

Artículo publicado en el Repositorio Institucional del IMTA

<i>Título</i>	Cálculo del perfil de flujo sobre vertedores sin control.
<i>Autor / Adscripción</i>	Nahún Hamed García Villanueva Polioptro F. Martínez Austria Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
<i>Publicación</i>	Ingeniería Hidráulica en México, (3): 25-33
<i>Fecha de publicación</i>	1989
<i>Resumen</i>	Se presenta un esquema numérico para calcular el perfil de la superficie libre del agua sobre vertedores tipo cimacio. El esquema se basa en un modelo matemático obtenido a partir del principio de conservación de la cantidad de movimiento. En él se considera a la sección sobre la cresta como sección de control y condición inicial para calcular el perfil de flujo que se desarrolla a lo largo de la obra de excedencias. Los resultados obtenidos se comparan con datos experimentales reportados por diversos centros de investigación, encontrándose una correlación satisfactoria desde el punto de vista práctico.
<i>Identificador</i>	<a href="http://hdl.handle.net/123456789/1193">http://hdl.handle.net/123456789/1193</a>

# Cálculo del perfil de flujo sobre vertedores sin control

Nahun Hamed García Villanueva<sup>1</sup>  
Polioptro F. Martínez Austria

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, CNA

*Se presenta un esquema numérico para calcular el perfil de la superficie libre del agua sobre vertedores tipo cimacio. El esquema se basa en un modelo matemático obtenido a partir del principio de conservación de la cantidad de movimiento. En él se considera a la sección sobre la cresta como sección de control y condición inicial para calcular el perfil de flujo que se desarrolla a lo largo de la obra de excedencias. Los resultados obtenidos se comparan con datos experimentales reportados por diversos centros de investigación, encontrándose una correlación satisfactoria desde el punto de vista práctico.*

El estudio del comportamiento del flujo en obras de excedencias se ha desarrollado principalmente en forma experimental, de manera que en la actualidad se cuenta con una gran cantidad de información bibliográfica al respecto. No obstante, la investigación, comprensión y representación físico-matemática del fenómeno aún no está concluida. Algunos de los problemas básicos para el estudio y representación analítica del comportamiento hidráulico de este tipo de obras se deben a la gran curvatura y fuerte pendiente que éstas poseen, lo cual origina representaciones físico-matemáticas muy complejas, que dificultan su evaluación y cálculo numérico.

A la fecha, para el estudio del flujo sobre cimacios se han propuesto y desarrollado métodos gráficos (Levi y Aldama, 1979), tablas con parámetros adimensionales obtenidas experimentalmente (Ding y Ling, 1974), así como diversos métodos matemáticos basados en la teoría de flujo con potencial (Sotelo, 1974). La principal desventaja que presentan los métodos basados en resultados experimentales es su rango limitado de aplicación, mientras que los métodos gráficos y los derivados de la teoría de flujo con potencial son, por lo general, de aplicación complicada y laboriosa.

El método propuesto es fácilmente programable y proporciona resultados muy satisfactorios, al compararlo con los datos experimentales. La

principal característica del esquema que se presenta, y que lo diferencia de otros, es el hecho de estar basado en el principio de conservación de la cantidad de movimiento, expresada en su forma integral.

## Ecuación básica

### Ecuación general de conservación

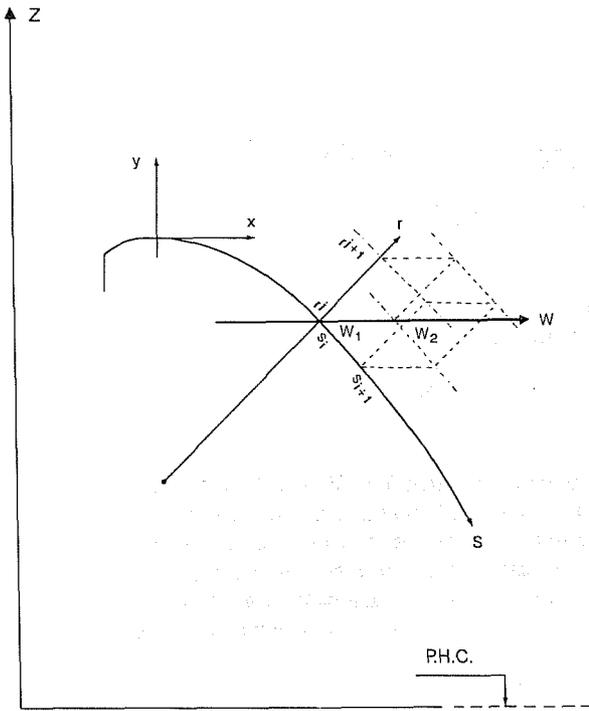
La ecuación general de balance de la cantidad de una propiedad intensiva  $q$  (o sea, que puede asociarse a la masa de un sistema fluido), está dada por la siguiente expresión (Aparicio, 1988):

$$\int_{vc} \operatorname{div}(\rho q \bar{u}) dv + \int_{vc} \frac{\partial(\rho q)}{\partial t} dv = \int_{vc} D[\rho q] dv \quad (1)$$

Donde  $D[\rho q]$  es el término de creación o destrucción de la propiedad  $q$  dentro del volumen de control  $V_c$ . Para el caso en estudio se considera que el flujo es permanente y que las velocidades en las direcciones normal y paralela al ancho del cimacio en toda sección son nulas (véase ilustración 1), por lo que la ecuación (1) se reduce a:

$$\int_{vc} \frac{\partial(\rho q u)}{\partial s} dv = \int_{vc} D[\rho q] dv \quad (2)$$

1. Sistema de ejes coordenados



donde  $s$  es el eje coordenado curvilíneo que coincide con el perfil del cimacio. Es importante notar que  $u$  es ahora un escalar, cuya magnitud varía con respecto al eje  $s$ , por lo que la relación (2), para ser integrada entre límites fijos de integración (véase ilustración 1), se debe expresar como:

$$\begin{aligned}
 & (\rho q u \int_{w_1}^{w_2} \int_{r_j}^{r^{j+1}} dr dw)_{s_{i+1}} - \\
 & - (\rho q u \int_{w_1}^{w_2} \int_{r_j}^{r^{j+1}} dr dw)_{s_i} = \\
 & = \int_{s_i}^{s_{i+1}} D[\rho q] \int_{w_1}^{w_2} \int_{r_j}^{r^{j+1}} dr dw ds \quad (3)
 \end{aligned}$$

donde  $r$  y  $w$  son los ejes coordenados radial y paralelo al ancho del cimacio en toda sección.

Si, además, se toma en cuenta que el área hidráulica es:

$$A = \int_{w_1}^{w_2} \int_{r_j}^{r^{j+1}} dr dw$$

entonces, la ecuación (3) se puede expresar como:

$$(\rho q u A)_{s_{i+1}} - (\rho q u A)_{s_i} =$$

$$= \int_{r_j}^{r^{j+1}} \int_{w_1}^{w_2} \int_{s_i}^{s_{i+1}} D[\rho q] ds dw dr \quad (4)$$

Esta relación es la ecuación integral de conservación de la propiedad  $q$ , para flujo permanente.

Ecuación de cantidad de movimiento

Con base en la segunda ley de Newton, la cual indica que la fuerza instantánea ( $\bar{f}$ ) aplicada en un cuerpo es igual al producto de la masa ( $m$ ) instantánea por la aceleración instantánea ( $\bar{a}$ ) del cuerpo, se tiene:

$$\bar{f} = m\bar{a}$$

Al multiplicar esta ecuación por un incremento diferencial de tiempo ( $dt$ ) durante el cual actúa  $\bar{f}$ , se obtiene:

$$\bar{f} dt = m\bar{a} dt$$

Y tomando en cuenta que  $\bar{u} = \bar{a} dt$ , la ecuación anterior se reduce a:

$$\bar{f} dt = m\bar{u} \quad (5)$$

Al miembro izquierdo de esta ecuación se le denomina impulso y al derecho, cantidad de movimiento. Conviene señalar que esta ecuación es vectorial, y dado que  $q$  fue definida como escalar, resulta obligado estudiar por separado cada uno de los componentes de la misma. Afortunadamente, en este caso sólo interesa analizar el componente en la dirección  $s$ , así, dado que la propiedad que se desea estudiar es la cantidad de movimiento, entonces la cantidad de dicha propiedad por unidad de masa será:

$$q = \frac{mu}{m} = u \quad (6)$$

De la sustitución de (6) en (4), se obtiene la ecuación integral de cantidad de movimiento unidimensional para flujo permanente:

$$\begin{aligned}
 & (\rho u^2 A)_{s_{i+1}} - (\rho u^2 A)_{s_i} = \\
 & = \int_{r_j}^{r^{j+1}} \int_{w_1}^{w_2} \int_{s_i}^{s_{i+1}} D[\rho q] ds dw dr \quad (7)
 \end{aligned}$$

*Términos de creación o destrucción de la cantidad de movimiento*

La creación o destrucción de la cantidad de movimiento en un volumen de control se produce a través de fuerzas externas a dicho volumen que actúan sobre el sistema fluido. En este caso se considera, por simplificación, que las únicas fuerzas que intervienen en el flujo son las debidas a la presión y a los efectos de gravedad, o sea, las fuerzas de cuerpo o peso.

*Fuerzas de presión*

Están constituidas por la resultante de las fuerzas netas de presión que actúan sobre el volumen de control, proyectada sobre la dirección en cuestión. De donde se puede indicar que la parte del término de creación o destrucción de cantidad de movimiento correspondiente a las fuerzas de presión será:

$$[\rho q] = -\frac{\partial p}{\partial s} \tag{8}$$

de lo cual resulta:

$$\begin{aligned} &\int_{r^j}^{r^{j+1}} \int_{w_1}^{w_2} \int_{s_i}^{s_{i+1}} Dp[\rho q] ds dw dr = \\ &= - \int_{r^j}^{r^{j+1}} \int_{w_1}^{w_2} (P_{s_{i+1}} - P_{s_i}) dw dr \end{aligned} \tag{9}$$

Si además se supone que la presión no presenta variaciones en la dirección  $w$ , y se considera una sección transversal rectangular (véase ilustración 2), se obtiene:

$$\begin{aligned} &\int_{r^j}^{r^{j+1}} \int_{w_1}^{w_2} \int_{s_i}^{s_{i+1}} Dp[\rho q] ds dw dr = \\ &= - \int_{r^j}^{r^{j+1}} (P_{s_{i+1}} - P_{s_i}) dr \int_{w_1}^{w_2} dw \end{aligned} \tag{10}$$

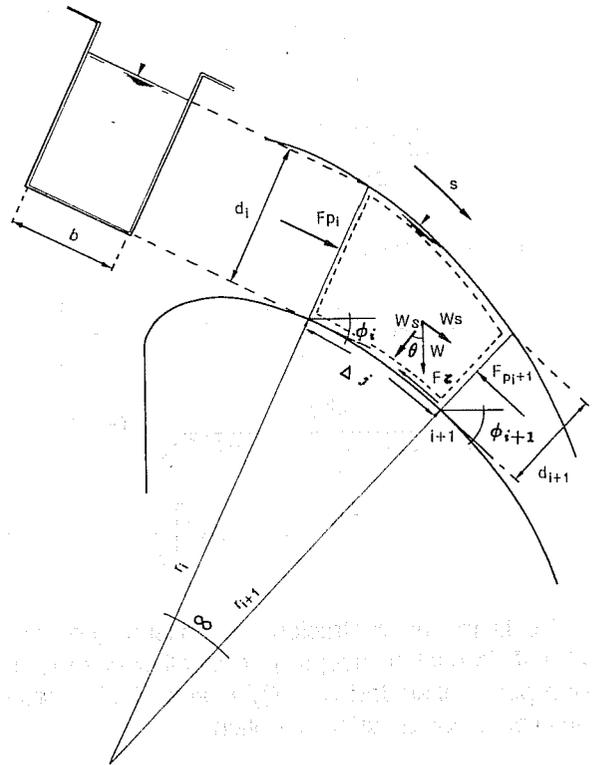
dado que el ancho del cimacio es:

$$b = \int_{w_1}^{w_2} dw$$

la relación (10) se reduce a:

$$\int_{r^j}^{r^{j+1}} \int_{w_1}^{w_2} \int_{s_i}^{s_{i+1}} Dp[\rho q] ds dw dr =$$

**2. Volumen de control para el cimacio**



$$-b \int_{r^j}^{r^{j+1}} (P_{s_{i+1}} - P_{s_i}) dr \tag{11}$$

Por otra parte, de acuerdo con Sotelo (1979), en un punto ubicado sobre una línea de corriente, la presión puede calcularse con la expresión:

$$P = \gamma \left\{ Z^{j+1} - Z + \frac{2u^2 d^2 [r^2 - (r^{j+1})^2]}{g[(r^j)^2 - (r^{j+1})^2]^2} \right\} \tag{12}$$

donde  $z$  es un eje coordenado vertical y  $d$ , el tirante normal a la superficie del cimacio (véase ilustración 2). En dicha ilustración se observa que:

$$Z^{j+1} - Z = (r^{j+1} - r) \cos \theta$$

por lo que (12) se reescribe como:

$$P = \gamma \left\{ (r^{j+1} - r) \cos \theta + \frac{2u^2 d^2 [r^2 - (r^{j+1})^2]}{g[(r^j)^2 - (r^{j+1})^2]^2} \right\} \tag{13}$$

Adoptando la notación

$$F_p = b \int_{r^j}^{r^{j+1}} P dr$$

se obtiene:

$$F_p = b\gamma \int_{r^j}^{r^{j+1}} \left\{ (r^{j+1} - r)\cos\theta + \frac{2u^2 d^2 [r^2 - (r^{j+1})^2]}{g[(r^j)^2 - (r^{j+1})^2]^2} \right\} dr \quad (14)$$

Al integrar y ordenar se tiene:

$$F_p = b\gamma \left\{ \cos\theta \left[ \frac{(r^{j+1})^2}{2} - r^{j+1}r^j + \frac{(r^j)^2}{2} \right] + \frac{2u^2 d^2}{g[(r^j - r^{j+1})(r^j + r^{j+1})]^2} \left[ \frac{2}{3}(r^{j+1})^3 - \frac{(r^j)^3}{3} + (r^{j+1})^2 r^j \right] \right\}$$

De la misma ilustración, se obtiene que  $r^{j+1} = r^j + d$  (lo cual se acepta por simplificación) y, dado que por continuidad  $u = Q/A$ , al sustituir y ordenar en la ecuación anterior, se obtiene:

$$F_p = \frac{\gamma b}{2} d^2 \cos\theta - \frac{2\gamma Q^2}{gb(2r^j + d)^2} \left( r^j + \frac{2}{3}d \right) \quad (15)$$

Al aplicar esta expresión a las secciones  $i$  é  $i + 1$  (véase ilustración 3), se tiene:

$$F_{p_i} = b \int_{r^j}^{r^{j+1}} P_{s_i} dr = \frac{\gamma b}{2} d_i^2 \cos\theta_i - \frac{2\gamma Q^2}{gb(2r_i^j + d_i)^2} \left( r_i^j + \frac{2}{3}d_i \right) \quad (16)$$

$$F_{p_{i+1}} = b \int_{r^j}^{r^{j+1}} P_{s_{i+1}} dr = \frac{\gamma b}{2} d_{i+1}^2 \cos\theta_{i+1} - \frac{2\gamma Q^2}{gb(2r_{i+1}^j + d_{i+1})^2} \left( r_{i+1}^j + \frac{2}{3}d_{i+1} \right) \quad (17)$$

de manera que al sustituir (16) y (17) en (11) se llega a:

$$\int_{r^j}^{r^{j+1}} \int_{w_1}^{w_2} \int_{s_i}^{s_{i+1}} Dp[\rho q] ds dw dr = \frac{\gamma b}{2} (d_i^2 \cos\theta_i - d_{i+1}^2 \cos\theta_{i+1}) +$$

$$+ \frac{2\gamma Q^2}{gb} \left[ \frac{(r_{i+1}^j + \frac{2}{3}d_{i+1})}{(2r_{i+1}^j + d_{i+1})^2} - \frac{(r_i^j + \frac{2}{3}d_i)}{(2r_i^j + d_i)^2} \right] \quad (18)$$

que es la expresión resultante para cuantificar el término de creación de cantidad de movimiento por efecto de las fuerzas de presión.

### Fuerzas de peso

La creación de la cantidad de movimiento debida a la atracción de la gravedad sobre la masa es, para el caso unidimensional:

$$Dg[\rho q] = \rho g s$$

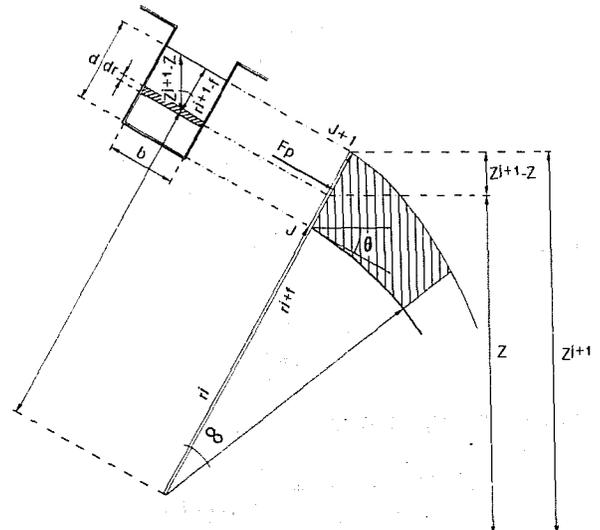
donde  $g_s$  es la componente del vector de aceleración gravitatoria en la dirección del flujo (véase ilustración 4), por lo tanto, se tiene que:

$$\int_{r^j}^{r^{j+1}} \int_{w_1}^{w_2} \int_{s_i}^{s_{i+1}} Dg[\rho q] ds dw dr = \int_{r^j}^{r^{j+1}} \int_{w_1}^{w_2} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \rho g s ds dw dr$$

Si se considera como hipótesis simplificatoria que la componente de aceleración de la gravedad en la dirección del flujo es constante y aceptando que el fluido es incompresible, se obtiene:

$$\int_{r^j}^{r^{j+1}} \int_{w_1}^{w_2} \int_{s_i}^{s_{i+1}} Dg[\rho q] ds dw dr =$$

### 3. Cálculo de las fuerzas de presión en el cimacio



$$= \rho g s \int_{r^j}^{r^{j+1}} \int_{w_1}^{w_2} \int_{s_i}^{s_{i+1}} ds dw dr \quad (19)$$

al tomar en cuenta que

$$\int_{r^j}^{r^{j+1}} \int_{w_1}^{w_2} \int_{s_i}^{s_{i+1}} ds dw dr = V$$

donde  $V$  es el volumen del espacio del fluido considerado, la ecuación (19) se reduce a:

$$\int_{r^j}^{r^{j+1}} \int_{w_1}^{w_2} \int_{s_i}^{s_{i+1}} Dg[\rho q] ds dw dr = \rho g s V \quad (20)$$

Por otra parte, dado que  $\alpha$  es el ángulo de curvatura entre las secciones  $i$  a  $i + 1$ , de manera aproximada se puede considerar (véase ilustración 4):

$$V = b \frac{\alpha_i}{2} [(r_m^{j+1})^2 - (r_m^j)^2] \quad (21)$$

donde

$$r_m^{j+1} = (r_i^{j+1} + r_{i+1}^{j+1})/2 \quad (22)$$

$$r_m^j = (r_i^j + r_{i+1}^j)/2 \quad (23)$$

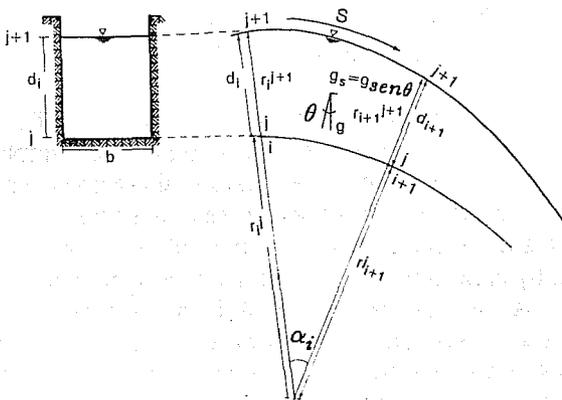
Si se considera

$$r_m^{j+1} = r_m^j + dm \quad (24)$$

siendo

$$dm = (d_i + d_{i+1})/2 \quad (25)$$

#### 4. Evaluación de las fuerzas de peso



Al sustituir (24) en (21), se obtiene:

$$V = b \frac{\alpha_i}{2} [2r_m^j dm + dm^2] \quad (26)$$

Y al remplazar (23) y (25) en (26) se tiene:

$$V = b \frac{\alpha_i}{8} [2(r_i^j + r_{i+1}^j)(d_i + d_{i+1}) + (d_i + d_{i+1})^2] \quad (27)$$

Por otra parte, la componente del vector de aceleración gravitatoria es  $g_s = g \text{sen} \phi$  (véase ilustración 3), de donde, al sustituir esta expresión y la (27) en (20) se llega finalmente a:

$$\int_{r^j}^{r^{j+1}} \int_{w_1}^{w_2} \int_{s_i}^{s_{i+1}} Dg[\rho q] ds dw dr = b g \rho \frac{\alpha_i}{8} [2(r_i^j + r_{i+1}^j)(d_i + d_{i+1}) + (d_i + d_{i+1})^2] \text{sen} \phi \quad (28)$$

En esta ecuación el ángulo  $\phi$  es en rigor diferente a  $\theta_i$  ó  $\theta_{i+1}$ , sin embargo, los cálculos se simplifican con buenos resultados, aceptando que  $\phi = \theta_i$ .

Ecuación resultante

En resumen, al sustituir (18) y (28) en (7), y omitiendo el superíndice común  $i$ , por simplificación de notación, se obtiene:

$$\rho \frac{Q^2}{b} \left( \frac{1}{d_{i+1}} - \frac{1}{d_i} \right) = \frac{\gamma b}{2} (d_i^2 \cos \theta_i - d_{i+1}^2 \cos \theta_{i+1}) + \frac{2\rho Q^2}{b} \left[ \frac{(r_{i+1} + \frac{2}{3}d_{i+1})}{(2r_{i+1} + d_{i+1})^2} - \frac{(r_i + \frac{2}{3}d_i)}{(2r_i + d_i)^2} \right] + b\gamma \frac{\alpha_i}{8} \cdot [2(r_i + r_{i+1})(d_i + d_{i+1}) + (d_i + d_{i+1})^2] \text{sen} \theta_i \quad (29)$$

que es la ecuación resultante y propuesta para el cálculo del perfil de flujo en vertedores tipo cimacio. Obsérvese que en ella se conocen, por lo general, los datos siguientes:

- $r_i$ ,  $r_{i+1}$ ,  $\theta_i$ ,  $\theta_{i+1}$  y  $\alpha_i$  que se determinan a partir de las características geométricas del perfil del cimacio.
- El ancho  $b$  que es un dato del proyecto.
- Los valores de  $\rho$ ,  $\gamma$  y  $g$  que son propiedades físicas conocidas.

- El gasto  $Q$  que depende del nivel de almacenamiento en el vaso de la presa, o bien es un dato del proyecto para diseñar la obra.

De lo anterior se concluye que en la ecuación (29) las incógnitas son los tirantes  $d_i$  y  $d_{i+1}$ ; por lo que al conocer uno de ellos, se obtiene una ecuación no lineal con una sola incógnita. Entonces, se puede decir que si se conoce el tirante sobre la cresta  $d_i$  se podría determinar un tirante aguas abajo de la misma  $d_{i+1}$  con auxilio de la relación (29), para continuar posteriormente en forma análoga hasta alcanzar el extremo final aguas abajo del cimacio.

### Sección de control y condición inicial

En el párrafo anterior se ha indicado que para los casos en que  $d_i$  sea conocido es factible calcular  $d_{i+1}$  con auxilio de la solución de la ecuación (29). Sin embargo, este procedimiento de cálculo requiere conocer y cumplir los siguientes puntos:

- La determinación del tirante de partida  $d_i$ .
- Para aplicar el cálculo del perfil de flujo hacia aguas abajo es requisito indispensable, debido a la forma en que se transmiten físicamente las perturbaciones del flujo, que el régimen del flujo en la región de cálculo sea supercrítico.

Si se considera un volumen de control de longitud infinitamente pequeña en la dirección  $s$  y si se ubica dicho volumen exactamente sobre la cresta del cimacio, donde no tiene pendiente, entonces se puede aceptar que la componente de aceleración de la gravedad en la dirección del flujo  $g$  es nula, ya que  $\phi \rightarrow 0$  y, por tanto,  $\text{sen}\phi = 0$ . De aquí resulta que el término de creación de la cantidad de movimiento debido a la acción de la gravedad se anula, con lo cual la ecuación (29) se reduce a:

$$\begin{aligned} & \rho \frac{Q^2}{b} \left( \frac{1}{d_{i+1}} - \frac{1}{d_i} \right) = \\ & = \frac{\gamma b}{2} (d_i^2 \cos\theta_i - d_{i+1}^2 \cos\theta_{i+1}) + \\ & + \frac{2\rho Q^2}{b} \left[ \frac{(r_{i+1} + \frac{2}{3}d_{i+1})}{(2r_{i+1} + d_{i+1})^2} - \frac{(r_i + \frac{2}{3}d_i)}{(2r_i + d_i)^2} \right] \end{aligned} \quad (30)$$

Al ordenar algebraicamente y llamar fuerza de equilibrio  $Fe$  a la relación

$$Fe = \frac{\gamma b}{2} d^2 \cos\theta - \frac{2\rho Q^2}{b} \frac{(r + \frac{2}{3}d)}{(2r + d)^2} + \frac{\rho Q^2}{bd} \quad (31)$$

La ecuación (30), se puede escribir simplemente en la forma:

$$Fe_i = Fe_{i+1} \quad (32)$$

Por otra parte, si se acepta la hipótesis de que en una sección ubicada exactamente sobre la cresta, el agua fluye con la mínima fuerza de equilibrio, entonces el tirante necesario para que esta situación se presente, se puede obtener con la ecuación resultante de derivar la expresión (31) con respecto a  $d$  e igualarla con cero. Una vez realizado esto se obtiene que:

$$\begin{aligned} & bd \cos\theta - \frac{4Q^2}{3gb(2r + d)^2} + \\ & + \frac{4Q^2}{gb} \frac{(r + \frac{2}{3}d)}{(2r + d)^3} - \frac{Q^2}{gbd^2} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Dado que en la cresta  $\theta = 0^\circ$  se tendrá:

$$\cos\theta = 1 \quad (34)$$

y, por lo tanto, al sustituir en (33), se llega a:

$$bd - \frac{4Q^2}{3gb(2r + d)^2} + \frac{4Q^2}{gb} \frac{(r + \frac{2}{3}d)}{(2r + d)^3} - \frac{Q^2}{gbd^2} = 0 \quad (35)$$

Realizando algunas simplificaciones algebraicas, se obtiene:

$$bd + \frac{Q^2}{gb} \left[ \frac{4(r + \frac{2}{3}d)}{(2r + d)^3} - \frac{4}{3(2r + d)^2} - \frac{1}{d^2} \right] = 0 \quad (36)$$

Al despejar el gasto  $Q$  de esta ecuación se tiene que:

$$Q = \pm \left[ \frac{gb^2 d}{\frac{1}{d^2} + \frac{4}{3(2r + d)^2} + \frac{4(r + \frac{2}{3}d)}{(2r + d)^3}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (37)$$

Y, dado que un gasto negativo no tiene significado físico, se puede indicar que la ecuación (36) implica una relación única entre el gasto y el tirante sobre la cresta, de donde se concluye que la sección sobre la cresta es una sección de control. Este resultado es muy importante, ya que una vez conocido el gasto  $Q$  y las características geométricas de la cresta del cimacio, o sea su radio  $r$  y el ancho  $b$ , la ecuación (36) se convierte en una ecuación no lineal en  $d$ , cuya solución permite conocer el tirante sobre la cresta, es

decir, se sabe la condición inicial  $d_i$  requerida para comenzar el cálculo del perfil.

Tipo de flujo

Es interesante observar que si en la ecuación (36) se considera  $r \rightarrow \infty$  (canal de pendiente constante), se obtiene:

$$d = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} \quad (37)$$

que es la ecuación de régimen crítico para el canal rectangular.

También es fácil demostrar que el tirante calculado con la ecuación (36), independientemente del valor de  $r$ , cumple con la relación

$$d < \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} \quad (38)$$

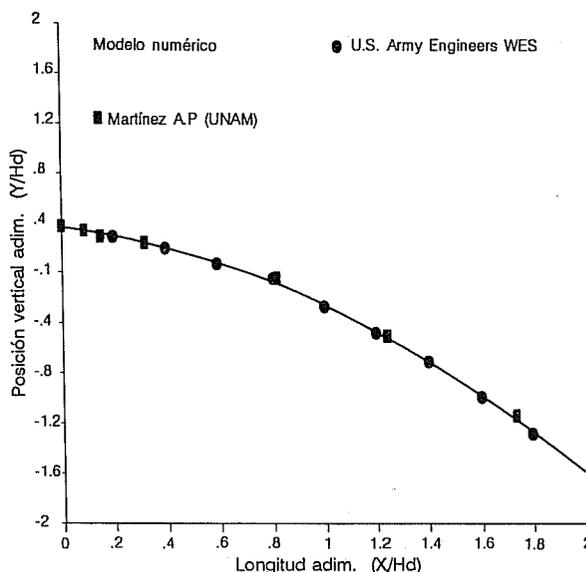
De aquí se concluye que, sobre la cresta, el número de Froude es mayor que la unidad y, si se acepta como válido este parámetro para identificar el tipo de flujo que ahí ocurre, entonces se tendrá flujo supercrítico y, por lo tanto, hacia aguas abajo de dicha zona, mientras no exista ahogamiento, el flujo será también supercrítico, con lo que se satisface la condición de régimen indicada anteriormente.

Cualquier método que se utilice para calcular el perfil de flujo en una obra de excedencias de este tipo –ya sea basado en el principio de conservación de cantidad de movimiento o en el de conservación de la energía– debe partir de una sección de características hidráulicas conocidas, como condición inicial, de la cual proceder al cálculo hacia aguas abajo. Para satisfacer este aspecto resulta idóneo considerar como condición inicial a la sección de control ubicada sobre la cresta, ya que sus características hidráulicas están perfectamente definidas.

Cálculo numérico

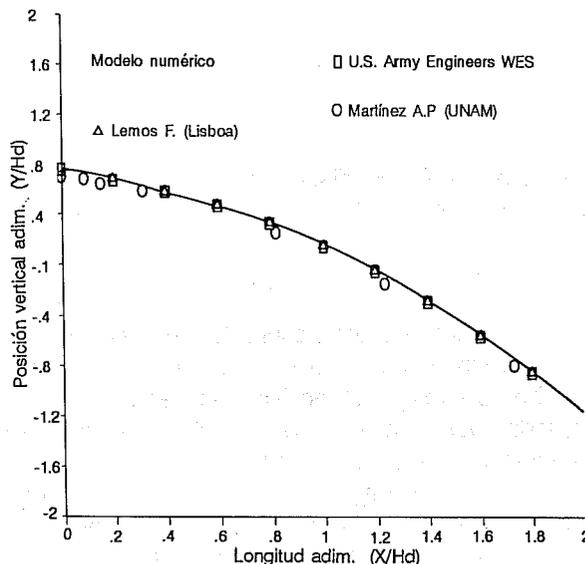
Con objeto de verificar la aplicabilidad práctica del modelo propuesto se desarrolló un programa de cómputo en lenguaje Basic para una computadora personal (PC). Aquí se presentan en forma gráfica los perfiles obtenidos experimentalmente y los calculados con el programa, para diferentes cargas de trabajo, en vertedores del tipo Scimemi (según el WES y el USBR) y Creager adaptado a arcos circulares. En las ilustraciones 5, 6 y 7 se muestran los

5. Perfil de flujo sobre cimacios (H/Hd=.5)

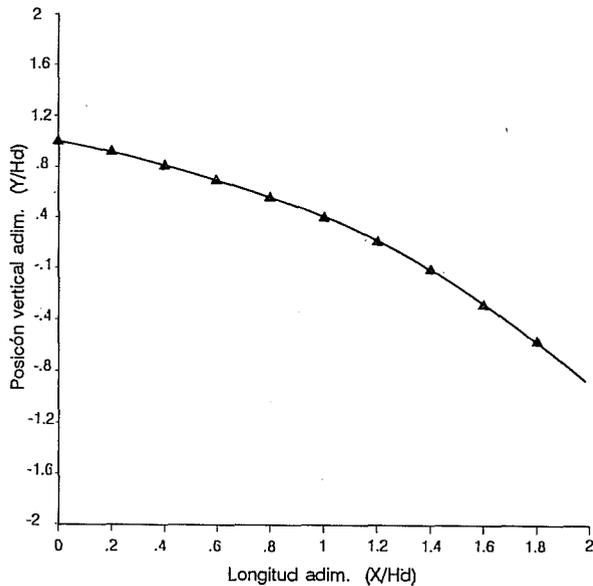


resultados del modelo con línea continua y los de diferentes autores (Chow, 1959; Lemos, 1981 y Martínez, 1986) en forma discreta para vertedores del tipo Scimemi y en la ilustración 8 se pueden apreciar los resultados del modelo en comparación con los obtenidos experimentalmente con un modelo de vertedor Creager adaptado a arcos circulares (Ojeda y Aguilar, 1988). En la ilustración 9 se muestra una comparación gráfica entre los resultados del cálculo del tirante sobre la cresta con la solución de la ecuación (36) [línea continua] y los medidos experimentalmente en diversos institutos de

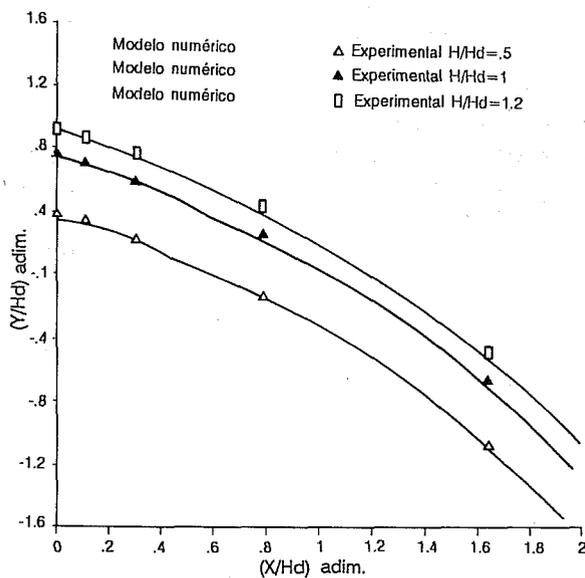
6. Perfil de flujo sobre cimacios (H/Hd=1)



7. Perfil de flujo sobre cimacios ( $H/H_d=.33$ )



8. Perfil de flujo sobre cimacios ( $H/H_d=.33$ )



investigación [puntos discretos], para los tipos de vertedor ya indicados.

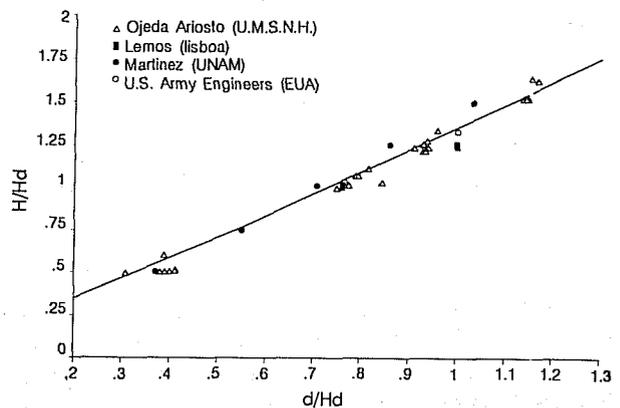
Conclusiones

La comparación de los resultados numéricos con los experimentales denota una correlación bastante aceptable, por lo que el modelo se puede considerar apropiado para calcular los perfiles de flujo en vertedores de obras de excedencias tipo cimacio y, en general, en los canales que presentan curvatura con flujo supercrítico, siempre y cuando las pérdidas por fricción se puedan considerar despreciables.

Es importante resaltar la utilidad práctica de la ilustración 9, ya que una vez conocida la relación  $H/H_d$ , basta determinar  $d/H_d$  con auxilio de la misma, para después despejar  $d$  y sustituir en la expresión (37), con lo cual se conocerá de manera aproximada el gasto en el vertedor.

Por último, el hecho de que el modelo fuera obtenido a partir de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, permite una representación teórica adecuada del fenómeno físico que se está simulando.

9. Verificación numérica



Nomenclatura

- $V_c$  Volumen de control,  $m^3$
- $q$  Propiedad intensiva
- $\rho$  Densidad (masa unitaria),  $kg-s^2/m^4$
- $u$  Velocidad,  $m/s$
- $v$  Volumen,  $m^3$
- $dv$  Diferencial de volumen,  $m^3$
- $s$  Coordenada longitudinal,  $m$
- $r$  Coordenada radial,  $m$
- $w$  Coordenada transversal,  $m$
- $A$  Area hidráulica,  $m^2$
- $\bar{f}$  Fuerza instantánea,  $g$
- $m$  Masa,  $kg-s^2/m$
- $\bar{a}$  Aceleración,  $m/s^2$
- $t$  Tiempo,  $s$
- $p$  Presión,  $kg/m^2$
- $z$  Elevación medida desde un plano de referencia,  $m$
- $x$  Eje horizontal,  $m$
- $Q$  Gasto,  $m^3/s$
- $b$  Ancho o longitud de cresta,  $m$
- $\theta$  Angulo de inclinación de la superficie del cimacio, radianes
- $\alpha$  Angulo de curvatura, radianes
- $d$  Tirante, medido normalmente al cimacio,  $m$
- $F_p$  Fuerza de presión,  $kg$

$\gamma$	Peso específico, kg/m <sup>3</sup>
$g$	Aceleración de la gravedad, m/s <sup>2</sup>
$V$	Volumen del espacio del fluido, m <sup>3</sup>
$r_m$	Radio medio, m
$d_m$	Tirante medio, m
$\phi$	Angulo de acción de la componente del peso en la dirección del flujo
$F_e$	Fuerza de equilibrio, kg
<b>P.H.C.</b>	Plano horizontal del comparación
$i$	Indice de posición en la dirección s
$j$	Indice de posición en la dirección radial r
$H_d$	Carga de diseño, m
$H$	Carga de trabajo, m
$W$	Fuerza de peso, kg
$W_s$	Componente de la fuerza de peso en la dirección del flujo, kg
$W_n$	Componente de la fuerza de peso normal a la dirección del flujo, kg

## Referencias

- Aparicio M. F. "Notas de hidráulica computacional", materia impartida en la DEPMI de la UNAM, México, 1988.
- Chow V. T. *Open channel hydraulics*, Mc-Graw Hill, Nueva York, 1959.

Ding Dao-Yang y Lin Man-Ling "Mathematical model of flow over a spillway Dam", Triziem Congrès Des Grands Barrages, Nueva Delhi, 1979.

Lemos, F. "Criterios para o dimensionamiento hidráulico de barrengens descargadoras", *FLNEC, Memoria 556*, Lisboa, Portugal, 1981.

Levi, E. y Aldama A. *Diseño hidrodinámico y automatización fluidica en obras hidráulicas*, UNAM, Instituto de Ingeniería, México, 1979.

Martínez, A. P. "Funcionamiento de vertedores con cargas altas", Trabajo de investigación desarrollado en la DEPMI de la UNAM, México, 1986.

Ojeda, T. F. y Aguilar, CH. A. "Funcionamiento hidráulico de un vertedor tipo Creager formado con arcos circulares", Informe Interno, Escuela de Ingeniería Civil, UMSNH, México, 1988.

Sotelo, A. G. *Hidráulica general*, vol. 1, Limusa, México, 1974.

Sotelo, A. G. *Apuntes de Hidráulica II*, UNAM, Facultad de Ingeniería de la UNAM, México.

<sup>1</sup> Los autores agradecen a Francisco Javier Aparicio Mijares las observaciones realizadas durante la elaboración de este trabajo, así como al personal del Departamento de Hidráulica de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y, en forma particular, a Fernando Ojeda Torres y a Ariosto Aguilar Chávez, por haber facilitado los datos experimentales de los vertedores de arcos circulares.