triparamétricos hermitianos en el intervalo [0, 1] es invariante con respecto a su orden.

**Demostración.** Considérese la transformación de coordenadas  $\hat{z}$  siguiente, compuesta de una traslación del punto (1,1) al origen y de una rotación de  $\pi$  radianes:

$$\hat{z} : \begin{cases} \hat{Q}_{2n+1} = 1 - \tilde{Q}_{2n+1} \\ \hat{t} = 1 - \tilde{t} \end{cases} \quad (34)$$

El efecto que la transformación  $\tau$  tiene sobre la forma canónica adimensional (16) se muestra gráficamente en la ilustración 4.

Ahora bien, resolviendo (34) para  $\tilde{Q}_{2n+1}$  y  $\tilde{t}$  se obtiene:

$$\hat{z}^{-1} : \begin{cases} \tilde{Q}_{2n+1} = 1 - \hat{Q}_{2n+1} \\ \tilde{t} = 1 - \hat{t} \end{cases} \quad (35)$$

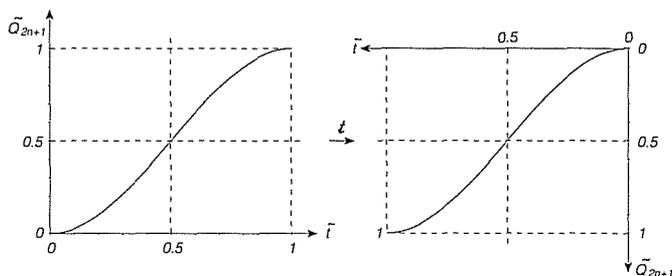
Al sustituir (35) en (16) se obtiene una función polinomial del tipo siguiente:

$$\hat{Q}_{2n+1}(\hat{t}) = \sum_{k=0}^{2n+1} d_k^{(2n+1)} \hat{t}^k ; \hat{t} \in [0,1] \quad (36)$$

En lugar de intentar obtener expresiones explícitas para  $d_k^{(2n+1)}$ , que resulta en manipulaciones algebraicas extremadamente laboriosas, a continuación se presenta un enfoque indirecto de mucho mayor eficacia. Recuérdese que la forma canónica adimensional (16) se construyó de modo que

$$\tilde{Q}_{2n+1}^{(k)}(0) = 0 ; k = 0,1,\dots,n \quad (37)$$

### 4. Transformación sobre la forma canónica adimensional



La combinación de (35) y (37) implica que

$$\left. \begin{aligned} \hat{Q}_{2n+1}(1) &= 1 \\ \hat{Q}_{2n+1}^{(k)}(1) &= 0 ; k = 1,2,\dots,n \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Adicionalmente, al sustituir (34) en (17), se obtiene:

$$\hat{Q}_{2n+1}^{(k)}(0) = 0 ; k = 0,1,\dots,n \quad (39)$$

Las ecuaciones (36) y (38) implican que

$$d_k^{(2n+1)} = 0 ; k = 0,1,\dots,n \quad (40)$$

De donde (36) adopta la forma

$$\hat{Q}_{2n+1}(\hat{t}) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} d_k^{(2n+1)} \hat{t}^k ; \hat{t} \in [0,1] \quad (41)$$

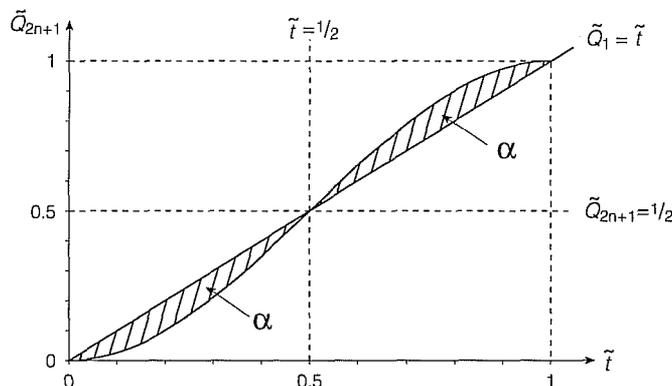
Al requerir que (41) satisfaga (38), se obtiene el sistema

$$\mathbf{A}^{(n)} \mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{f} \quad (42)$$

donde  $\mathbf{d}^{(n)T} = [d_{n+1}^{(2n+1)} \dots d_{2n+1}^{(2n+1)}]$ . Al comparar (18) y (42), se concluye que

$$d_k^{(2n+1)} = a_k^{(2n+1)} ; k = n+1, n+2, \dots, 2n+1 \quad (43)$$

### 5. Antisimetría de la forma canónica adimensional



Esto es, la forma canónica adimensional en el espacio  $(\hat{Q}_{2n+1}, \hat{t})$  (dada por (36)) es la misma que la correspondiente al espacio  $(\hat{Q}_{2n+1}, \hat{t})$  (dada por (16)).

Una consecuencia de lo anterior es que la forma canónica adimensional (16) es antisimétrica con respecto a

las rectas  $\tilde{t} = \frac{1}{2}$ ,  $\tilde{Q}_{2n+1} = \frac{1}{2}$ , como se muestra en la

ilustración 5. Dicha antisimetría y la ecuación (32) implican que, de acuerdo con lo mostrado en la ilustración:

$$\int_0^1 \tilde{Q}_{2n+1}(\tilde{t}) d\tilde{t} = \int_0^1 \tilde{Q}_1(\tilde{t}) d\tilde{t} - \alpha + \alpha = \frac{1}{2}; n = 1, 2, \dots \quad (44)$$

que demuestra la invariancia propuesta. ■

**Corolario 1.** Todos los hidrogramas tripamétricos hermitianos poseen el mismo volumen.

En efecto, de (31), (33) y (44),

$$V_{2n+1} = Q_p t_b \left(1 - \frac{1}{2}\right) + Q_p t_p \left[2\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right] = \frac{Q_p t_b}{2} \equiv V; n = 1, 2, \dots \quad (45)$$

■  
**Corolario 2.** El tiempo base puede ser substituido por el volumen en la triada de parámetros que caracteriza un hidrograma tripamétrico hermitiano.

En efecto, de (45):

$$t_b = 2 \frac{V}{Q_p} \quad (46)$$

De modo que  $Q_{2n+1}$  puede expresarse como:

$$Q_{2n+1} = Q_{2n+1}(t; Q_p, t_p, V) \quad (47)$$

■  
El hecho de que los hidrogramas tripamétricos hermitianos posean propiedades tales como formas canónicas adimensionales idénticas bajo transformaciones apropiadas, invariancia de volumen con respecto al orden y derivadas continuas en el inicio, pico y fin del hidrograma no representa limitación alguna para su aplicación, ya que las características de la cuenca en estudio se toman en cuenta a través de los valores de los parámetros  $Q_p$ ,  $t_p$ , y  $V$ , además de que se tiene la libertad de elegir el orden de los polinomios utilizados en la construcción del hidrograma, lo cual permite tomar en cuenta la forma de las curvas de ascenso y recesión de la avenida. De esta manera, la forma y otras características fisiográficas de la cuenca, ade-

más de su tiempo de concentración, pueden incorporarse en la determinación de los parámetros y el orden que definen un hidrograma tripamétrico hermitiano.

## Ejemplos de aplicación

### Ejemplo 1

Considérese la determinación de un hidrograma unitario sintético  $q = q(t)$ , donde  $q$  representa gasto unitario y  $t$  representa tiempo, a partir de los datos de una cuenca pequeña ubicada en el estado de Morelos, sobre el río Yautepec, afluente del río Amacuzac, abarcando una superficie de 545 km<sup>2</sup>, hasta la estación hidrométrica Ticumán. La longitud del cauce principal es de 18 km y su pendiente media de 0.015. Se procederá ahora a obtener los parámetros que definen a un hidrograma triangular. A partir de éstos, se determinarán hidrogramas sintéticos con otras formas. Los resultados se resumen en la ilustración 6.

#### a) Hidrograma triangular

Para determinar las características de un hidrograma unitario sintético triangular se ha utilizado el procedimiento propuesto por Mockus (1957), el cual indica que el gasto pico unitario,  $q_p$ , en m<sup>3</sup>/mm, está dado por:

$$q_p = \frac{0.555A}{t_b} \quad (48)$$

donde  $A$  es el área de la cuenca en km<sup>2</sup> y  $t_b$  es el tiempo base del hidrograma, en h. A su vez, el tiempo base se puede calcular como  $t_b = 3t_p$ , siendo  $t_p$  el tiempo pico del hidrograma. El tiempo pico se calcula como:

$$t_p = \frac{d_e}{2} + t_r \quad (49)$$

donde  $d_e$  es la duración en exceso y  $t_r$ , el tiempo de retraso, los cuales pueden estimarse a partir del tiempo de concentración  $t_c$  como  $d_e = t_c$  y  $t_r = 0.60 t_c$ . Por su parte, el tiempo de concentración, en h, puede calcularse con la fórmula de Kirpich (Chow, 1964), como:

$$t_c = 0.000325 \frac{L^{0.77}}{S^{0.385}} \quad (50)$$

donde  $L$  y  $S$  son la longitud y pendiente del cauce principal en m y m/m, respectivamente.

Con los datos del ejemplo se obtienen los siguientes resultados:  $d_e = t_c = 3.10$  h,  $t_r = 1.86$  h,  $t_p = 3.40$  h,  $t_b = 10.21$  h y  $q_p = 29.66$  m<sup>3</sup>/s/mm. A partir de estos úl-

timos dos parámetros es posible calcular el volumen del hidrograma, cuyo valor resulta ser  $v = 545,091 \text{ m}^3/\text{mm}$ . En resumen, el hidrograma unitario triangular queda definido por los siguientes parámetros:  $q_p = 29.66 \text{ m}^3/\text{s}/\text{mm}$ ,  $t_p = 3.40 \text{ h}$  y  $v = 545,091 \text{ m}^3/\text{mm}$  (véase la ilustración 6). Esta triada de parámetros también puede ser utilizada para caracterizar hidrogramas unitarios con formas diferentes a la triangular.

b) Hidrograma del USSCS

Uno de los métodos disponibles para construir hidrogramas unitarios sintéticos es el propuesto por el Servicio de Conservación de Suelos de los Estados Unidos (USSCS, por sus siglas en inglés, Mockus, 1957). La forma de dicho hidrograma se determina en términos del tiempo adimensional,  $t/t_p$ , y el gasto adimensional,  $q/q_p$ . Para el ejemplo se ha utilizado  $q_p = 29.66 \text{ m}^3/\text{s}/\text{mm}$  y  $t_p = 3.40 \text{ h}$  para formar el hidrograma en estudio (véase la ilustración 6). El volumen no es un parámetro independiente del gasto pico y el tiempo pico en este caso, ya que el hidrograma del USSCS se determina solamente en función de los parámetros  $q_p$  y  $t_p$ . El cálculo del volumen se puede realizar en forma numérica y, para el ejemplo en estudio, resulta ser  $v = 499,127 \text{ m}^3/\text{mm}$ , valor que difiere del especificado en la triada de parámetros ( $545,091 \text{ m}^3/\text{mm}$ ).

c) Hidrograma Pearson

La función Pearson puede utilizarse para describir un hidrograma unitario, por medio de la expresión (Ponce, 1989):

$$q = q_p \left( \frac{t}{t_p} \right)^{t_p/(t_g - t_p)} e^{-(t/t_p)^{t_p/(t_g - t_p)}} \quad (51)$$

para  $t \in [0, \infty)$  y  $q = 0$  para otros tiempos. En la ecuación (51),  $t_g$  es el tiempo al centroide del hidrograma. Evidentemente,  $t_b \rightarrow \infty$  para el hidrograma Pearson dado por (51).

La ecuación (51) se puede integrar, obteniéndose la siguiente expresión para el volumen:

$$v = \int_0^{\infty} q(t) dt = q_p e^{t_p/(t_g - t_p)} \left( \frac{t_g - t_p}{t_p} \right)^{t_p/(t_g - t_p)} (t_g - t_p) \Gamma \left( 1 + \frac{t_p}{t_g - t_p} \right) \quad (52)$$

Cuando  $q_p$ ,  $t_p$  y  $v$  son conocidos, (52) representa una ecuación trascendental para  $t_g$ , la cual puede ser resuelta numéricamente. Desafortunadamente, este proceso de solución es un tanto laborioso, en vista de

la complejidad de la relación funcional representada por (52). Empleando los valores  $q_p = 29.66 \text{ m}^3/\text{s}/\text{mm}$ ,  $t_p = 3.40 \text{ h}$  y  $v = 545,091 \text{ m}^3/\text{mm}$ , en (52), se obtiene la solución  $t_g = 4.56 \text{ h}$ . El hidrograma Pearson resultante, obtenido de (51), se muestra en la ilustración 6.

d) Hidrograma senoidal

Un hidrograma unitario descrito por una función senoidal se expresa como:

$$q = q_p \text{ sen} \left( \frac{\pi}{2} \frac{t}{t_p} \right) \quad (53)$$

para  $t \in [0, 2 t_p]$ , y  $q = 0$  para otros tiempos. Evidentemente, en este caso,  $t_b = 2 t_p$ . El volumen se obtiene integrando la ecuación (53) y está dado por:

$$v = \frac{4}{\pi} q_p t_p \quad (54)$$

Al observar (53) y (54), se concluye que el hidrograma senoidal queda completamente determinado por los parámetros  $q_p$  y  $t_p$ , ya que el volumen no es un parámetro independiente de ellos. Para el ejemplo en estudio, para  $q_p = 29.66 \text{ m}^3/\text{s}/\text{mm}$  y  $t_p = 3.40 \text{ h}$ , se obtiene, al aplicar (54),  $v = 462,235 \text{ m}^3/\text{mm}$ , valor que difiere del volumen especificado en la triada de parámetros ( $545,091 \text{ m}^3/\text{mm}$ ). El hidrograma senoidal resultante se muestra en la ilustración 6.

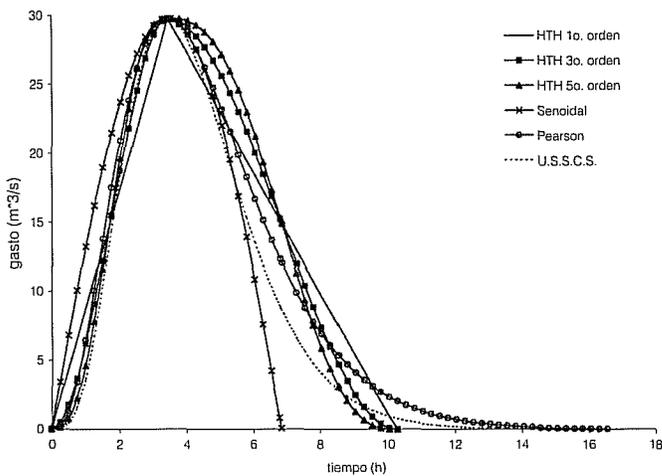
e) Hidrogramas triparamétricos hermitianos

El hidrograma triparamétrico hermitiano (HTH) de primer orden coincide con el hidrograma triangular y está dado por (11). El HTH de tercer orden está definido por (12), mientras que el de quinto orden por (13). Al aplicar estas expresiones,  $q_p$  se sustituye por  $Q_p$  y debe utilizarse una expresión similar a la ecuación (46) para expresar el tiempo base en función del gasto pico unitario y el correspondiente volumen, esto es:  $t_b = 2v/q_p$ . Los hidrogramas resultantes para el ejemplo en estudio se muestran en la ilustración 6.

Los resultados mostrados en la ilustración 6 indican lo siguiente:

1. Los hidrogramas USSCS y senoidal no preservan el volumen especificado en la triada de parámetros ( $q_p$ ,  $t_p$ ,  $v$ ), ya que ambos se definen exclusivamente a través del gasto pico y el tiempo pico.
2. El hidrograma Pearson permite preservar la triada de parámetros ( $q_p$ ,  $t_p$ ,  $v$ ). No obstante, su aplicación es tediosa, ya que la relación que existe entre

### 6. Hidrogramas sintéticos (ejemplo 1)



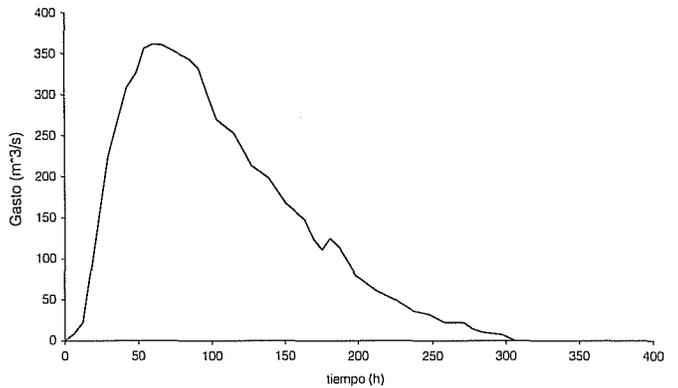
el tiempo al centroide,  $t_g$ , y la triada ( $q_p$ ,  $t_p$ ,  $v$ ) es complicada, lo cual dificulta la obtención de  $t_g$  a fin de que se preserve un volumen especificado.

- Los hidrogramas triparamétricos hermitianos preservan la triada ( $q_p$ ,  $t_p$ ,  $v$ ) de manera muy sencilla en vista de la simplicidad de la relación que existe entre el volumen, el gasto pico y el tiempo base para dichos hidrogramas.

#### Ejemplo 2

Considérese el hidrograma aislado de escurrimiento directo mostrado en la ilustración 7, registrado en la estación hidrométrica Las Gaviotas, en la cuenca baja del río Grijalva, en mayo de 1970. Con el fin de parametrizar dicho hidrograma, se han aplicado los métodos descritos en el ejemplo 1, con excepción de los asociados con los hidrogramas USSCS y senoidal, ya que éstos no preservan el volumen. Para este caso se tienen los siguientes datos:  $Q_p = 359.73 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $t_p = 60 \text{ h}$ , y  $V = 164.62 \text{ Mm}^3$ . En el caso del hidrograma Pearson, la solución numérica de (52) (sustituyendo  $Q_p$  por  $q_p$  y  $V$  por  $v$ ) produce el resultado  $t_g = 100 \text{ h}$ . Las parametrizaciones del hidrograma mostrado en la ilustración 7 se muestran gráficamente en la ilustración 8. Como puede observarse, los hidrogramas triparamétricos hermitianos de órdenes 3 y 5, así como el hidrograma Pearson, representan la curva de ascenso del hidrograma registrado, de mucho mejor manera que el hidrograma triangular. La curva de recesión se representa más satisfactoriamente a través de los hidrogramas Pearson y triparamétricos hermitianos de órdenes 3 y 5 que a través del hidrograma triangular. No obstante, la utilización del hidrograma Pearson tiene la desventaja de que se requiere la tediosa solución de la ecuación

### 7. Hidrograma registrado (ejemplo 2)



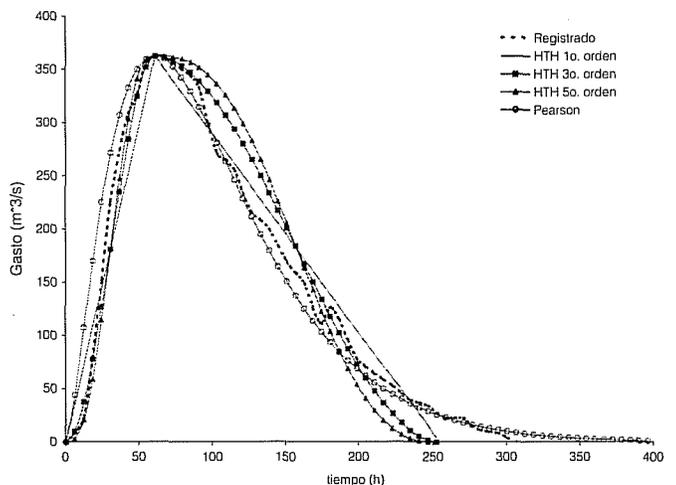
ción (52), a fin de que el volumen especificado se preserve.

De acuerdo con el comportamiento de los hidrogramas triparamétricos hermitianos de órdenes uno, tres, cinco y superiores, se recomienda, para aplicaciones prácticas, el uso del hidrograma de tercer orden, que resulta de fácil aplicación y presenta ventajas sobre el de primer orden, en el sentido que preserva la continuidad de la primera derivada temporal del gasto al inicio y término del hidrograma, así como en el pico del mismo. En algunos casos, sin embargo, podría resultar mejor la aplicación de hidrogramas de orden superior.

#### Comentarios finales

La parametrización de hidrogramas es útil en el contexto de diversos estudios de hidrología de avenidas. En este trabajo se presenta una parametrización polinomial sencilla que posee propiedades atractivas para la representación de hidrogramas naturales de un solo

### 8. Comparación entre parametrizaciones (ejemplo 2)



pico. Dicha parametrización se basa en el uso de la triada gasto pico, tiempo pico y volumen, y de interpolantes hermitianos. Los hidrogramas así construidos se denominan hidrogramas triparamétricos hermitianos, cuyas propiedades principales son: derivadas continuas hasta de grado  $n$  para un hidrograma de orden  $2n + 1$ , invariancia de volumen con respecto al orden del hidrograma y la existencia de una expresión muy simple que relaciona gasto pico, tiempo base y volumen. Se espera que la parametrización propuesta sea de utilidad en el desarrollo de metodologías para la estimación de avenidas de diseño. En particular, los hidrogramas triparamétricos hermitianos pueden utilizarse para representar hidrogramas naturales de tormentas aisladas registrados en estaciones hidrométricas. Adicionalmente, la metodología propuesta puede ser empleada para definir la forma de hidrogramas unitarios generados sintéticamente, a través de la estimación del gasto pico y el tiempo de concentración, a partir del cual pueden estimarse el tiempo pico y el tiempo base. A través de dos ejemplos numéricos, se ha mostrado que la parametrización propuesta en este trabajo es superior a la asociada con hidrogramas USSCS y senoidal, dado que éstos sólo pueden preservar el gasto pico y el tiempo pico de un hidrograma (registrado o sintético). Los hidrogramas triparamétricos hermitianos también ofrecen ventajas en relación con los hidrogramas Pearson, ya que la utilización de éstos in-

volucra la tediosa solución de una ecuación trascendental no lineal, a fin de preservar el volumen del hidrograma por representar.

Recibido: junio, 1997  
Aprobado: abril, 1998

## Referencias

- Allen, M.B., I. Herrera y G. Pinder. 1988, Numerical modeling in science and engineering. New York: John Wiley and Sons.
- Chow, V.T. 1964. Handbook of applied hydrology. New York: McGraw-Hill.
- Gutiérrez, C. y A.A. Aldama. 1990. Una nueva metodología para estimar avenidas de diseño. Memorias del XIV Congreso Latinoamericano de Hidráulica, México.
- Henderson, F.M. 1966, Open channel flow. New York: Macmillan.
- Hiemstra, L.A.V. y D.M. Francis. 1981. Run hydrographs for prediction of flood hydrographs. ASCE J Hydraulics Division 107(6): 759-775.
- Horn, D.R. 1987. Graphic estimation of peak flow reduction in reservoirs. ASCE J Hydraulic Engineering 113(11): 1441-1450.
- Mockus, V. 1957. Use of storm and watershed characteristics in synthetic unit hydrograph analysis and application. USA: U.S. Soil Conservation Service.
- Ponce, V.M. 1989. Engineering hydrology. Englewood Cliffs, USA: Prentice Hall.

## Abstract

Aldama, A.A. & A. I. Ramírez "Hydrograph parameterization through the use of Hermitian interpolation". *Hydraulic Engineering in Mexico (in Spanish) Vol. XIII. Num. 3, pages 19-28 September-December, 1998.*

Hydrograph parameterization is useful in the definition of design floods. Thus, various parameterizations have been proposed in the literature. Nevertheless, their application to the representation of naturally occurring hydrographs is restricted by a number of limitations. This has motivated the authors to develop a polynomial parameterization based on the use of hermitian interpolants, whose main properties are derivative continuity up to a certain order and volume invariance. Such properties are demonstrated in this paper. The procedure is applied to define the form of a synthetic unit hydrograph and to represent a recorded single peak hydrograph.

**Key words:** design floods, hydrographs, Hermitian interpolation, polynomial parameterization.

## Dirección institucional de autores:

Álvaro Alberto Aldama Rodríguez, Aldo Iván Ramírez Orozco

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua  
Paseo Cuauahuac No. 8532 Col. Progreso  
Jiutepec, Morelos  
CP. 62550  
Teléfono: (73) 19 45 45  
Email: aaldama@tlaloc.imta.mx  
Email: aramirez@tajin.imta.mx