Título	Control óptimo de un sistema de presas: un enfoque de perturbaciones pequeñas a la solución de programación dinámica estocástica.
Autor / Adscripción	Jaime Collado Moctezuma Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
Publicación	Ingeniería Hidráulica en México, 8(2-3): 39-52
Fecha de publicación	1993
Resumen	Un número importante de problemas hidrológicos prácticos, entre ellos la optimización de la operación de un sistema de presas, puede formularse mediante programación dinámica estocástica. Sin embargo, un método de solución factible no existe, excepto para problemas con estructura lineal-cuadrática, o para sistemas con pocas variables de estado. Este artículo propone un método analítico-numérico a la solución del control óptimo estocástico de malla cerrada.
Identificador	http://hdl.handle.net/123456789/1199

Ingeniería Hidráulica en México Vol. VIII, Núm. 2–3, págs: 39 – 52, mayo-diciembre de 1993

Control óptimo de un sistema de presas: un enfoque de perturbaciones pequeñas a la solución de programación dinámica estocástica

Jaime Collado
Instituto Mexicano de Tecnología del Agua

Un número importante de problemas hidrológicos prácticos, entre ellos la optimización de la operación de un sistema de presas, puede formularse mediante programación dinámica estocástica. Sin embargo, un método de solución factible no existe, excepto para problemas con estructura lineal-cuadrática, o para sistemas con pocas variables de estado. Este artículo propone un método analítico–numérico a la solución del control óptimo estocástico de malla cerrada. La solución óptima está dada por el control determinístico más un término de corrección que toma en cuenta los efectos de la estocasticidad en una caracterización de segundos momentos. Se supone que dicho término es pequeño en comparación con el control determinístico y se obtiene una solución de perturbaciones pequeñas. Este método puede ser usado como una solución subóptima para problemas donde no es factible usar programación estocástica clásica. Comparaciones con métodos convencionales muestran que el método ofrece resultados muy cercanos al óptimo, incluso cuando la hipótesis de perturbaciones pequeñas es sólo aproximadamente satisfecha. Una ventaja atractiva del método propuesto es que no requiere discretización de las variables de estado ni de las de control, eludiendo el así llamado maleficio de la dimensionalidad.

Palabras clave: *Programación dinámica, presas de propósitos múltiples, operación de presas, modelos matemáticos, análisis numérico, método aproximado.*

Introducción

Uno de los problemas más importantes y desafiantes de la hidráulica moderna, es encontrar una política de extracción que controle un sistema de presas de una manera óptima. El interés práctico de este problema ha promovido la aplicación de casi todas las técnicas de optimización y control para operar presas reales, mientras que desde un punto de vista teórico, ha motivado el desarrollo de nuevos métodos.

El problema de la operación de una presa, en esencia, puede explicarse de la siguiente manera. La cantidad almacenada y la extracción de agua de una presa, están asociadas con puntos o periodos en el tiempo que tienen un ordenamiento y una dirección naturales. Por lo tanto, cada decisión influencia las circunstancias bajo las cuales se tendrá que tomar una decisión futura, al mismo tiempo que se tiene un beneficio o un costo en cada periodo. Si se desea minimizar el costo total de operación, se debe balancear la opción de minimizar el costo presente contra el deseo de evitar situaciones futuras donde los costos altos son inevitables.

La inhabilidad para pronosticar aportaciones futuras con precisión, es la principal fuente de incertidumbre en la optimización de la operación de una presa (Datta y Burges, 1984). La incertidumbre, modelada mediante variables aleatorias o procesos estocásticos, trae como consecuencia el deterioro del funcionamiento de la presa, el cual puede medirse con el incremento en el costo total esperado, con respecto al caso determinístico. La política de operación óptima asociada, sin embargo, no necesariamente es afectada por la mera presencia de la incertidumbre, cuyo peso en la optimización es principalmente determinado por la longitud del intervalo de tiempo entre las decisiones y por la forma de la función objetivo. Debe hacerse notar que la solución óptima para controlar un sistema de presas puede ser muy sensible a la forma de la función objetivo (Ginn y Houck, 1989), a tal grado que en ocasiones la determinación de ésta se llama *problema secundario* (Gessing, 1980).

Con respecto al espaciamiento de las decisiones, mientras más grande sea el intervalo durante el cual se considera constante la aportación, mayor variabilidad hidrológica es promediada y menos importante es la incertidumbre en los pronósticos de las aportaciones para la optimización de la política de operación. En cuanto a la forma de la función objetivo, debe notarse que si ésta es cuadrática sujeta a restricciones lineales de igualdad, entonces la política no es afectada por momentos estadísticos de orden dos o superior. Este hecho es consecuencia directa de la condición necesaria de primer orden para encontrar un punto estacionario, esto es, que la primera derivada de la función por optimizarse sea igual a cero. El efecto de la incertidumbre del pronóstico de las aportaciones o escurrimientos en la política de operación óptima, es el resultado de la acción combinada de momentos estadísticos de orden dos o superior y derivadas de la función objetivo de orden tres y superior. Por lo tanto, el problema de la operación de una presa puede ser clasificado como *equivalente determinístico*, cuando la operación es determinada principalmente por el valor esperado de las variables de entrada (aportaciones), o bien, como *dominado por la incertidumbre*, cuando la solución óptima depende de momentos de orden superior de la distribución de probabilidad asociada con la incertidumbre en el pronóstico de las aportaciones.

El estado del arte de la optimización estocástica se ha concentrado en programación dinámica discreta en un extremo, y en control determinístico en otro. El primer enfoque está seriamente limitado por sus requerimientos computacionales (conocido como *el maleficio de la dimensionalidad*) y puede ser aplicado sólo en casos simples. El segundo ignora completamente el efecto de la incertidumbre de variables aleatorias sobre el control óptimo.

Desde hace algún tiempo, la disponibilidad de sistemas de pronóstico de escurrimientos en tiempo real, ha inducido el desarrollo de modelos de optimización de operación de presas que toman en cuenta dichos pronósticos en la derivación de políticas óptimas de operación (Wilson y Kirdar, 1970; Jamieson y Wilkinson, 1972; Becker y Yeh, 1974; Hoshi y Burges, 1978; Turgeon, 1980; Yazicigil, *et al*., 1983; Stedinger, *et al*., 1984). Sin embargo, estos métodos usan los mejores pronósticos de aportaciones disponibles de una manera determinística, implícitamente aceptando la propiedad de equivalencia determinística (Charnes y Cooper, 1963; Malinvaud, 1969). Para capturar el efecto de la incertidumbre, generalmente presente en problemas de operación en tiempo real, deben incluirse en la política óptima de operación, momentos de la distribución de probabilidad asociada con el pronóstico de aportaciones de al menos orden dos.

Recientemente (Datta y Houck, 1984; Takeuchi, 1986), se han propuesto modelos de operación en tiempo real basados en una formulación de restricciones probabilísticas. Sin embargo, este enfoque es, en algún sentido, equivalente determinístico. Aun cuando este término ha sido ya reservado para las políticas resultantes de la sustitución de todas las variables aleatorias por sus valores esperados (condicionales), las políticas de operación derivadas de un modelo que emplee restricciones probabilísticas pueden ser llamadas *equivalente determinístico generalizado*, ya que las variables aleatorias son remplazadas por un cuantil escogido de la distribución de probabilidad en cuestión.

Más recientemente (Wasimi y Kitanidis, 1983; Mariño y Loaiciga, 1985; Loaiciga y Mariño, 1985; Soliman y Christensen, 1986; Trezos y Yeh, 1987; Kuczera, 1989), se han importado juiciosamente algunas técnicas comúnmente empleadas en otras áreas del conocimiento que, desafortunadamente, sólo emplean funciones objetivo cuadráticas o bien requieren que su formulación se ajuste a problemas estructurados. También, se han desarrollado o extendido algunos métodos útiles para situaciones específicas. Entre los más importantes se encuentra, por ejemplo el trabajo de Gjelsvik (1982), quien aplicó programación dinámica diferencial, pero tomando en cuenta la estocasticidad del problema mediante una discretización de la distribución de probabilidad de las aportaciones. Pereira y Pinto (1985) desarrollaron una extensión del método de descomposición de Benders para incluir efectos estocásticos, sin embargo, utilizaron optimización estocástica implícita. Papageorgiou (1985), presenta una aplicación del Principio Máximo, pero considera determinísticamente el problema de la operación de un sistema de presas. Georgakakos y Marks (1987) elaboraron una extensión para poder considerar restricciones en la formulación del ya clásico problema Lineal/Cuadrático/Gaussiano; éste es un problema con dinámica (continuidad en este caso) lineal, función objetivo cuadrática y excitación (aportaciones) gaussiana (ver también Pindyck, 1972; Chan y Maille, 1975; Jacobson, 1977; Whittle, 1981). Georgakakos (1989), ha trabajado aún más en esta extensión para tratar aportaciones no gaussianas. Saad y Turgeon (1988), emplean un enfoque de análisis de componentes principales para agregar un conjunto de presas en una presa equivalente, empleando optimización estocástica implícita. Foufoula–Georgiou y Kitanidis (1988), presentan la programación dinámica de gradiente y su aplicación al control de un sistema de presas; este trabajo constituye una aportación importante, aunque discreticen las variables aleatorias. Finalmente, Simonović y Burn (1989), sugieren un nuevo método en donde el horizonte de planeación es una variable de decisión que cambia en tiempo real; en este caso, la dicotomía consiste en balancear pronósticos de aportaciones más confiables en menores horizontes de planeación contra una mejor operación de la presa asociada con un horizonte de planeación más largo.

El control de malla cerrada u optimización explícita, ha sido preferido desde las primeras aplicaciones a la optimización de la operación de una presa (Massé, 1946; Little, 1955) sobre la optimización implícita (Croley, 1974; Simonović, 1987), debido a que el control de malla cerrada mantiene el problema de pronóstico de variables aleatorias acoplado con el problema de optimización, mientras que los controles determinístico, retroalimentación de malla abierta y retroalimentación estocástica implícita, tratan la estimación de variables aleatorias y la optimización separadamente (Wonham, 1968; Witsenhausen, 1971). Esta diferencia explica el hecho de que una formulación de optimización estocástica de malla cerrada es generalmente superior a las otras tres. Desafortunadamente, esta característica dificulta la obtención de una solución exacta y práctica del problema de optimización estocástica de malla cerrada que, para sistemas con varias variables de estado y de decisión, es "casi siempre un ejercicio de aproximación" (Schweppe, 1973).

Este artículo presenta un nuevo método, aproximado, para la solución del problema de control óptimo estocástico de malla cerrada, y muestra su aplicación al control óptimo de una presa. El método propuesto es apropiado para problemas en tiempo real en los cuales el control óptimo depende principalmente de la mejor proyección o pronóstico de condiciones futuras (efecto determinístico) y menos en la incertidumbre del pronóstico (efecto estocástico). Es importante resaltar que este artículo trata primordialmente con problemas a corto plazo o tácticos, más que con problemas a largo plazo o estratégicos.

Formulación del problema

Considérese un sistema dinámico con ecuación de transición

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(k+1) = \phi(k)\boldsymbol{x}(k) + \psi(k)\boldsymbol{u}(k+1) \\ + \boldsymbol{\mu}(k+1) + \boldsymbol{w}(k+1) \end{aligned} \tag{1}$$

donde $\phi(k)$ es una matriz conocida que puede tomar en cuenta pérdidas por infiltración y evaporación (Loucks, *et al*., 1981), y $\psi(k)$ es una matriz también conocida que representa la topología del sistema de presas (ver por ejemplo Larson y Casti, 1982). $\boldsymbol{x}(k)$ es el vector n–dimensional de estado (almacenamientos) del sistema al principio del intervalo k, $\boldsymbol{u}(k+1)$ es el control (extracción) m–dimensional aplicado durante $(k, k+1)$, $\boldsymbol{\mu}(k+1)$ es una entrada conocida que puede representar el pronóstico de las aportaciones o bien variables exógenas controlables y, $\boldsymbol{w}(k+1)$ es un proceso de vectores aleatorios no correlacionados con media cero y matriz de covariancia

$$E\left[\boldsymbol{w}(k)\boldsymbol{w}^T(k+\ell)\right] = \begin{cases} Q(k), & \text{si} \quad \ell = 0 \\ 0, & \text{si} \quad \ell \neq 0 \end{cases} \tag{2}$$

En este caso $\boldsymbol{w}(k)$ representa la desviación que las variables aleatorias tienen de su pronóstico (o de su media condicional) y el elemento (i,i) de $Q(k)$ es el error cuadrado medio de la estimación (o la variancia condicional) del i–ésimo elemento de $w(k)$. Nótese que la posible dependencia serial del proceso $\boldsymbol{w}(k)$ podría tomarse en cuenta aumentando el estado (Bryson y Ho, 1975).

Si la función objetivo por minimizarse es separable en el tiempo

$$J = E\left\{ f_N(\boldsymbol{x}(N)) + \sum_{k=0}^{N-1} C_k(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k+1)) \right\} \tag{3}$$

donde $f_N(\cdot)$ y $C_k(\cdot)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ son funciones de costo conocidas (generalmente no cuadráticas) y $E(\cdot)$ es el operador esperanza matemática, entonces, la ecuación funcional de la programación dinámica en el tiempo k es (Bellman, 1957)

$$\begin{aligned} f_{k-1}(\boldsymbol{x}(k-1)) = \underset{\boldsymbol{u}(k)}{\text{Min}} \underset{\boldsymbol{w}(k)}{E} \{ f_k\left(\phi(k-1)\boldsymbol{x}(k-1)\right. \\ +\ \psi(k-1)\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{\mu}(k) + \boldsymbol{w}(k)) \\ + C_{k-1}\left(\boldsymbol{x}(k-1), \boldsymbol{u}(k)\right)\} \end{aligned} \tag{4}$$

Si ninguna restricción de desigualdad es activa, la condición necesaria de primer orden para encontrar un punto estacionario es

$$E(f_{k,x})\psi(k-1) + C_{k-1,u} = \mathbf{0} \tag{5}$$

donde $f_{k,x}$ es la primera derivada de f_k con respecto a $\boldsymbol{x}(k)$ evaluada en $\boldsymbol{x}(k) = \phi(k-1)\boldsymbol{x}(k-1) +$

$\psi(k-1)\boldsymbol{u}(k) + \boldsymbol{\mu}(k) + \boldsymbol{w}(k)$; y $C_{k-1,u}$ es la primera derivada de C_{k-1} con respecto a $\boldsymbol{u}(k)$ evaluada en $\boldsymbol{x}(k-1)$ y $\boldsymbol{u}(k)$. Nótese que $f_{k,x}$ es un vector de dimensión $1 \times n$ consistente de las derivadas de f_k con respecto a cada elemento de $\boldsymbol{x}$. Similarmente, $C_{k-1,u}$, es un vector de dimensión $1 \times m$. Se sugiere al lector consultar a Bodewig (1956), Bellman (1960), Athans y Schweppe (1965) y Vetter (1973) para consultar definiciones y fórmulas de cálculo matricial. Encontrar $\boldsymbol{u}(k)$ de esta ecuación vectorial, equivalente a m ecuaciones escalares, puede ser bastante complicado. La excepción más notable es cuando las funciones de costo son cuadráticas. En ese caso $f_{k,x}$ es una función lineal de $\boldsymbol{w}(k)$ de tal forma que $E(f_{k,x})$ no depende de $\boldsymbol{w}(k)$. El control no es afectado por la incertidumbre en los pronósticos o estimaciones de variables aleatorias, y es una función lineal del estado inicial (Sage y White, 1977).

Para el caso general donde las funciones de costo no son cuadráticas, puede lograrse cierto progreso separando el control (Collado y Kitanidis, 1986)

$$\boldsymbol{u}(k) \equiv \boldsymbol{u}_D(k) + \delta\boldsymbol{u}(k) \tag{6}$$

donde $\boldsymbol{u}_D(k)$ es el control determinístico que se obtiene al sustituir todas las variables aleatorias por sus valores esperados, y $\delta\boldsymbol{u}(k)$ es un término de corrección: la diferencia entre el control estocástico y el control determinístico. Nótese que $\boldsymbol{u}_D(k)$ es una función solamente de valores medios de las entradas, $\boldsymbol{\mu}(k)$, mientras que $\delta\boldsymbol{u}(k)$ puede depender de todos los momentos de las variables aleatorias que representan entradas. $\boldsymbol{u}_D(\cdot)$ toma en cuenta determinísticamente variaciones predecibles de entradas futuras, tales como variaciones casi–periódicas y efectos de variables exógenas. $\delta\boldsymbol{u}(\cdot)$ es el resultado de la incertidumbre en el pronóstico de $\boldsymbol{\mu}(\cdot)$, es decir, es una anticipación del hecho de que la verdadera entrada tendrá una variación alrededor del mejor estimado disponible. Por esta razón, se refiere a $\delta\boldsymbol{u}(k)$ como *término de corrección*.

Comparaciones entre controles obtenidos con programación dinámica estocástica y determinística, frecuentemente han demostrado que, en un amplio rango de valores de las variables de estado, los dos métodos de solución proveen resultados que no difieren mucho (Alarcón y Marks, 1979; Rhenals y Bras, 1981). También, los resultados de simulación de Klemeš (1977, 1979) y de Krzysztofowicz (1979), pueden interpretarse para concluir que el control determinístico es aproximadamente óptimo, siempre y cuando la función objetivo sea convexa y ninguna restricción de desigualdad esté próxima a ser activa. Finalmente, numerosas aplicaciones de control determinístico suponen que el término de corrección es pequeño comparado con el efecto determinístico, o bien, es completamente ignorado. Si bien el término de corrección es relativamente pequeño, en algunos problemas es significante comparado con el control determinístico.

Un enfoque, que aparentemente no ha recibido atención, es desarrollar una solución de perturbaciones pequeñas para el término de corrección, en vez de ignorarlo como es el caso del control determinístico, o de tratar de obtenerlo numéricamente de la ecuación funcional de optimización como se hace en programación dinámica estocástica discreta. Tal enfoque parece promisorio ya que permite explotar la estructura de problemas de interés práctico.

Solución de perturbaciones pequeñas

El procedimiento será matemáticamente derivado de tal forma que sea asintóticamente exacto para $\sigma^2 \to 0$, donde σ^2 es un factor de escala de la matriz de covariancia; esto es, el enfoque está basado en la hipótesis de que las variancias de las variables aleatorias de entrada son pequeñas en algún sentido. Adicionalmente, se supone que la ecuación funcional de optimización posee derivadas terceras no idénticamente nulas. Estas hipótesis permiten aproximar el término de corrección con el término dominante de una expansión asintótica. De primera instancia, estas hipótesis pueden parecer restrictivas, sin embargo, la experiencia con métodos de perturbaciones pequeñas en varios campos del conocimiento, indica que dichos métodos pueden ser bastante robustos. Esto es, pueden dar resultados considerablemente satisfactorios, incluso cuando σ^2 toma valores de significancia práctica. Este trabajo ilustra que ese es también el caso para el método propuesto.

Siguiendo un enfoque de perturbación de un parámetro (Nayfeh, 1973), el control se expande en

$$\boldsymbol{u}(k) = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}_1\sigma + \boldsymbol{u}_2\sigma^2 + \cdots \tag{7}$$

donde $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots$ son políticas de control, esto es, son funciones del estado $\boldsymbol{x}(k-1)$. Los puntos suspensivos en la expansión representan términos de orden σ^3 y superiores. En este trabajo, esos términos de orden superior serán despreciados. Aproximaciones de orden superior son posibles pero están más allá del alcance de este artículo. Consistente con (7), la ecuación funcional de optimización puede ser expandida en

$$f_k(\boldsymbol{x}(k)) = D_k(\boldsymbol{x}(k)) + S_k(\boldsymbol{x}(k))\sigma^2 \tag{8}$$

donde $D_k(\cdot)$ es la ecuación funcional de optimización correspondiente a un problema determinístico, es decir, sustituyendo todas las variables aleatorias por sus valores esperados y, $S_k(\cdot)\sigma^2$ es la diferencia entre las funcionales de optimización estocástica y determinística. Nótese que esta diferencia se expresa como el producto de una función por el parámetro que escala a la matriz de covarianza, lo cual implica que $S_k(\cdot)$ depende funcionalmente de $\boldsymbol{u}(k)$ y no de $\boldsymbol{w}(k)$. De esta forma, la funcional de optimización (4) puede expresarse como

$$f_{k-1}(\boldsymbol{x}(k-1)) = \underset{\boldsymbol{u}(k)}{\text{Min}} \underset{\boldsymbol{w}(k)}{E} \left[D_k(\boldsymbol{u}(k), \boldsymbol{w}(k)) + S_k(\boldsymbol{u}(k))\sigma^2\right] \quad (9)$$

la condición de primer orden para un óptimo es

$$E\left[\nabla_u D_k\right] + \nabla_u S_k \sigma^2 = \mathbf{0} \quad (10)$$

y la condición de segundo orden para que la solución sea un mínimo local único es que el Hessiano sea una matriz positiva definida (Luenberger, 1973)

$$E\left[\nabla_u \nabla_u^T D_k\right] + \sigma^2 \nabla_u \nabla_u^T S_k > 0 \quad (11)$$

suponiendo que $E(\boldsymbol{w}^n) \sim \mathcal{O}(\sigma^n)$ y empleando la expresión (7), la expansión de (10) en series de Taylor alrededor de valores nominales $\boldsymbol{u}_0$ y $\boldsymbol{w}_0$, y considerando hasta términos de orden σ^2 es

$$\begin{aligned}\nabla_u D_k + (\boldsymbol{u}_1\sigma + \boldsymbol{u}_2\sigma^2)^T \cdot \nabla_u \nabla_u^T D_k \\ +E\left[\boldsymbol{w}^T \cdot \nabla_w \cdot \nabla_u^T D_k\right] \\ +\frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{u}_1\sigma)^T \cdot \nabla_u\right]^2 \nabla_u D_k \\ +\frac{1}{2}E\left[(\boldsymbol{w}^T \cdot \nabla_w)^2 \nabla_u D_k\right] \\ +E\left[\boldsymbol{w}^T(\nabla_w \nabla_u^T)(\boldsymbol{u}_1\sigma + \boldsymbol{u}_2\sigma^2)\nabla_u D_k\right] \\ +\sigma^2 \nabla_u S_k = \mathbf{0}\end{aligned} \quad (12)$$

considerando sólo términos de orden cero

$$\nabla_u D_k(\boldsymbol{u}_0(k), \boldsymbol{w}_0(k)) = \mathbf{0} \quad (13)$$

resolviendo (13) se obtiene la política de control determinística $\boldsymbol{u}_0(k)$. Suponiendo que esta solución es un mínimo local único, el Hessiano debe ser positivo definido

$$H = \nabla_u \nabla_u^T D_k > 0 \quad (14)$$

una vez obtenida $\boldsymbol{u}_0(k)$, se pueden calcular todas las derivadas que aparecen en (12). Tomando en cuenta sólo términos de orden σ y recordando que $E(\boldsymbol{w}) = \mathbf{0}$

$$H\boldsymbol{u}_1 = \mathbf{0} \quad (15)$$

lo que implica $\boldsymbol{u}_1 = \mathbf{0}$. Considerando términos de orden σ^2

$$\sigma^2 H\boldsymbol{u}_2 + \frac{1}{2}E(\boldsymbol{w}^T \cdot \nabla_w)^2 \nabla_u D_k + \sigma^2 \nabla_u S_k = \mathbf{0} \quad (16)$$

notando que $E(\boldsymbol{w}^T \cdot \nabla_w)^2 = E(\nabla_w \cdot \boldsymbol{w})^2$,
se obtiene

$$E(\nabla_w \cdot \boldsymbol{w})^2 = E(\nabla_w \boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T \nabla_w^T) = \nabla_w Q \nabla_w^T \quad (17)$$

por lo que

$$H\boldsymbol{u}_2 = -\frac{1}{2\sigma^2}\nabla_w Q \nabla_w^T \nabla_u D_k - \nabla_u S_k \quad (18)$$

esto es, la solución $\boldsymbol{u}_2$ está dada por el sistema lineal

$$H\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{h} - \nabla_u S_k \quad (19)$$

donde $\boldsymbol{h}$ es un vector cuyo ℓ–ésimo elemento es

$$\begin{aligned} h_\ell &= -\sum_i \sum_j \frac{1}{2\sigma^2} Q_{ij} \frac{\partial^3 D_k(\boldsymbol{u}_0(k), \boldsymbol{w}_0(k))}{\partial w_i \partial w_j \partial u_\ell} \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2} Tr(QL_\ell) \end{aligned} \quad (20)$$

siendo $Tr(\cdot)$ la traza de una matriz y L_ℓ es una matriz simétrica cuyo elemento (i,j) es:

$$[L_\ell]_{ij} = \frac{\partial^3 D_k(\boldsymbol{u}_0(k), \boldsymbol{w}_0(k))}{\partial w_i \partial w_j \partial u_\ell} \quad (21)$$

De esta forma, se demuestra que una solución de perturbaciones pequeñas está dada por

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}_2\sigma^2 \quad (22)$$

donde $\boldsymbol{u}_0$ es la solución del problema de optimización determinístico y $\boldsymbol{u}_2$ está dada por la ecuación (19). El valor mínimo de la función objetivo, considerando hasta términos de orden σ^2, es

$$D_k(\boldsymbol{u}_0(k), 0) + \frac{1}{2}Tr(QF) + S_k(\boldsymbol{u}_0(k))\sigma^2 \quad (23)$$

donde F es la matriz simétrica de segundas derivadas de $D_k(\cdot)$ con respecto a $\boldsymbol{w}$

$$F_{ij} = \frac{\partial^2 D_k(\boldsymbol{u}_0(k), \boldsymbol{w}_0(k))}{\partial w_i \partial w_j} \tag{24}$$

El mejoramiento en la función objetivo debido al término de corrección es de orden σ^4

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_2^T H \boldsymbol{u}_2 \sigma^4 - \frac{1}{2}(\nabla_w Q \nabla_w^T)\nabla_u D_k \boldsymbol{u}_2 \sigma^2 - \nabla_u S_k \boldsymbol{u}_2 \sigma^4$$
$$= \frac{1}{2}(\boldsymbol{h}^T + \nabla_u S_k) H^{-1} (\boldsymbol{h} + \nabla_u^T S_k)\sigma^4 \tag{25}$$

que es una cantidad positiva semidefinida. El mejoramiento es una función cuadrática de la primera derivada de $S_k(\cdot)$ y de la tercera derivada de $D_k(\cdot)$.

Resumiendo, $\boldsymbol{u}_0$ es el control determinístico y satisface la ecuación (13). Por ejemplo, si ninguna restricción de desigualdad es activa, $\boldsymbol{u}_0$ es la solución del sistema de ecuaciones

$$C_{k,u} + D_{k,u} = \mathbf{0} \tag{26}$$

o bien, del sistema

$$C_{k,u} + D_{k,x}\psi(k-1) = \mathbf{0} \tag{27}$$

si se utiliza la regla de la cadena. La condición de segundo orden (14) para que $\boldsymbol{u}_0$ sea un mínimo local único puede expresarse como

$$H = C_{k,uu} + \psi^T(k-1) D_{k,xx} \psi(k-1) > 0 \tag{28}$$

y la política $\boldsymbol{u}_2$ se obtiene resolviendo el sistema lineal

$$H\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{h} - \left[S_{k,x}\psi(k-1)\right]^T \tag{29}$$

donde $S_{k,x}$ es un vector n dimensional de derivadas de S_k con respecto a $\boldsymbol{x}(k)$, $\boldsymbol{h}$ es un vector m dimensional cuyo ℓ–ésimo elemento está dado por (20), y $[L_\ell]_{ij}$ de la ecuación (21) puede escribirse como

$$[L_\ell]_{ij} = \frac{\partial^3 D_k}{\partial w_i \partial w_j \partial w_\ell} = \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial^3 D_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_a}\psi_{a\ell} \tag{30}$$

La función de costo puede escribirse como

$$f_{k-1}(\boldsymbol{x}(k-1)) = D_{k-1}(\boldsymbol{x}(k-1)) + S_{k-1}(\boldsymbol{x}(k-1))\sigma^2 \tag{31}$$

donde

$$D_{k-1}(\boldsymbol{x}(k-1)) = C_{k-1}(\boldsymbol{x}(k-1), \boldsymbol{u}_0(k)) + D_k[\phi(k-1)\boldsymbol{x}(k-1) + \psi(k-1)\boldsymbol{u}_0(k) + \boldsymbol{\mu}(k)] \tag{32}$$

y

$$S_{k-1}(\boldsymbol{x}(k-1)) = S_k[\phi(k-1)\boldsymbol{x}(k-1) + \psi(k-1)\boldsymbol{u}_0(k) + \boldsymbol{\mu}(k)] + \frac{1}{2\sigma^2}Tr(QD_{k,xx}) \tag{33}$$

Todas las derivadas están evaluadas en $\boldsymbol{x}(k-1)$ y $\boldsymbol{u}_0(k)$. Obsérvese que (31) es válida en el último periodo del horizonte de planeación ya que $S_N(\boldsymbol{x}(N)) = 0$, y la ecuación (33) asegura su validez para cualquier otro periodo.

Cálculo de los controles determinístico y de corrección

Regresando al problema de optimización en el tiempo, $\boldsymbol{u}_0$ puede obtenerse considerando sólo términos de orden cero. La condición de frontera es

$$D_N(\boldsymbol{x}(N)) = f_N(\boldsymbol{x}(N)) \tag{34}$$

y las ecuaciones iterativas son

$$D_{k-1}(\boldsymbol{x}(k-1)) = \underset{\boldsymbol{u}_0(k)}{\mathrm{Min}} \{C_{k-1}(x(k-1), \boldsymbol{u}_0(k)) + D_k[\phi(k-1)\boldsymbol{x}(k-1) + \psi(k-1)\boldsymbol{u}_0(k) + \boldsymbol{\mu}(k)]\} \tag{35}$$

sujetas a las restricciones de desigualdad pertinentes, tales como no negatividad y capacidad de la presa en los almacenamientos, y límites inferior y superior en las descargas.

Es obvio que el término de orden cero en la expansión asintótica (7) es el control determinístico. El problema del control determinístico, aunque mucho más fácil de resolver que el problema general de optimización estocástica, no es trivial para sistemas complejos de presas. Turgeon (1981) ha recalcado que casi todos los métodos de optimización han sido aplicados a este problema y ha dado una lista extensa de referencias (ver también Rosenthal, 1980; Kaczmarek y Kindler, 1982; y Yeh, 1985). Las primeras aplicaciones de optimización de la operación de una presa utilizaron programación dinámica discreta, basada en la discretización de las variables de estado y de control. Para esta aplicación, el único requisito es que la función objetivo y las restricciones sean separables de un periodo a otro, sin restringir el tipo de función objetivo, restricciones o ecuación de transición de estados. Sin embargo, el costo computacional y los requerimientos de memoria en una computadora asociados con programación dinámica discreta, crecen exponencialmente con el número de variables de estado y de control (el así llamado *maleficio de la dimensionalidad*).

Un número de técnicas iterativas o de aproximaciones sucesivas también están disponibles para solucionar problemas de control determinístico de gran dimensionalidad, dado el estado inicial. Yakowitz (1982) ha revisado tales procedimientos, poniendo un bien merecido énfasis en aspectos computacionales. En términos generales, el principio de optimización o el principio máximo de Pontryagin (equivalente a las condiciones de Kuhn–Tucker) se emplea primero para proveer las condiciones necesarias de primer orden y obtener un punto estacionario (ver por ejemplo, Holtzman y Halkin, 1966). Después, suponiendo que esas condiciones también son suficientes para obtener un óptimo (lo que en general implica algún tipo de convexidad), la solución óptima puede encontrarse utilizando métodos numéricos iterativos tales como máximo descenso, Newton, cuasilinearización, etc. Si el problema no es convexo, se debe tener cuidado para no identificar a un óptimo local erróneo; para que los métodos iterativos converjan al óptimo global, generalmente uno debe comenzar el procedimiento desde un punto *suficientemente cercano* al óptimo. La principal ventaja de estas técnicas es que son computacionalmente mucho más eficientes que la programación dinámica discreta.

Supóngase que usando algún método de programación dinámica, tal como programación dinámica diferencial (Jacobson y Mayne, 1970), la serie de controles determinísticos, $\boldsymbol{u}_0(1)$, $\boldsymbol{u}_0(2)$,... , $\boldsymbol{u}_0(N)$, ha sido obtenida. Comenzando desde la condición inicial conocida, $\boldsymbol{x}(0)$, y utilizando esta secuencia de controles en la ecuación de transición de estados (1), se obtiene una trayectoria de estados nominales.

Para estimar analíticamente el término de corrección, la segunda y tercera derivadas de la función de costo determinística, $D_k(\boldsymbol{x}(k))$, deben ser calculadas a lo largo de la trayectoria nominal. $D_k(\boldsymbol{x}(k))$ se determina sustituyendo en (35) la política de control óptimo determinístico $\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x}(k-1))$, lo cual reduce al argumento de la función de costo determinística a sólo el estado

$$\begin{aligned} D_{k-1}(\boldsymbol{x}(k-1)) = C_{k-1}\left(\boldsymbol{x}(k-1), \boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x}(k-1))\right) \\ + D_k\left[\phi(k-1)\boldsymbol{x}(k-1) + \right. \\ \left. \psi(k-1)\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x}(k-1)) + \boldsymbol{\mu}(k)\right] \end{aligned} \quad (36)$$

derivando esta ecuación, mediante la regla de la cadena se obtienen las derivadas necesarias

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_{k-1}}{\partial x_i} &= \frac{\partial C_{k-1}}{\partial x_i} + \sum_{a=1}^{m} \frac{\partial C_{k-1}}{\partial u_a}\frac{\partial u_a}{\partial x_i} \\ &+ \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial D_k}{\partial x_a}\left(\phi_{ai} + \sum_{b=1}^{m} \psi_{ab}\frac{\partial u_b}{\partial x_i}\right) \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 D_{k-1}}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2 C_{k-1}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m} \frac{\partial^2 C_{k-1}}{\partial u_a \partial u_b}\frac{\partial u_a}{\partial x_i}\frac{\partial u_b}{\partial x_j} \\ &+ \sum_{a=1}^{m} \frac{\partial C_{k-1}}{\partial u_a}\frac{\partial^2 u_a}{\partial x_i \partial x_j} \\ &+ \sum_{a=1}^{m}\sum_{c=1}^{m} \frac{\partial^2 D_k}{\partial x_a \partial x_c}\left(\phi_{ai} + \sum_{b=1}^{m}\psi_{ab}\frac{\partial u_b}{\partial x_i}\right) \\ &\times \left(\phi_{cj} + \sum_{d=1}^{m}\psi_{cd}\frac{\partial u_d}{\partial x_j}\right) \\ &+ \sum_{a=1}^{n}\frac{\partial D_k}{\partial x_a}\sum_{b=1}^{m}\psi_{ab}\frac{\partial^2 u_b}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 D_{k-1}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_\ell} &= \frac{\partial^3 C_{k-1}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_\ell} \\ &+ \sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}\sum_{c=1}^{m} \frac{\partial^3 C_{k-1}}{\partial u_a \partial u_b \partial u_c}\frac{\partial u_a}{\partial x_i}\frac{\partial u_b}{\partial x_j}\frac{\partial u_c}{\partial x_\ell} \\ &+ \sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}\frac{\partial^2 C_{k-1}}{\partial u_a \partial u_b}\left(\frac{\partial u_a}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_b}{\partial x_j \partial x_\ell}\right. \\ &+ \left.\frac{\partial u_a}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u_b}{\partial x_i \partial x_\ell} + \frac{\partial u_a}{\partial x_\ell}\frac{\partial^2 u_b}{\partial x_i \partial x_j}\right) \\ &+ \sum_{a=1}^{m}\frac{\partial C_{k-1}}{\partial u_a}\frac{\partial^3 u_a}{\partial x_i \partial x_j \partial x_\ell} \\ &+ \sum_{a=1}^{n}\sum_{c=1}^{n}\sum_{e=1}^{n}\frac{\partial^3 D_k}{\partial x_a \partial x_c \partial x_e}\left(\phi_{ai} + \sum_{b=1}^{m}\psi_{ab}\frac{\partial u_b}{\partial x_i}\right) \\ &\times \left(\phi_{bj} + \sum_{d=1}^{m}\psi_{cd}\frac{\partial u_d}{\partial x_j}\right)\left(\phi_{ek} + \sum_{f=1}^{m}\psi_{ef}\frac{\partial u_f}{\partial x_k}\right) \\ &+ \sum_{a=1}^{n}\sum_{c=1}^{n}\frac{\partial^2 D_k}{\partial x_a \partial x_c}\left\{\left(\sum_{b=1}^{m}\psi_{ab}\frac{\partial^2 u_b}{\partial x_i \partial x_\ell}\right)\right. \\ &\times \left(\phi_{cj} + \sum_{d=1}^{m}\psi_{cd}\frac{\partial u_d}{\partial x_j}\right) + \left(\sum_{b=1}^{m}\psi_{ab}\frac{\partial^2 u_b}{\partial x_j \partial x_\ell}\right) \\ &\times \left(\phi_{ci} + \sum_{d=1}^{m}\psi_{cd}\frac{\partial u_d}{\partial x_i}\right) + \left(\sum_{b=1}^{m}\psi_{ab}\frac{\partial^2 u_b}{\partial x_i \partial x_j}\right) \end{aligned}$$

$$\times\left(\phi_{c\ell}+\sum_{d=1}^{m}\psi_{cd}\frac{\partial u_d}{\partial x_\ell}\right)\Bigg\}+\sum_{a=1}^{n}\frac{\partial D_k}{\partial x_a}$$
$$\times\sum_{b=1}^{m}\psi_{ab}\frac{\partial^3 u_b}{\partial x_i\partial x_j\partial x_\ell} \qquad (39)$$

estas ecuaciones son completamente generales, sin embargo, en la mayor parte de las aplicaciones, muchos de los términos son idénticamente nulos y no requieren ser calculados.

La solución de perturbaciones pequeñas al problema de optimización estocástica, ecuación (29), también requiere el cálculo de $S_{k,x}$, el vector de primeras derivadas de S_k con respecto a las variables de estado. Al final del horizonte de planeación

$$S_{N,x}(\boldsymbol{x}(N))=\mathbf{0} \qquad (40)$$

y los elementos de $S_{k-1,x}$ son calculados de periodo en periodo, moviéndose hacia atrás en el tiempo, utilizando

$$\frac{\partial S_{k-1}}{\partial x_i}=\sum_{a=1}^{n}\frac{\partial S_{k-1}}{\partial x_a}\left(\phi_{ai}+\sum_{b=1}^{m}\psi_{ab}\frac{\partial u_b}{\partial x_i}\right)$$
$$+\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n}Q_{ab}\sum_{c=1}^{n}\frac{\partial^3 D_k}{\partial x_a\partial x_b\partial x_c}$$
$$\times\left(\phi_{ci}+\sum_{d=1}^{m}\psi_{cd}\frac{\partial u_d}{\partial x_i}\right) \qquad (41)$$

Nótese que en estas ecuaciones, se ha simplificado la notación. Por ejemplo, $\frac{\partial D_k}{\partial x_i}$, denota $\frac{\partial D_k(\boldsymbol{x}(k))}{\partial x_i(k)}$. Estas ecuaciones involucran las derivadas de la política de control con respecto a las variables de estado, evaluadas en la trayectoria nominal. Las derivadas deben ser calculadas con las mismas ecuaciones utilizadas para obtener el control óptimo determinístico, esto es, las condiciones necesarias de primer orden. Entonces, la forma exacta en que son calculadas difiere de un caso a otro, dependiendo del algoritmo de optimización determinística usado y del tipo de restricciones de desigualdad activas, si existen.

Restricciones de desigualdad inactivas

Considérese el caso donde no se tienen restricciones de desigualdad activas en el periodo k. Entonces, el control satisface la ecuación (27), que puede reescribirse como

$$\frac{\partial C_{k-1}}{\partial u_i}+\sum_{a=1}^{n}\frac{\partial D_k}{\partial x_a}\psi_{ai}=0, \quad i=1,2,\ldots,m \qquad (42)$$

para cada estado $\boldsymbol{x}(k-1)$, esta ecuación provee una solución única $\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x}(k-1))$, de tal forma que implícitamente define una política de operación. Esta ecuación puede usarse para calcular las derivadas de $\boldsymbol{u}$ con respecto a $\boldsymbol{x}(k-1)$. La derivada de (42) con respecto a $\boldsymbol{x}_j(k-1)$ es

$$\frac{\partial^2 C_{k-1}}{\partial x_j\partial u_i}+\sum_{a=1}^{m}\frac{\partial^2 C_{k-1}}{\partial u_a\partial u_i}\frac{\partial u_a}{\partial x_j}$$
$$+\sum_{a=1}^{n}\psi_{ai}\left\{\sum_{b=1}^{n}\frac{\partial^2 D_k}{\partial x_a\partial x_b}\left(\phi_{bj}+\sum_{c=1}^{m}\psi_{bc}\frac{\partial u_c}{\partial x_j}\right)\right\}=0$$
$$i=1,\ldots,m$$
$$j=1,\ldots,n \qquad (43)$$

todas las derivadas son evaluadas en la trayectoria nominal, de tal manera que (43) es un sistema lineal de $n\times m$ ecuaciones con igual número de incógnitas, las derivadas $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$. Derivando (43) con respecto a $x_\ell(k-1)$ se obtiene

$$\frac{\partial^3 C_{k-1}}{\partial u_i\partial x_j\partial x_\ell}+\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}\frac{\partial^3 C_{k-1}}{\partial u_a\partial u_b\partial u_i}\frac{\partial u_a}{\partial x_j}\frac{\partial u_b}{\partial x_\ell}$$
$$+\sum_{a=1}^{m}\frac{\partial^2 C_{k-1}}{\partial u_a\partial u_i}\frac{\partial^2 u_a}{\partial x_j\partial x_\ell}$$
$$+\sum_{a=1}^{n}\psi_{ai}\sum_{b=1}^{n}\sum_{d=1}^{n}\frac{\partial^3 D_k}{\partial x_a\partial x_b\partial x_d}$$
$$\times\left(\phi_{bj}\sum_{c=1}^{m}\psi_{bc}\frac{\partial u_c}{\partial x_j}\right)\left(\phi_{d\ell}+\sum_{e=1}^{m}\psi_{de}\frac{\partial u_e}{\partial x_\ell}\right)$$
$$+\sum_{a=1}^{n}\psi_{ai}\sum_{b=1}^{n}\frac{\partial^2 D_k}{\partial x_a\partial x_b}\sum_{c=1}^{n}\psi_{bc}\frac{\partial^2 u_c}{\partial x_j\partial x_\ell}=0$$
$$i=1,\ldots,m$$
$$j=1,\ldots,n$$
$$\ell=1,\ldots,n \qquad (44)$$

este es un sistema lineal de $n\times n\times m$ ecuaciones a partir del cual se pueden calcular las segundas derivadas de la política de control con respecto a las variables de estado. Las terceras derivadas de $\boldsymbol{u}$ con respecto a $\boldsymbol{x}(k-1)$ no se requieren; sólo aparecen en la ecuación (39) multiplicadas por

$$\sum_{a=1}^{m}\left(\frac{\partial C_{k-1}}{\partial u_a}+\sum_{b=1}^{n}\psi_{ba}\frac{\partial D_k}{\partial x_b}\right) \qquad (45)$$

que es igual a cero de acuerdo con la ecuación (42).

Restricciones lineales activas

Un caso común es aquél en el que se tienen restricciones lineales de desigualdad. Las extracciones deben ser no negativas y menores que la capacidad de la obra de toma, del vertedor o ambos para una elevación dada en cada presa; los almacenamientos también deben ser no negativos y menores que la capacidad total de cada vaso. En el caso estocástico con discretización en el tiempo examinado en este trabajo, estas restricciones tienen sentido sólo si se definen como los equivalentes determinísticos de restricciones probabilísticas (*chance constraints*). Por ejemplo, la extracción $\boldsymbol{u}(k)$ dado el almacenamiento inicial $\boldsymbol{x}(k-1)$ puede restringirse de tal forma que la probabilidad de que el almacenamiento final $\boldsymbol{x}(k)$ sea no negativo, sea mayor o igual que α

$$\Pr\left[\phi(k-1)\boldsymbol{x}(k-1)+\psi(k-1)\boldsymbol{u}(k) \\ +\boldsymbol{\mu}(k)+\boldsymbol{w}(k)\geq 0\right]\geq\alpha \tag{46}$$

esta restricción probabilística posee una restricción equivalente determinística igual a

$$\boldsymbol{u}(k)\geq-\left[\psi^T(k-1)\psi(k-1)\right]^{-1}\times \\ \left\{F^{-1}_{\boldsymbol{w}(k)}(1-\alpha)+\phi(k-1)\boldsymbol{x}(k-1)+\boldsymbol{\mu}(k)\right\} \tag{47}$$

donde $F^{-1}_{\boldsymbol{w}(k)}(1-\alpha)$ es el cuantil de orden $1-\alpha$ de la distribución de probabilidad de $\boldsymbol{w}(k)$. Adicionalmente al equivalente determinístico (47), la extracción también debe cumplir

$$\boldsymbol{u}(k)\geq\boldsymbol{u}_{\text{mín}}(k) \tag{48}$$

donde cualquier elemento de $\boldsymbol{u}_{\mathrm{m\,min\,in}}(k)$ puede ser cero, o bien, un gasto mínimo para lograr el despegue del agua en una cubeta deflectora, por ejemplo. Similarmente, se puede restringir la extracción $\boldsymbol{u}(k)$ — conocido $\boldsymbol{x}(k-1)$— para que la probabilidad de que el almacenamiento $\boldsymbol{x}(k)$ sea menor o igual que la capacidad de la presa, K, sea mayor o igual que β

$$\Pr\left[\phi(k-1)\boldsymbol{x}(k-1)+\psi(k-1)\boldsymbol{u}(k)+ \\ \boldsymbol{\mu}(k)+\boldsymbol{w}(k)\leq K\right]\geq\beta \tag{49}$$

mediante su equivalente determinístico

$$\boldsymbol{u}(k)\leq-\left[\psi^T(k-1)\psi(k-1)\right]^{-1}\times \\ \left\{F^{-1}_{\boldsymbol{w}(k)}(\beta)+\phi(k-1)\boldsymbol{x}(k-1)+\boldsymbol{\mu}(k)-K\right\} \tag{50}$$

esta extracción también puede restringirse a que sea menor o igual que un valor máximo

$$\boldsymbol{u}(k)\leq\boldsymbol{u}_{\text{máx}}(k) \tag{51}$$

donde algún elemento de $\boldsymbol{u}_{\text{máx}}(k)$ puede ser, por ejemplo, la capacidad de una obra de toma, la de un vertedor, o ambas.

Debe enfatizarse que los equivalentes determinísticos de restricciones probabilísticas no deben de interpretarse inflexiblemente, ya que si ocurre algún escurrimiento extremo, la extracción puede ajustarse mediante un control de retroalimentación en una escala de tiempo menor que el periodo utilizado para la optimización estocástica con discretización en el tiempo. En cualquier caso, si alguna restricción es activa, se debe introducir el Lagrangiano, como se describe en Murray y Yakowitz (1979). A partir de las condiciones necesarias de primer orden, se determinan la solución y las derivadas requeridas. Este método se emplea en el ejemplo presentado en la siguiente sección.

Interpretación cualitativa de los resultados

Una ventaja del método desarrollado, es que su naturaleza semianalítica elucida el problema de optimización estocástica de una manera que no es posible cuando se utiliza el método numérico de programación dinámica estocástica discreta. La discusión siguiente está basada en una interpretación cualitativa de las ecuaciones de perturbaciones pequeñas.

El término de corrección generalmente se incrementa con la incertidumbre en el pronóstico de futuros escurrimientos. De acuerdo con el enfoque de perturbaciones pequeñas, si la matriz de covariancia del error del pronóstico se multiplica por una constante, el término de corrección también es multiplicado por la misma constante. El término de corrección también depende de derivadas de la función de costo de orden superior a dos. Por lo tanto, si la función objetivo es cuadrática, el término de corrección es idénticamente nulo; esto es, el problema es determinísticamente equivalente (Bar–Shalom y Tse, 1974). También se deriva de este análisis que el término de corrección es, en algún sentido, proporcional al cociente de las terceras derivadas de la función de costo entre sus segundas derivadas. Sin embargo, en muchos casos presentados en la literatura, las segundas derivadas de la función de costo son mucho mayores que las terceras derivadas y el término de corrección es pequeño.

El valor esperado de la función de costo se calcula mediante la suma de una parte determinística y una parte *estocástica*, ecuación (8). El primer término corresponde al caso ideal de pronósticos perfectos. El segundo término se incrementa con la incertidumbre de los pronósticos y se calcula, bajo las hipótesis empleadas en este trabajo, en términos de la covariancia del error de los pronósticos de futuros escurrimientos. La ecuación (33) puede usarse para evaluar la utilidad de procedimientos de pronóstico de aportaciones a vasos en tiempo real, para reducir el costo de operación de un sistema de presas. Este costo puede variar considerablemente, dependiendo del estado inicial del sistema. Para estados en los cuales *la función de costo es casi lineal* (segundas derivadas pequeñas), como suele suceder cuando se opera una presa bajo condiciones normales, reducir la variancia del error de los pronósticos de escurrimiento tiene un efecto relativamente pequeño. Sin embargo, cuando la función de costo tiene una gran curvatura con respecto a las variables de estado, como generalmente sucede cuando las presas están casi llenas o casi vacías, el mejoramiento de los procedimientos para pronosticar futuras aportaciones, tiene un gran valor en la reducción del costo de operación.

La ecuación (41) acrecenta el entendimiento de cómo los controles presentes, tales como extracciones, son afectados por disturbios aleatorios que se presentarán en el futuro. Este efecto depende de la *tercera derivada* de la función de costo evaluada en el periodo donde se anticipa que ocurrirán los disturbios, de la variancia de los disturbios y también de la dinámica del sistema en cuestión. La dinámica del sistema se manifiesta a través de la matriz de transición del sistema, esto es, la matriz de orden $n \times n$ cuyo ij-ésimo elemento es

$$\phi_{ij} + \sum_{a=1}^{m} \psi_{ia} \frac{\partial u_a}{\partial x_j} \tag{52}$$

mientras más pequeños sean los valores característicos de esta matriz, menor será el efecto de los disturbios futuros en los controles presentes. Entonces, disturbios aleatorios que pueden ocurrir dentro de muchos periodos, tienen poco efecto en las extracciones presentes, cuando existen oportunidades de ajustar las extracciones en algún periodo intermedio. Esto también ilustra que el método propuesto es efectivamente de malla cerrada y no simplemente de retroalimentación. A diferencia de los controles de malla abierta, el presente algoritmo toma en cuenta que el control puede ser modificado en respuesta a *mediciones futuras*. En *muchos casos, la* incertidumbre de los pronósticos de las aportaciones en los primeros intervalos de tiempo, es la que tiene el mayor impacto en las extracciones presentes (Whittle, 1983).

Ejemplo computacional

En este trabajo, se presentará solamente un ejemplo sencillo para ilustrar que la hipótesis de pequeñas perturbaciones no necesariamente afecta la exactitud del método desarrollado. Considérese una sola presa con aportaciones estadísticamente independientes. Sea x el almacenamiento y u la extracción. Considérese un horizonte de planeación finito y una función objetivo

$$\text{Min}\, E \left\{ \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2} [u(i) - 1]^4 + [x(4) - 3]^6 \right\} \tag{53}$$

sujeta a la ecuación de transición (continuidad)

$$x(k+1) = x(k) - u(k+1) + 3 + w(k+1) \tag{54}$$

y a las restricciones de desigualdad

$$0 \leq x(k) \leq 12$$

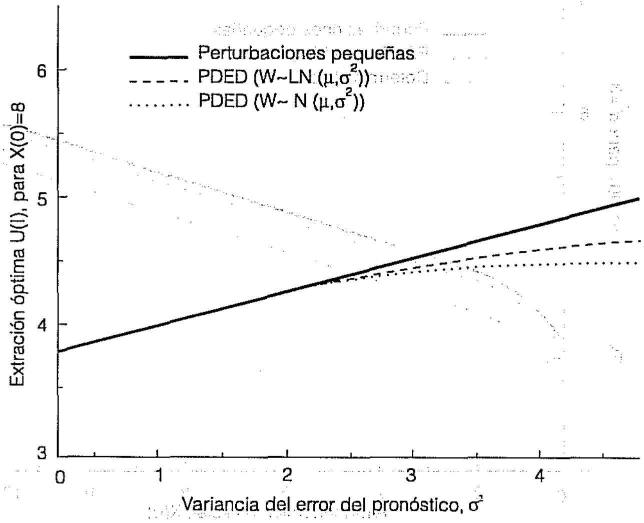
$$, \quad k = 1, 2, 3, 4 \tag{55}$$

$$0 \leq u(k)$$

en este caso, $\mu(k) = 3$ para toda k y $w(k)$ es una secuencia de variables aleatorias independientes con media cero y variancia σ^2. Aquí, σ^2 representa el error cuadrado medio del error de los pronósticos de las aportaciones a la presa. El problema *es determinar* $u(1)$, la primera extracción, de tal forma que el valor esperado del costo de operación sea mínimo, dado el almacenamiento inicial $x(0)$.

Como primer paso, se obtiene el control determinístico a través de programación dinámica diferencial, según describen Murray y Yakowitz (1979). Después, las derivadas necesarias se calculan sobre la trayectoria nominal definida por la ecuación de transición (54) y los controles óptimos determinísticos. Finalmente, el término de corrección se calcula con la ecuación (29). De esta manera, el control óptimo $u(k) = u_0(k) + u_2(k)\sigma^2$ para el primer periodo, $u(1)$, dado $x(0) = 8$, se muestra en la ilustración 1 para varios valores de σ^2. Como puede observarse, la *extracción se incrementa con el error cuadrado medio* del pronóstico de la aportación y, esta dependencia es lineal de acuerdo con la hipótesis de perturbaciones pequeñas.

1. Primer control de una presa en función del error del pronóstico de la aportación futura



Para efectos de comparación, el mismo problema se resolvió con programación dinámica estocástica discreta, PDED. Los resultados obtenidos con este método contienen un error relacionado con la discretización de las variables de estado (almacenamientos), entrada (aportaciones) y control (extracciones). A menos que se utilice una malla fina, el error de discretización con PDED para valores pequeños de σ^2, es más grande que el error con perturbaciones pequeñas. Escogiendo un esquema computacional que permita encontrar $u(k)$ sin error de discretización ($\Delta x = 0.25$, en este caso), se puede obtener la solución mostrada en la ilustración 1. Las aportaciones fueron supuestas variables aleatorias con distribución lognormal con media 3 y variancia σ^2, y dicha distribución se representó mediante diez valores discretos. La probabilidad de violar las restricciones de no negatividad o capacidad de la presa, se escogió igual a cinco por ciento.

No es sorprendente que ambos métodos den resultados similares para σ^2 cercana a cero, ya que la solución de perturbaciones pequeñas es asintóticamente exacta cuando $\sigma^2 \rightarrow 0$. Resulta, sin embargo, verdaderamente interesante que la solución propuesta se aproxime a la extracción óptima sobre un rango de valores de σ^2 bastante amplio. Nótese que, para el caso en cuestión, valores grandes de σ^2 serían de poca importancia práctica, ya que el control óptimo en tiempo discreto supone que el intervalo de tiempo es lo suficientemente pequeño, de tal manera que las condiciones de almacenamiento y extracción no cambien demasiado y el control pueda considerarse constante.

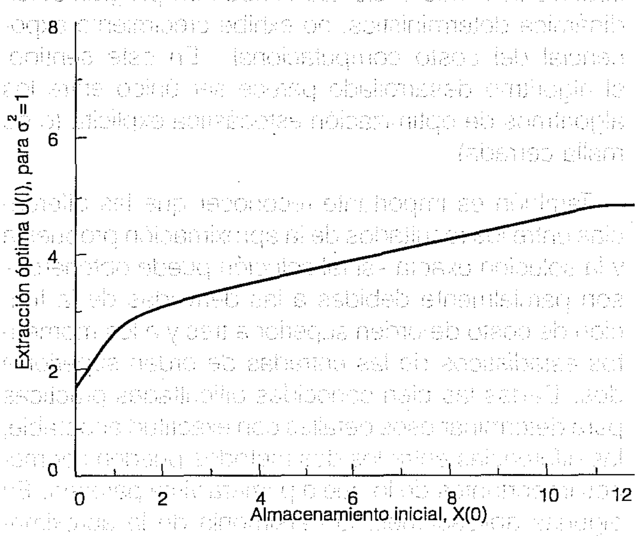
PDED también fue usada con restricciones al 15% de probabilidad de violar restricciones en el almacenamiento de no negatividad y no excedencia de la capacidad de la presa, con un efecto insignificante en los resultados para $x(0) = 8$. Una diferencia notable ocurre cuando la distribución lognormal es remplazada por la normal (ver ilustración 1), aunque ésta se encuentra limitada a valores grandes de σ^2. Para incertidumbre pequeña en el pronóstico de aportaciones, la extracción óptima depende solamente de la media y la variancia de las aportaciones pronosticadas, y es correctamente calculada por el método propuesto.

La política de operación para $\sigma^2 = 1$, se muestra en la ilustración 2. La extracción óptima $u(1)$, dado $x(0) = 8$, de acuerdo con la solución de perturbaciones pequeñas y de acuerdo con PDED (con discretización del almacenamiento $\Delta x = 0.25$, aportaciones con distribución lognormal y restricciones probabilísticas al 5%) es prácticamente idéntica, según se observa en la ilustración 3, donde también se encuentra el control determinístico. Es obvio que las diferencias entre los resultados de perturbaciones pequeñas y PDED son pequeñas y del mismo orden de magnitud que el error de discretización de PDED (Kitanidis y Foufoula-Georgiou, 1987).

Conclusiones

En este artículo se desarrolla un método analítico/numérico que aproxima la solución de problemas de control óptimo estocástico. Siguiendo formalmente un enfoque de perturbaciones pequeñas, la política de operación se expande en una serie de políticas. El primer término corresponde al control determinístico de retroalimentación y se obtiene numéricamente. El

2. Extracción de una presa en función del almacenamiento inicial

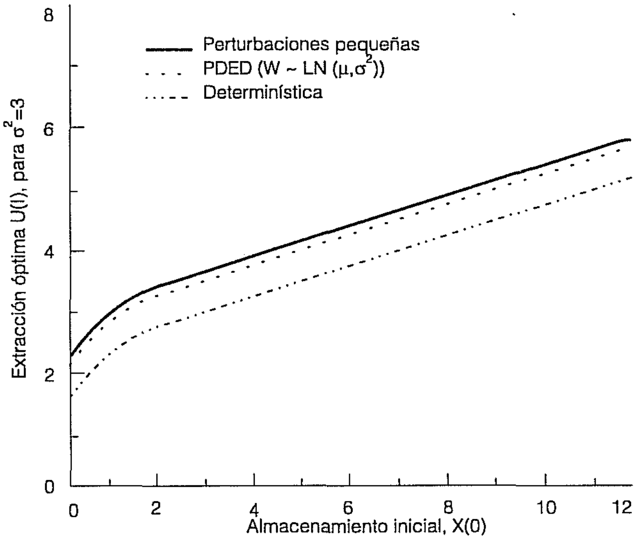


primer término no idénticamente nulo del residuo, que representa los efectos de estocasticidad, se calcula analíticamente. En teoría, el método es asintóticamente exacto a medida que la matriz de covariancia del error en el pronóstico de las aportaciones aleatorias tiende a cero. En la práctica, el criterio básico para obtener buenos resultados es que el primer término no idénticamente nulo del residuo domine los términos de orden superior despreciados. Si ese es el caso, la aproximación puede dar excelentes resultados en un vasto rango de valores para la variancia de las aportaciones (o del error de sus pronósticos).

El control obtenido depende hasta de las terceras derivadas de la función de costo y hasta de los segundos momentos de la variancia de entrada. De esta forma, el método propuesto yace entre los dos enfoques comúnmente utilizados. Es más completo que el control determinístico, el cual depende sólo de la media (o *mejor pronóstico*) de las entradas futuras, pero mucho más eficiente que PDED, la cual supuestamente toma en cuenta toda la distribución de probabilidad de las entradas aleatorias. Debe reconocerse, sin embargo, que PDED también es una aproximación, ya que en la práctica es afectada por el error de discretización de las variables de entrada, estado y control. Este error, aunque no siempre reconocido, puede ser bastante grande, a tal grado que, en algunas aplicaciones, puede ser más grande que el error de truncado introducido al despreciar los términos de orden superior en el método propuesto. Aún más, la aplicación de programación dinámica a problemas multidimensionales está severamente limitada por el crecimiento exponencial de las operaciones aritméticas con el número de variables de estado, entrada y control. El método propuesto no es afectado por errores de discretización y, a diferencia de los procedimientos más eficientes usados en programación dinámica determinística, no exhibe crecimiento exponencial del costo computacional. En este sentido, el algoritmo desarrollado parece ser único entre los algoritmos de optimización estocástica explícita (o de malla cerrada).

También es importante reconocer que las diferencias entre los resultados de la aproximación propuesta y la solución exacta –si tal solución puede obtenerse– son parcialmente debidas a las derivadas de la función de costo de orden superior a tres y a los momentos estadísticos de las entradas de orden superior a dos. Dadas las bien conocidas dificultades prácticas para determinar esos detalles con exactitud aceptable, las diferencias entre los dos métodos pueden ser menos importantes de lo que a primera vista parecen. En algunas aplicaciones, la parsimonia de la aproximación de pequeñas perturbaciones desarrollada puede verse como una ventaja sobre el método *exacto*.

3. Comparación de extracciones estocástica y determinística



Estas ventajas del método elaborado, permiten al autor sentirse optimista con respecto a la utilidad práctica del mismo. Simultáneamente, se enfatiza que este enfoque no es recomendado como un método general de solución de problemas de programación dinámica estocástica. Tal método no está a la vista, de la misma forma que no existe un método considerado como el mejor para resolver todos los problemas de optimización o de ecuaciones diferenciales con valores en la frontera. La solución exitosa de problemas prácticos se basa en la selección de la metodología más apropiada para el problema específico y, cuando es necesario, en la combinación adecuada de diversas técnicas disponibles.

Revisado: abril, 1993

Referencias

Alarcón, L. F. y D. H. Marks, "A Stochastic Dynamic Programming Model for the Operation of the High Aswan Dam", *R. M. Parsons Laboratory*, Massachusetts Institute of Technology, Technical Report No. 246, 109 pp., 1979.

Athans, M., F.C. Schweppe, "Gradient Matrices and Matrix Calculations", Technical Note, *Lincoln Laboratory*, Massachusetts Institute of Technology, Lexington, Massachusetts, 1965, 35 pp.

Bar–Shalom, Y. y E. Tse, "Dual Effect, Certainty Equivalence, and Separation in Stochastic Control", *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC–19:494–500, 1974.

Becker, L. y W. W–G. Yeh, "Optimization of Real–Time Operation of a Multiple Reservoir System", *Water Resources Research*, 10(6):1107–1112, 1974.

Bellman, R., *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton, 1957.

Bellman, R., *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw–Hill, Nueva York, 1960.

Bodewig, E., *Matrix Calculations*, North Holland, Nueva York, 1956.

Bryson, A. E., Jr. y Y. C. Ho, *Applied Optimal Control*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1975.

Chan, Y. T. y J. P. Maille, "Extension of a Linear Quadratic Tracking Algorithm to Include Control Constraints", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20(6):801–803, 1975.

Charnes, A, y W. W. Cooper, "Deterministic Equivalents for Optimizing and Satisfying under Chance Constraints", *Operations Research*, 11(1):18–39, 1963.

Collado, J. y P. K. Kitanidis, "A First–Order Approximation to Closed–Loop Stochastic Optimal Control of Reservoirs", *American Geophysical Union Spring Meeting*, Baltimore, Maryland, mayo, 1986.

Croley, T. E., "Sequential Stochastic Optimization for Reservoir System", *J. of the Hydraulics Division*, ASCE, 100(HY3): 443–459, 1974.

Datta, B. y S. J. Burges, "Short–Term, Single, Multi–Purpose Reservoir Operation: Importance of Loss Functions and Forecast Errors", *Water Resources Research*, 20(9):1167–1176, 1984.

Datta, B. y M. H. Houck, "A Stochastic Optimization Model for Real–Time Operation of Reservoir Using Uncertain Forecasts", *Water Resources Research*, 20(8):1039–1046, 1984.

Foufoula–Georgiou, E. y P. K. Kitanidis, "Gradient Dynamic Programming for Stochastic Optimal Control of Multidimensional Water Resources Systems", *Water Resources Research* 24(8):1345–1359, 1988.

Georgakakos, A. P. y D. H. Marks, "A New Method for the Real–Time Operation of Reservoir Systems", *Water Resources Research*, 23(7):1376–1390, 1987.

Georgakakos, A. P., "Extended Linear Quadratic Gaussian Control: Further Extensions", *Water Resources Research*, 25(2):191–201, 1989.

Gessing, R., "Stochastic Optimal Control and its Connection with Estimation", *Department of Engineering Science*, University of Oxford, Inglaterra, Reporte OUEL 1328/80, 24 pp., 1980.

Ginn, T. R. y M. H. Houck, "Calibration of an Objective Function for the Optimization of Real–Time Reservoir Operations", *Water Resources Research*, 25(4):591–603, 1989.

Gjelsvik, A., "Stochastic Seasonal Planning in Multireservoir Hydroelectric Power Systems by Differential Dynamic Programming", *Modeling, Identification and Control*, 3(3): 131–149, 1982.

Holtzman, T. M y H. Halkin, "Directional Convexity and the Maximum Principle for Discrete Systems", *J. SIAM on Control*, 4(2):263–275, 1966.

Hoshi, K. y S. J. Burges, "Incorporation of Forecasted Total Seasonal Runoff Volumes into Reservoir Management Strategies", *International Symposium on Risk and Reliability in Water Resources*, University of Waterloo, Ontario, Canadá, 1978.

Jacobson, D. H. y D. Q. Mayne, *Differential Dynamic Programming*, Elsevier, Nueva York, 1970.

Jacobson, D. H., *Extensions of Linear–Quadratic Control, Optimization, and Matrix Theory*, Academic Press, Londres, 1977.

Jamieson, D. G. y J. C. Wilkinson, "River Dee Research Program, 3: A Short–Term Control Strategy for Multi–Purpose Reservoir Systems", *Water Resources Research*, 8(4):911–920, 1972.

Kaczmarek, Z. y J. Kindler (Eds), *The Operation of Multiple Reservoir Systems*, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxanburg, Austria, 1982.

Kitanidis, P. K. y E. Foufoula–Georgiou, "Error Analysis of Conventional Discrete and Gradient Dynamic Programming", *Water Resources Research*, 23(5):845–858, 1987.

Klemeš, V., "Value of Information in Reservoir Optimization", *Water Resources Research*, 13(5):837–850, 1977.

Klemeš, V., Reply to Comment by Krzysztofowicz, *Water Resources Research*, 15(4):976–978, 1979.

Krzysztofowicz, R., Comment on "Value of Information in Reservoir Optimization", *Water Resources Research*, 15(4): 973–975, 1979.

Kuczera, G., "Fast Multireservoir Multiperiod Linear Programming Models", *Water Resources Research*, 25(2):169–176, 1989.

Larson, R. E. y J. L. Casti, *Principles of Dynamic Programming*, Marcel Dekker, Nueva York, 1982.

Little, J. D. C., "The Use of Storage Water in a Hydroelectric System", *Operations Research*, 3:187–197, 1955.

Loaiciga, H. A. y M. A. Mariño, "An Approach to Parameter Estimation and Stochastic Control in Water Resources with an Application to Reservoir Operation", *Water Resources Research*, 21(11): 1575–1584, 1985.

Loucks, D. P., J. R. Stedinger y D. A. Haith, *Water Resource Systems Planning and Analysis*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, 1981.

Luenberger, D. G., *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison–Wesley, Reading, 1973.

Malinvaud, E., "First Order Certainty Equivalence", *Econometrica*, 37:706–718, 1969.

Mariño, M. A. y H. A, Loaiciga, "Dynamic Model for Multireservoir Operation", *Water Resources Research*, 21(5):619–630, 1985.

Massé, P., *Les Réserves et la Régulation de l'Avenir Dans la Vie Economique*, Hermann, París, 1946.

Murray, D. M y S. J. Yakowitz, "Constrained Differential Dynamic Programming and its Application to Reservoir Control", *Water Resources Research* 15(5):1017–1027, 1979.

Nayfeh, A. H., *Perturbation Methods*, Wiley, Nueva York, 1973.

Papageorgiou, M., "Optimal Multireservoir Network Control by the Discrete Maximum Principle", *Water Resources Research*, 21(12):1824–1830, 1985.

Pereira, M. V. F. y L. M. V. G. Pinto, "Stochastic Optimization of a Multireservoir Hydroelectric System: A Decomposition Approach", *Water Resources Research*, 21(6):779–792, 1985.

Pindyck, R. S., "An Application of the Linear Quadratic Problem to Economic Stabilization Policy", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 17(3):287–300, 1972.

Rhenals, A. E. y R. L. Bras, "The Irrigation Scheduling Problem and Evapotranspiration Uncertainty", *Water Resources Research*, 17(5):1328–1338, 1981.

Rosenthal, R. E., "The Status of Optimization Models for the Operation of Multireservoir Systems with Stochastic Inflows and Nonseparable Benefits", Research Report No. 75, *Water Resources Research Center*, The University of Tennessee, 1980.

Saad, M. y A. Turgeon, "Application of Principal Component Analysis to Long–Term Reservoir Management", *Water Resources Research*, 24(7):907–912, 1988.

Sage, A. P. y C. C. White, III, *Optimum Systems Control*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, 1977.

Schweppe, F. C., *Uncertain Dynamic Systems*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, 1973.

Simonović, S., "The Implict Stochastic Model for Reservoir Yield Optimization", *Water Resources Research*, 23(12): 2159–2165, 1987.

Simonović, S. P. y D. H. Burn, "An Improved Methodology for Short–Term Operation of a Single Multipurpose Reservoir", *Water Resources Research*, 25(1):1–8, 1989.

Soliman, S. A. y G. S. Christensen, "Application of Functional Analysis to Optimization of a Variable Head Multireservoir Power System for Long–Term Regulation", *Water Resources Research*, 22(6):852–858, 1986.

Stedinger, J. R., B. F. Sule y D. P. Loucks, "Stochastic Dynamic Programming Models for Reservoir Operation Optimization", *Water Resources Research*, 20(11):1499–1505, 1984.

Takeuchi, K., "Chance–Constrained Model for Real–Time Reservoir Operation Using Drought Duration Curve", *Water Resources Research*, 22(4):551–558, 1986.

Trezos, T. y W. W–G Yeh, "Use of Stochastic Dynamic Programming for Reservoir Management", *Water Resources Research*, 23(6):983–996, 1987.

Turgeon, A., "Optimal Operation of Multireservoir Systems With Stochastic Inflows", *Water Resources Research*, 16(2):275–283, 1980.

Turgeon, A., "Optimal Short–Term Hydro Scheduling from the Principle of Progressive Optimality", *Water Resources Research*, 17(3):481–486, 1981.

Vetter, W. J., "Matrix Calculus Operations and Taylor Expansions", *SIAM Review*, 15(2):352–369, 1973.

Wasimi, S. A. y P. K. Kitanidis, "Real–Time Forecasting and Daily Operation of a Multireservoir System During Floods By Linear Quadratic Gaussian Control", *Water Resources Research*, 19(6):1511–1522, 1983.

Whittle, P., "Risk–Sensitive Linear/Quadratic/Gaussian Control", *Advances in Applied Probability*, 13:764–777, 1981.

Whittle, P., *Optimization Over Time: Dynamic Programming and Stochastic Control*, Wiley, Chichester, 1983.

Wilson, T. T., Jr. y E. Kirdar, "Use of Runoff Forecasting in Reservoir Operation", *J. of the Irrigation and Drainage Division*, ASCE, 96(IR3):299–308, 1970.

Witsenhausen, H. S., "Separation of Estimation and Control for Discrete–Time Systems", *Proceedings IEEE*, 59:1557–1566, 1971.

Wonham, W. M., "On the Separation Theorem of Stochastic Control", *SIAM J. Control*, 6:312–326, 1968.

Yakowitz, S., "Dynamic Programming Applications in Water Resources", *Water Resources Research*, 18(4):673–696, 1982.

Yazicigil, H., M. H. Houck y G. H. Toebes, "Daily Operation of a Multipurpose Reservoir System", *Water Resources Research*, 19(1):1–13, 1983.

Yeh, W. W–G, "Reservoir Management and Operation Models: A State–of–the–Art Review", *Water Resources Research*, 21(12):1797–1818, 1985.

Abstract

Collado, J. "Optimal Multireservoir Control: A Small–Perturbation Approach to the Solution of Stochastic Dynamic Programming" Hydraulic Engineering in Mexico *(in Spanish), Vol. VIII, Num. 2–3, pages 39–52, May–December, 1993.*

A number of practical hydrological problems may be formulated using Stochastic Dynamic Programming. The optimization of multireservoir operating policies is one of them. However, feasible solution methods do not exist except for linear–quadratic problems or for systems with few state variables. This article proposes an analytical/numerical method for the solution of optimal closed–loop stochastic control. The optimum solution in given by the deterministic control plus a correction term which considers the stochastic effects of second–order moments. It is assumed that this term is small in comparison with the deterministic control and a small–perturbation solution is obtained. This method may be used to arrive at suboptimal solutions for problems where classical stochastic programming is not applicable. Comparisons with conventional methods show that the method offers near–optimal results even when the small–perturbation hypothesis is only approximately met. An advantage to the proposed method is that it does not require to discretize the state and control variables, avoiding the curse of dimensionality.

Key words: *dynamic programing, multiple–purpose reservoirs, reservoir operation, mathematical models, numerical analysis, aproximation method.*