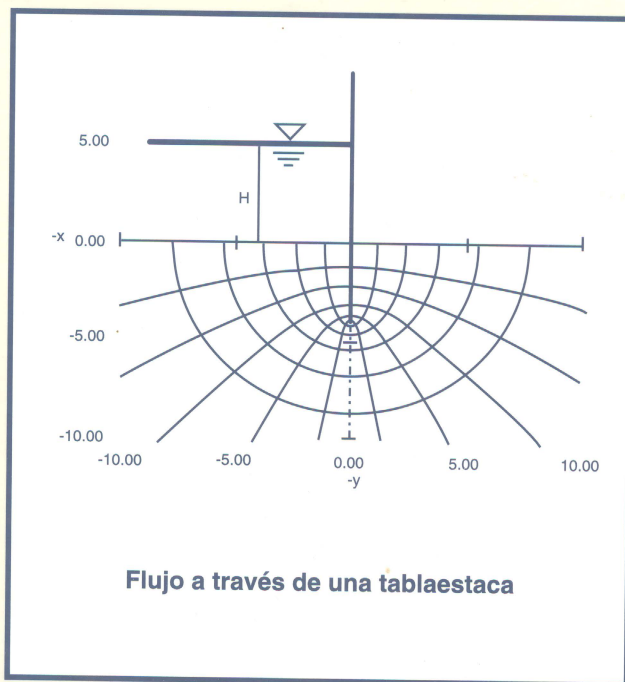


Flujo de agua a través de suelos

Raúl Flores Berrones



Flujo de agua a través de suelos

4a. edición
corregida y aumentada

Avances en Hidráulica 4

Dr. Raúl Flores Berrones



Asociación Mexicana de Hidráulica
Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
México, 2000

FLUJO DE AGUA A TRAVÉS DE SUELOS

Raúl Flores Berrones

Flujo de agua a través de suelos
Avances en Hidráulica 4

AMH IMTA

México, 2000

551.483 Flores Berrones, Raúl
B16 *Flujo de agua a través de suelos* / Raúl Flores Berrones.- México: AMH, IMTA, 2000.
255 pp. 17 x 23 cm (Avances en Hidráulica)
ISBN 968-7417-24-2

1. Hidráulica 2. Suelos 3. Flujos de agua.

Coordinación editorial:
Subcoordinación de Editorial y Gráfica.

Revisión literaria:
Antonio Requejo del Blanco.

Diseño de portada:
Gema Alin Martínez Ocampo.

Diagramación y formación:
Luisa Guadalupe Ramírez Martínez.

Ilustraciones:
Gema Alin Martínez Ocampo.
Luisa Guadalupe Ramírez Martínez.
Ricardo Espinosa Reza.
Bulmaro Espinoza Colín.

Primera edición: 1997.
Segunda edición: 1998.
Tercera edición: 1999.
Cuarta edición: 2000.

© Asociación Mexicana de Hidráulica
Camino Santa Teresa 187
Col. Parques del Pedregal
14010, México, D.F.
© Instituto Mexicano de Tecnología del Agua
Paseo Cuauhnáhuac 8532,
62550 Progreso, Morelos

ISBN 968-7417-24-2

Hecho en México - *Printed in Mexico*

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	7
1 CONCEPTOS BÁSICOS DE HIDRÁULICA	11
1.1 Flujo laminar y flujo turbulento	11
1.2 Velocidad de descarga y velocidad de flujo	15
1.3 Ley de Darcy	16
1.4 Determinación del coeficiente de permeabilidad	17
1.5 Gradiente hidráulico	24
2 SOLUCIONES GRÁFICAS DE FLUJO ESTABLECIDO MEDIANTE REDES DE FLUJO	27
2.1 Justificación teórica y principios básicos	27
2.2 Reglas empíricas para la construcción de redes de flujo	31
2.3 Condiciones a lo largo de la superficie libre	40
2.4 Condiciones de entrada y salida de la línea superior de flujo	41
2.5 Red de flujo en canales	53
3 CÁLCULO DE FLUJO A TRAVÉS DE PRESAS	59
3.1 Soluciones matemáticas rigurosas y aproximadas para secciones homogéneas	59
3.2 Derivación original de Dupuit basada en suposiciones y su validez rigurosa	66
3.3 Métodos aproximados para calcular el flujo a través de presas de tierra homogéneas e isotrópicas	69
3.4 Condiciones de transferencia cuando existe cambio de permeabilidad	81
3.5 Flujo a través de suelos anisotrópicos	94
3.6 Ejemplos de redes de flujo en secciones estrechas	112
4 FUERZAS DE FLUJO: MECANISMOS Y CONTROL DE LA TUBIFICACIÓN	125
4.1 Gradiente hidráulico crítico y fuerza de flujo	125
4.2 Mecanismo de falla por tubificación (<i>piping</i>)	129
4.3 Diseño de filtros	137

5 PROBLEMAS DE FLUJO NO ESTABLECIDO	157
5.1 Vaciado y llenado rápido de una presa	157
5.2 Drenaje en pavimentos de aeropuertos	168
6 FLUJO ESTABLECIDO A TRAVÉS DE LAS CIMENTACIONES DE PRESAS Y DE SUS LADERAS	181
6.1 Flujo a través y por debajo de una presa	181
6.2 Flujo a través de las laderas	184
7 FLUJO A TRAVÉS DE POZOS	191
7.1 Introducción	191
7.2 Pozos individuales	191
7.3 Pozos con penetración parcial	200
7.4 Radio de influencia	203
7.5 Consideración de varios pozos en el cálculo del abatimiento	203
7.6 Efecto de un pozo cerca de un depósito de agua	209
7.7 Pozos de recarga	215
7.8 Flujo no establecido en pozos	217
7.9 Obtención de nivel de recuperación	227
APÉNDICE A REDES DE FLUJO EN SECCIONES COMPUESTAS EN PRESAS	231
APÉNDICE B TEORÍA DE LA SECCIÓN TRANSFORMADA	237
APÉNDICE C LÍNEAS DE IGUAL PRESIÓN O ISOBÁRICAS	241
APÉNDICE D TRANSFORMACIONES CONFORMALES	245
REFERENCIAS	253

INTRODUCCIÓN

Este libro tiene por objeto establecer la teoría y los métodos que hoy en día se utilizan para el diseño, construcción o reparación de cimentaciones de estructuras de obra civil, sujetas al flujo de agua. Ello incluye las excavaciones para el desplante de edificios localizados en áreas que requieren el abatimiento del nivel freático, las presas de tierra o materiales graduados cuyas cimentaciones y/o cuerpos de terraplén estén sujetos al flujo del agua, pavimentos para carreteras y aeropistas, así como la explotación y control de contaminación de mantos acuíferos cuyos niveles están sujetos a los volúmenes de agua que se extraen o se inyectan.

El libro está orientado principalmente a los alumnos de maestría y doctorado en los campos de la geotecnia, geohidrología, hidráulica, ambiental e ingeniería sanitaria; se incluyen, sin embargo, aspectos fundamentales de mecánica de suelos e hidráulica, de manera que el libro sea perfectamente accesible a los estudiantes de licenciatura en ingeniería civil y a los ingenieros prácticos relacionados a la construcción de cimentaciones de cualquier tipo de obra civil.

Referente a la organización del libro, éste se constituye por capítulos, cada uno de los cuales comprende un tema principal, el que a su vez está subdividido en diversos subtemas. Los primeros capítulos contienen los aspectos básicos de ingeniería hidráulica y de mecánica de suelos, que permiten al lector entender y utilizar eficientemente los capítulos posteriores. El resto del texto abarca todos los temas relacionados a la presencia y manejo del agua que se filtra, se extrae o simplemente existe en la construcción y/u operación de una determinada obra de ingeniería civil.

Un aspecto muy importante del presente libro lo constituyen los ejemplos de aplicación práctica y los ejercicios que se localizan al final de cada capítulo, a fin de asegurar que el lector comprenda correctamente el tema correspondiente. Se pretende que con el contenido del libro el lector sea capaz de resolver eficiente y adecuadamente, cualquier problema que pueda tener en el ejercicio de su profesión, relacionado al flujo de agua a través de suelos. En particular, se hace énfasis en la utilización del método de las redes de flujo como herramienta de trabajo en la solución de problemas más comunes.

El libro contiene una parte importante de las notas dictadas por el profesor Arthur Casagrande en la Universidad de Harvard. Otra parte no menos importante está basada en las experiencias personales que el autor ha tenido dentro de sus actividades en la Comisión Nacional del Agua y en el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.

El autor desea agradecer los comentarios y críticas hechas por sus alumnos del curso que se imparte en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Especial agradecimiento a los ingenieros: Avelina Carrillo, Carlos Mario Mesa Jaramillo, Roberto Palma Quintero y Martín Ramírez Reynaga; todos ellos contribuyeron con particular interés en la elaboración final de estos apuntes. La edición de este libro no hubiera sido posible sin el apoyo del Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, y en particular, el respaldo de los doctores Álvaro Alberto Aldama Rodríguez y Polioptro Martínez Austria, así como el del Ing. Ricardo Álvarez Bretón. También mi sincero agradecimiento a Jaime Vázquez Galicia, Luisa Guadalupe Ramírez Martínez, Gema Alín Martínez Ocampo, Ricardo Espinosa Reza, Antonio Requejo y Bulmaro Espinoza Colín, por su valioso apoyo en la parte editorial.

TEMARIO

No. de horas de clase

REPASO DE LOS CONCEPTOS HIDRÁULICOS RELACIONADOS CON EL FLUJO DE AGUA EN SUELOS

Flujo laminar y flujo turbulento, la Ley de Darcy y su validez; velocidad del flujo y velocidad de descarga; gradiente hidráulico. Determinación de la permeabilidad de los suelos mediante pruebas en el laboratorio e *in situ*.

3.0

SOLUCIONES GRÁFICAS DE FLUJO ESTABLECIDO POR MEDIO DE REDES DE FLUJO

Justificación teórica y principios básicos; reglas empíricas para construir las redes; condiciones impuestas por fronteras fijas; condiciones a lo largo de superficies libres; condiciones de entrada y salida de la línea superior de flujo. Red de flujo en canales.

6.0

CÁLCULO DEL FLUJO A TRAVÉS DE PRESAS

Soluciones matemáticas rigurosas y aproximaciones para secciones homogéneas. Determinación de las líneas isobáricas. Determinación de la velocidad de salida en la superficie de descarga. Casos particulares de la línea superior de corriente. Derivación original de Dupuit basada en suposiciones simplificadoras y demostración de su validez rigurosa. Métodos aproximados para calcular el flujo a través de presas homogéneas. Redes de flujo en secciones estrechas. Flujo a través de presas zonificadas; condiciones de transferencia cuando existe cambio de permeabilidad. Flujo a través de suelos anisotrópicos mediante el empleo de transformadas. Flujo de suelos estratificados. 15.0

FUERZAS DE FLUJO; MECANISMO Y CONTROL DE LA TUBIFICACIÓN

Fuerzas de flujo y gradiente hidráulico crítico. Ejemplos de aplicación. Mecanismos de las fallas por tubificación. Métodos teóricos y empíricos para diseñar contra tubificación, incluyendo el diseño de filtros. 4.5

PROBLEMAS DE FLUJO NO ESTABLECIDO

Saturación y drenado de terraplenes. Llenado y vaciado rápido de presas de tierra. Drenaje de las bases de pavimentos para aeropistas. 4.5

PROBLEMAS DE FLUJO EN TRES DIMENSIONES

Flujo a través de las cimentaciones de presas y sus laderas. 3.0
FLUJO HACIA POZOS INDIVIDUALES Y SISTEMAS DE POZOS

Flujo establecido y no establecido hacia pozos individuales y sistemas de pozos. Prueba de bombeo para determinar la permeabilidad *in situ*. Aplicaciones al abatimiento y restablecimiento del agua freática en la construcción de cimentaciones. 4.5

**CONTROL DE FLUJO A TRAVÉS DE LAS
CIMENTACIONES DE PRESAS**

Discusión sobre el empleo de pantallas y drenes de alivio. 2.0

**PROCEDIMIENTOS VARIOS PARA EL ANÁLISIS DE
FLUJO**

Discusión breve sobre modelos hidráulicos y eléctricos, así como sobre el procedimiento de relajación. 1.5

1 CONCEPTOS BÁSICOS DE HIDRÁULICA

A continuación se hace una descripción breve de los conceptos hidráulicos que frecuentemente se utilizan en este libro y que es conveniente recordarlos a fin de comprender mejor aquellos capítulos donde dichos conceptos intervienen.

1.1 Flujo laminar y flujo turbulento¹

Desde el punto de vista práctico se puede decir que existen dos tipos de flujo de agua: el laminar, donde las partículas de agua se mueven con trayectorias paralelas entre sí, y el turbulento, donde la trayectoria de las partículas se mueven en forma irregular y se cruzan (ver fig.1.1).



Figura 1.1 Trayectoria de las partículas de agua en régimen laminar y turbulento.

Según observaciones experimentales, cuando la velocidad de un fluido cualquiera es relativamente baja, el flujo es laminar; a medida que aumenta llega un momento en que se vuelve turbulento; al contrario, si la velocidad disminuye una vez establecido el flujo turbulento, la velocidad a la que se convierte en flujo laminar no es la misma que tenía en el momento que el flujo cambió de laminar a turbulento. Existe, sin embargo, una velocidad específica abajo de la cual el flujo es siempre laminar: a esa velocidad se le llama "velocidad crítica".

Existe también una velocidad en que el flujo siempre es turbulento (ver fig. 1.2); en el caso del agua dicha velocidad es aproximadamente 6.5 veces la velocidad crítica.

¹ Existe también el llamado flujo molecular, que para nuestros fines se puede considerar igual al laminar; dicho flujo es importante sólo para rocas, concreto, etcétera.

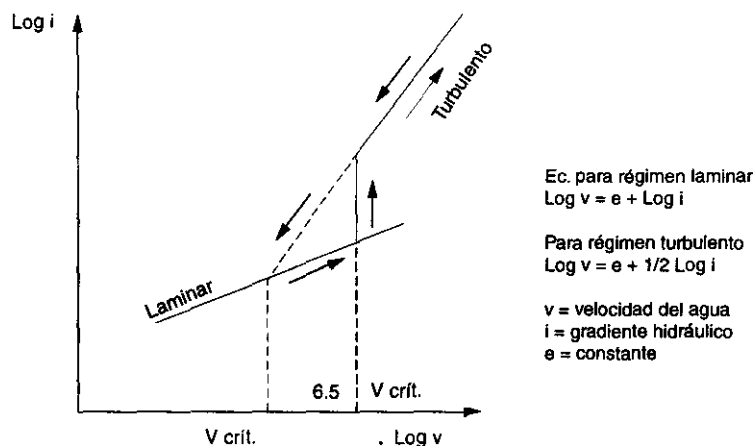


Figura 1.2 Variación de $\text{Log } v$ vs. $\text{Log } i$ para regímenes laminar y turbulento.

El valor de la velocidad crítica de un fluido cualquiera puede determinarse por el "Número de Reynolds", Re , expresado en términos de las fuerzas de inercia y de viscosidad. Para el caso de un fluido circulando por un tubo, este número queda definido por la siguiente relación general:

$$Re = vD \frac{\gamma_w}{\mu} g$$

v = velocidad del fluido
 D = diámetro del tubo
 γ_w = peso volumétrico del fluido (agua)
 μ = coeficiente de viscosidad
 g = aceleración de la gravedad

En el sistema CGS, la velocidad crítica para el agua es:

$$v_c = \frac{36}{1 + 0.033T + 0.00022T^2} \cdot \frac{1}{D}$$

donde:

v_c = cm/seg
 D = cm
 T = temperatura en grados centígrados

Considerando el diámetro efectivo que puede haber en el esqueleto granular de un suelo homogéneo e isótropo, se puede decir que se tiene flujo laminar cuando R_e tiene valores de 1 a 20 (Kazda, 1990).

Distribución de la velocidad del agua en la sección transversal de un tubo

A fin de visualizar el flujo de agua a través de un conducto de suelo, analicemos la distribución de la velocidad a través de un tubo de sección circular. Experimentalmente se ha observado que esta distribución, cuando se tiene un régimen laminar es del tipo parabólico, mientras que en el caso de régimen turbulento dicha distribución es del tipo trapezoidal, como se muestra en la figura 1.3.

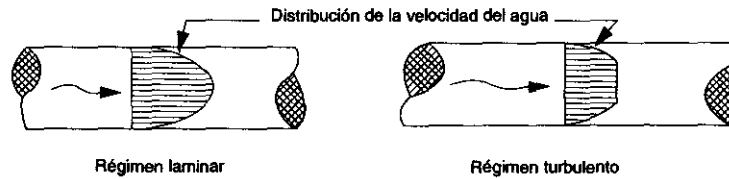


Figura 1.3 Distribución de la velocidad de una fluido que circula dentro de un tubo.

Ahora bien, la velocidad de un fluido que pasa por un conducto es función del gradiente hidráulico "i", es decir, de la pérdida de carga por unidad de longitud. En el caso de un régimen turbulento, dicha velocidad es aproximadamente proporcional a $i^{1/2}$ (o más exactamente a $i^{4/7}$), mientras que en el régimen laminar la velocidad es directamente proporcional a "i".

Poiseuille estudió las fuerzas y el mecanismo del agua que circula con régimen laminar a través de un conducto circular y dedujo que la velocidad en cualquier punto, localizado a una distancia r del centro del tubo está dado por la expresión:

$$v = \frac{\gamma_w}{4\mu} \frac{\Delta h}{L} (R^2 - r^2)$$

donde:

$$\Delta h = h_1 - h_2 \quad (\text{ver fig. 1.4})$$

- γ_w = peso volumétrico del agua
- L = longitud del tramo analizado

R = radio del conducto
 r = distancia del centro al punto analizado
 μ = viscosidad del agua
 Δh = diferencia de carga

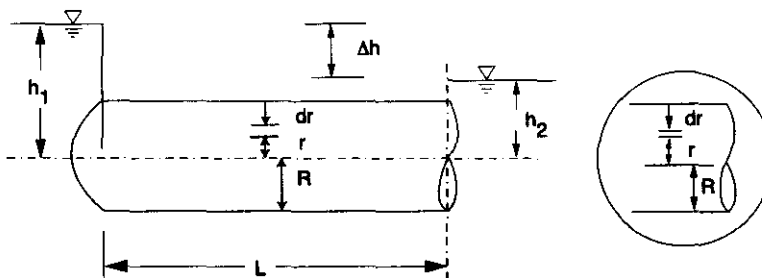


Figura 1.4 Conducto analizado por Poiseuille.

La expresión anterior corresponde precisamente a la ecuación de una parábola; la velocidad media v_m se obtiene de calcular el gasto a través del conducto y de dividirlo entre el área transversal a , es decir, el gasto q a través del tubo será:

$$q = \gamma_w \frac{i}{4\mu} \int_0^D (R^2 - r^2) da$$

donde D es el diámetro del tubo; haciendo el cambio de variable del área "a" por el radio r del tubo, se tiene:

$$q = 2\pi\gamma_w \frac{i}{4\mu} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr$$

$$q = \frac{\gamma_w i \pi R^4}{8\mu} \quad (1.3)$$

y la velocidad media v_m será:

$$v_m = \frac{q}{a} = \gamma_w i \frac{a}{8\mu\pi}$$

donde a es el área transversal del tubo.

Ahora bien, después de hacer varias pruebas de permeabilidad en diversos tipos de suelos, Darcy obtuvo la siguiente fórmula empírica que da el volumen de agua Q , que pasa a través de un área A de suelo, en un tiempo t :

$$Q = k i A t$$

O lo que es igual:

$$Q/t = q = k i A. \dots \text{ley de Darcy} \quad (1.4)$$

donde:

- Q = volumen de agua
- A = área transversal del suelo que se estudia
- i = gradiente hidráulico
- k = coeficiente de permeabilidad
- t = tiempo en el que se midió el volumen de agua

Puesto que la cantidad de flujo observada experimentalmente por Darcy es proporcional al gradiente hidráulico " i ", se puede concluir que el régimen de flujo a través de los poros de un suelo es laminar. Investigaciones posteriores a la de Darcy indican que su ley es solamente válida para el caso de los suelos finos (Casagrande, 1961).

1.2 Velocidad de descarga y velocidad de flujo

Es conveniente distinguir entre velocidad de descarga y velocidad de flujo. Para ello considérese que una muestra de suelo se puede representar esquemáticamente dividida en su materia sólida y el volumen de vacíos, según se muestra en la figura 1.5, donde V_d es la velocidad de descarga media que pasa por la muestra y V_s la velocidad de flujo de agua que pasa por los poros de la muestra.

Considerando que pasa un flujo horizontal a través de la muestra de suelo de la figura 1.5, se puede observar que el área real disponible es A_v . Al tomar en cuenta que la cantidad de agua que pasa por la sección $y-y$ es la misma que pasa por $x-x$ y $y'-y'$, por continuidad se tiene:

$$AV_d = A_v V_s$$

donde: A = área transversal total que ocupa la muestra

A_v = área transversal que ocupan los vacíos

es decir,

$$V_s = V_d \frac{A}{A_v} = \frac{V_d}{n}$$

siendo n la porosidad de la muestra de suelo (siempre menor a la unidad). De la expresión anterior se puede ver que $V_s > V_d$, puesto que $n < 1$.

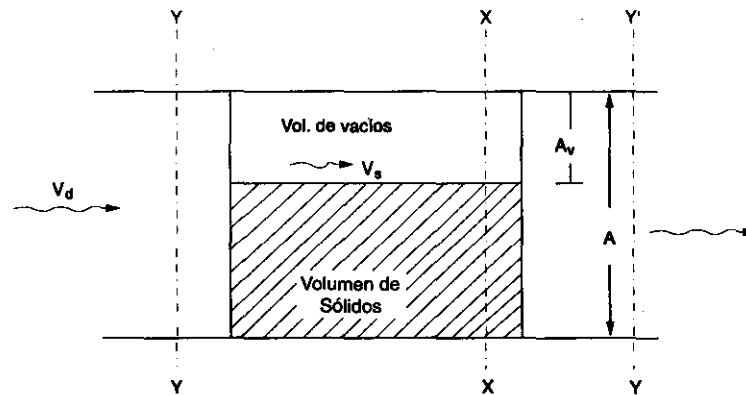


Figura 1.5 Representación esquemática de una muestra de suelo por donde pasa agua horizontalmente.

1.3 Ley de Darcy

La Ley de Darcy se puede expresar simplemente como:

$$V = k i \quad (1.5)$$

la cual nos dice que la velocidad de descarga, conocida también simplemente como velocidad, es proporcional al gradiente hidráulico. El significado físico del coeficiente de permeabilidad se aprecia fácilmente si le asignamos al gradiente hidráulico el valor de 1; en tal caso se puede interpretar dicho coeficiente como una velocidad con gradiente hidráulico unitario.

Considerando que la carga potencial de agua total "h", es la suma de la energía cinética o carga de velocidad, la carga debida a la presión "p" y la carga de posición z, dicha carga total está dada por:

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma_w} + z \quad (1.6)$$

donde g es la aceleración de la gravedad; h es también conocida como **carga piezométrica**. La expresión anterior se conoce como "ley de Bernoulli".

Vale la pena señalar que el primer término del lado derecho de la expresión (1.6), representante de la energía cinética, es generalmente despreciable en problemas de flujo de agua a través de suelos. La fig. 1.6 ilustra el significado físico de las componentes de h entre las secciones 1 y 2 de un tubo de flujo, donde Δh representa la pérdida de carga entre esas dos secciones. La ley de Bernoulli para este caso se puede expresar como:

$$\frac{P_1}{\gamma_w} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma_w} + z_2 + \Delta h \quad (1.7)$$

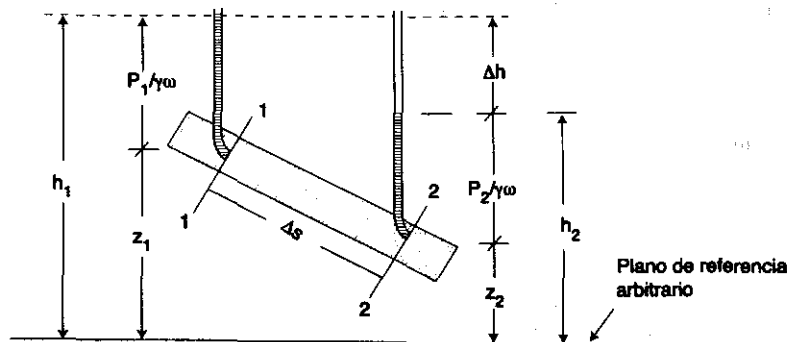


Figura 1.6 Ley de Bernoulli para el flujo a través de suelos.

1.4 Determinación del coeficiente de permeabilidad

La determinación del coeficiente de permeabilidad se puede hacer mediante cualquiera de los siguientes métodos.

Métodos Directos

- a) permeámetro de carga constante
- b) permeámetro de carga variable
- c) pruebas directas en campo

Métodos Indirectos

- a) cálculo a partir de la distribución granulométrica {o fórmula de Hazen: $k(\text{cm/seg}) = [D_{10}(\text{mm})]^2$ }
- b) cálculo a partir de la prueba de consolidación
- c) prueba de capilaridad horizontal

A continuación se describirán brevemente los métodos directos.

Permeámetro de carga constante.- Está representada por el dispositivo señalado en la figura 1.7, donde se mide el volumen Q que pasa a través de la muestra de longitud L y sección transversal A , en el tiempo t . Este permeámetro se utiliza en suelos arenosos y limosos.

El gasto que pasa a través de la muestra de suelo es:

$$q = \frac{Q}{t} = kiA = kA \frac{h}{L}$$

y despejando k se obtiene:

$$k = \frac{QL}{tAh} \quad (1.8)$$

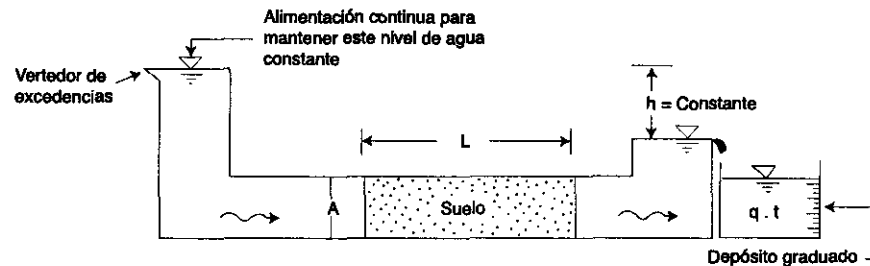


Figura 1.7 Permeámetro de carga constante.

Permeámetro de carga variable.- Este permeámetro utiliza un tubo capilar, como el que se muestra en la figura 1.8, para determinar la variación de la carga h en función del tiempo t . En este caso se debe considerar la altura capilar denominada h_c . De acuerdo con la nomenclatura señalada en dicha figura se tiene que la variación del volumen dQ , a través de la muestra de suelo, está dado por la siguiente expresión:

$$dQ = kiA \cdot dt = \frac{kh}{L} A \cdot dt \quad (1.9)$$

pero también

$$dQ = -dh a \quad (1.10)$$

arreglando (1.9) y (1.10) e igualando se tiene:

$$-a \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{h} = \frac{kA}{L} \int_0^t dt$$

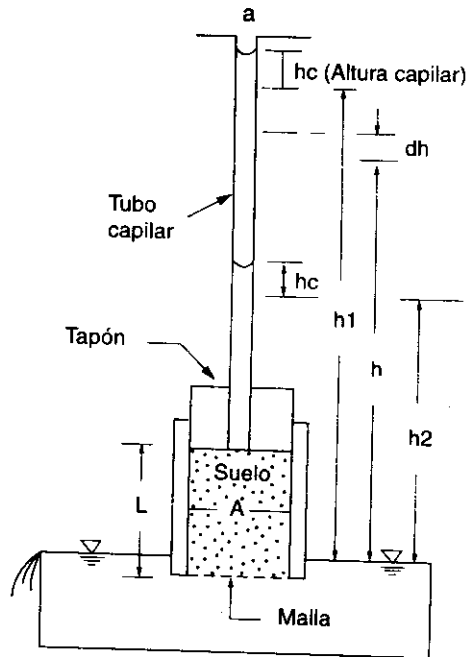


Figura 1.8 Permeámetro de carga variable.

Realizando la integración y despejando el coeficiente k se obtiene:

$$k = \frac{La}{At} \ln \frac{h_1}{h_2} = 2.3 \frac{La}{At} \log \frac{h_1}{h_2} \quad (1.11)$$

Pruebas de permeabilidad en campo

Existen varias pruebas de permeabilidad en campo que se hacen sobre barrenos que atraviesan o se profundizan hasta los estratos cuya permeabilidad nos interesa determinar. Desde luego estas pruebas son mucho más realistas que las que se hacen en el laboratorio, aunque requieren de mayor equipo y tiempo para llevarlas a cabo.

Los principios en los que se basan dichas pruebas son prácticamente los mismos que los señalados en las pruebas del laboratorio; es decir, cuando por ejemplo las pruebas de campo son por gravedad, se utiliza una carga constante de agua o una carga variable, según sea la velocidad con la que se infiltra el agua en los estratos que se analizan. Sin embargo existen muchas variaciones de los métodos que se usan en el campo, los cuales dependen, entre otros, de los siguientes factores:

- a) tipo y calidad del suelo o roca
- b) nivel del agua freática
- c) profundidad de los barrenos
- d) equipo disponible para efectuar la prueba
- e) exactitud con la que se requiere obtener la permeabilidad

Generalmente se usan empaques (de hule, cuero, etc.) para independizar o aislar el tramo de la perforación donde se desea hacer la medición de la permeabilidad (ver fig. 1.10), y tubería apropiada para conducir el agua que se usa para estos fines. Dicha agua debe ser lo más limpia posible ya que si contiene partículas de sedimentos, éstos pueden taponar los orificios del suelo y provocar resultados erróneos; se recomienda además que la temperatura del agua sea un poco mayor a la del terreno donde se desea hacer la prueba, a fin de evitar burbujas de aire que pueden también obstruir la circulación del agua en el suelo.

Las pruebas de permeabilidad de campo se dividen, en general, en tres categorías:

- 1.- Pruebas con presión, que se utilizan en materiales estables (rocas más o menos sanas).

- 2- Pruebas por gravedad, las cuales, como ya se dijo anteriormente, pueden ser por carga constante o carga variable.
- 3- Pruebas de bombeo en pozos.

Una descripción de los diversos métodos correspondientes a las primeras dos categorías señaladas, se puede ver en las Refs. (*Ground Water Manual*, del U.S. Bureau of Reclamation, 1985; *Earth Manual*, U.S. Bureau of Reclamation, 1974), y referente a las pruebas de bombeo en pozos, se verán con cierto detalle en el capítulo 7 que trata sobre el flujo a través de pozos.

A continuación se describirán dos de las pruebas que más uso tienen hoy en día en problemas de permeabilidad en presas y túneles. Estas son, la prueba Lefranc, utilizada para determinar la permeabilidad de suelos y rocas muy fracturadas; y la prueba Lugeon, para rocas sanas o no muy fracturadas.

Prueba de permeabilidad Lefranc.- Esta prueba permite determinar la permeabilidad local de suelos y rocas muy fracturadas, localizadas abajo del nivel freático. Esta prueba consiste en inyectar o extraer agua de una perforación con una carga hidráulica pequeña y medir el gasto correspondiente, es decir, convirtiendo el sondeo en un permeámetro. La carga hidráulica puede ser constante o variable según el tipo de suelo; para suelos con permeabilidad $k > 10$ cm/seg se inyecta a carga constante, mientras que para suelos con permeabilidad $k < 10$ cm/seg se hace la prueba de extracción con carga variable. Con base en el gasto medido Q y el valor de la diferencia de carga Δh (ver fig. 1.9) se determina la permeabilidad k del sitio a través de la ecuación:

$$Q = C k \Delta H$$

donde C es un coeficiente que caracteriza la geometría del área de infiltración. Si esta es cilíndrica (que es la forma que regularmente tienen los barrenos), de longitud L y radio r , el valor de C resulta:

$$C = 4 \frac{\pi}{\frac{1}{2L} \log \frac{L}{r} - \frac{1}{2H}}$$

Mayores detalles de esta prueba se pueden ver en el *Manual de Mecánica de Suelos de SRH* (1970), 5ª Edición.

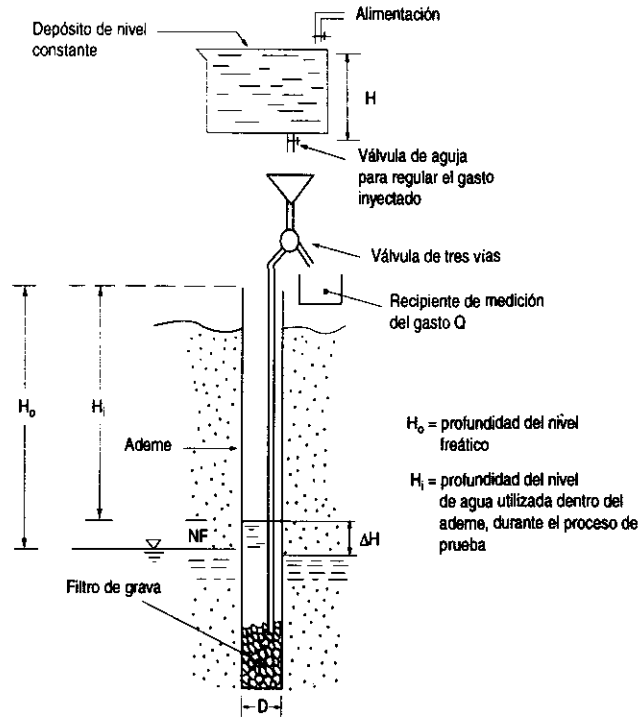
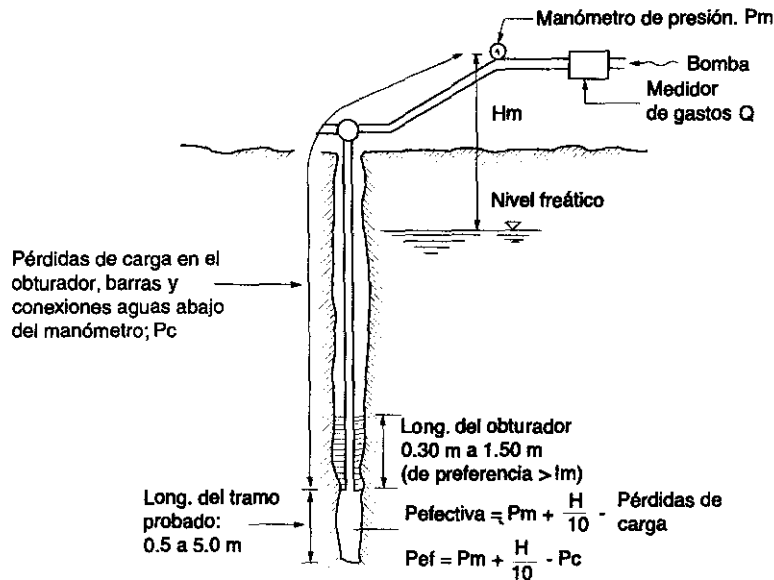


Figura 1.9 Prueba Lefranc. Dispositivo de ensayo.

Prueba de permeabilidad Lugeon.- Consiste en medir el gasto de agua en litros por minuto y por metro lineal de perforación que absorbe un material (depósito o estrato de suelo) bajo una presión de 10 kg/cm^2 . La prueba se realiza comúnmente en tramos de 3 a 5 m de longitud, aislándolos con empaques de cuero o hule (ver fig. 1.10). Para obtener el gasto absorbido, se varía en un mismo tramo la presión aplicada según la siguiente secuencia: 1, 2, 4, 6, 8, 10, 8, 6, 4, 2, y 1 kg/cm^2 . La presión de inyección leída en el manómetro debe corregirse por pérdidas de carga en la tubería y por altura del nivel freático con respecto al tramo probado.

Tomando en cuenta que las curvas "presión vs. gasto" no son lineales, no se deben extrapolar los resultados cuando alcance la presión límite de 10 kg/cm^2 .



1 Lugeon = litro por metro y por minuto bajo 10 kg/cm^2 de presión efectiva.

1 Lugeon = 10^{-7} m/seg.

Figura 1.10 Prueba Lugeon.

Se debe, por otro lado, tener cuidado de no provocar una abertura progresiva de las fisuras existentes en la roca al tratar de alcanzar la presión de 10 kg/cm^2 . Además, la determinación de la permeabilidad con esta prueba es susceptible de errores importantes por fugas en los empaques o por flaqueo en rocas muy fracturadas.

Rangos del coeficiente de permeabilidad k, según el tipo de suelo

Desde el punto de vista práctico conviene establecer las siguientes fronteras:

- Suelos permeables o con buen drenaje.
- Suelos de poca permeabilidad o con mal drenaje.
- Suelos impermeables.

La figura 1.11 sintetiza la clasificación de los suelos según sus características drenantes.

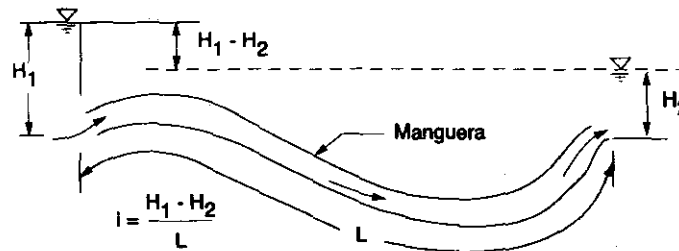
k en cm/s (Escala logarítmica)

10 ²	10 ¹	1.0	10 ⁻¹	10 ⁻²	10 ⁻³	10 ⁻⁴	10 ⁻⁵	10 ⁻⁶	10 ⁻⁷	10 ⁻⁸
Buen drenaje					Mal drenaje			Prácticamente impermeable		
Secciones permeables de presas y diques						Secciones impermeables de presas y diques				
Grava limpia		Arenas limpias y mezclas de agrava y arena limpia			Arenas muy finas, limos orgánicos e inorgánicos, mezclas de arena, limo y arcillas; morrena de glacial; depósitos estratificados de arcilla, etcétera			Suelos impermeables, por ejemplo, arcillas homogéneas por abajo de la zona de intemperismo		
Suelos impermeables que son modificados por los efectos de la vegetación e intemperismo										

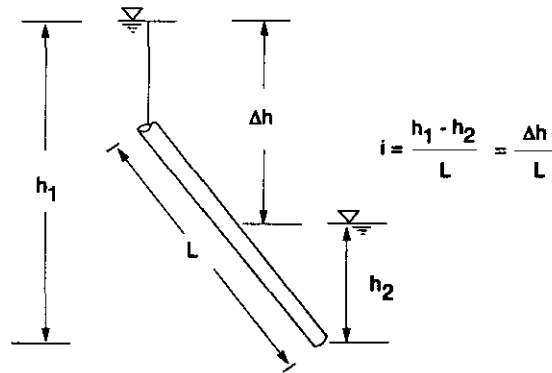
Figura 1.11 Caracterización de los suelos según su permeabilidad.

1.5 Gradiente hidráulico

El gradiente hidráulico es un concepto muy importante que se define como la relación de la carga hidráulica que el agua consume, entre la trayectoria que recorre. Se cuantifica por la relación $\Delta h/L$, de la cual resulta adimensional; Δh es la diferencia de carga hidráulica y L es la longitud de la trayectoria del agua. Las siguientes figuras ilustran esta definición.



Ejemplo No. 1 Una manguera de longitud L con una carga H_1 a la entrada y una carga H_2 a la salida.



Ejemplo No. 2 Un tubo recto de longitud L con una carga h_1 en la parte más alta y una carga h_2 en la parte más baja.

Como se puede ver en los ejemplos anteriores, es necesaria una diferencia de carga Δh para tener flujo. En relación con esta diferencia de carga, cuando la distribución de la presión de agua del subsuelo con la profundidad se aparta de la hidrostática, quiere decir que hay un flujo de los sitios de mayor carga hidráulica a los de menor. La figura 1.12 ilustra este efecto.

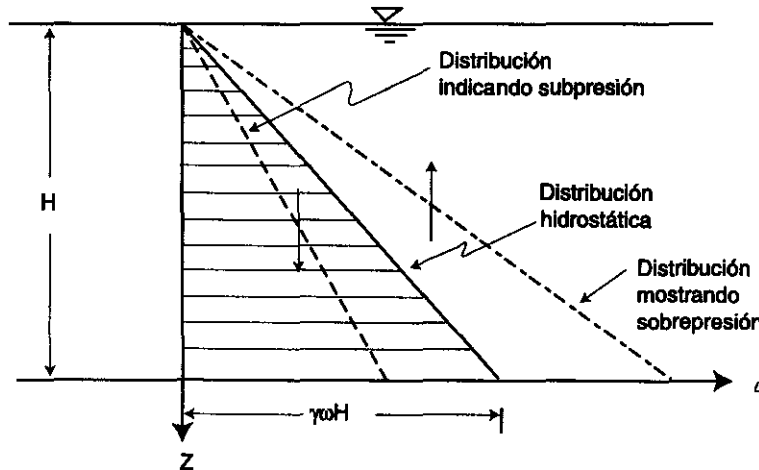


Figura 1.12 Diagrama con diferentes tipos de distribución de presión con la profundidad.

2 SOLUCIONES GRÁFICAS DE FLUJO ESTABLECIDO MEDIANTE REDES DE FLUJO

2.1 Justificación teórica y principios básicos

Si se considera el flujo que pasa por el elemento de suelo mostrado en la figura 2.1, se observa lo siguiente:

$$q_x + dq_x = k_x \frac{\partial h}{\partial x} dy + k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dy dx \quad (2.1)$$

$$q_y + dq_y = k_y \frac{\partial h}{\partial y} dx + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} dx dy \quad (2.2)$$

Donde h es la carga hidráulica y " x " e " y " son las coordenadas correspondientes en un sistema bidimensional.

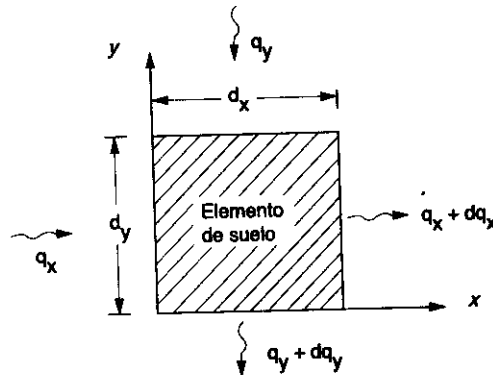


Figura 2.1 Consideraciones de flujo establecido en dos dimensiones, a través de un elemento de suelo.

Si el flujo es establecido, la diferencia entre el gasto que sale de las caras del elemento y el que entra, debe ser igual a cero, es decir, por condición de continuidad se tiene:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dydx + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} dx dy = 0$$

Al reducir términos la expresión anterior queda:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

Si el suelo es isotrópico, $k_x = k_y$, y la expresión anterior queda:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (2.3)$$

que es la ecuación de Laplace. Si las condiciones mostradas en la figura 2.1, las extendemos al caso de tres dimensiones, tendremos que la condición más general de flujo establecido estará dada por:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (2.4)$$

Para el caso más común en presas, el problema de flujo se puede simplificar en un sistema bidimensional, por lo que la expresión a considerar es la Ec. núm. 2.3.

La solución a esta última ecuación está representada gráficamente por un par de familias de curvas que se intersectan entre sí en ángulos rectos. Esa solución, con las condiciones de frontera apropiadas, da la variación de la carga hidráulica y, por tanto, la dirección del escurrimiento en todo punto de la zona de flujo.

En hidromecánica estas curvas se conocen como líneas de flujo y líneas equipotenciales (o de igual carga hidráulica), respectivamente.

El método gráfico ideado por Forchheimer (ver referencia: Forchheimer, *Hidraulic*, 3rd. edition, 1930) presenta numerosas ventajas para resolver cualquier problema de flujo en dos dimensiones. Entre ellas están las siguientes que señala A. Casagrande:

- Durante el trazo de la red de flujo se pueden apreciar obviamente los cambios que se requieren en el diseño para mejorar la estabilidad y las condiciones de flujo (y en ocasiones, también, la economía) de la obra.
- Con un poco de experiencia en el trazo de las redes de flujo, los efectos de cambiar uno u otro detalle del diseño se pueden apreciar muy fácilmente sin necesidad de encontrar toda la red de flujo para diferentes secciones transversales; es decir, en un lapso de tiempo relativamente corto se pueden estudiar muchas alternativas que, con cualquier otro método, pueden requerir varias semanas de trabajo.
- El método desarrolla una cierta sensibilidad de la dirección del flujo que no solamente mejora la rapidez y la aproximación con que se determinan las redes de flujo, sino que también propicia un mejor entendimiento de la hidromecánica del flujo de agua.
- Sirve para verificar o localizar errores de otros métodos.

Se puede explicar en qué consiste la red de flujo a través del planteamiento de un problema. Considérese por ejemplo el caso de una presa de concreto que tiene la sección transversal mostrada en la figura 2.2.

Lo primero que debe uno procurar es establecer las líneas de frontera, es decir, definir las líneas equipotenciales y las de flujo que son frontera. Generalmente, la frontera con el estrato impermeable constituye la línea más larga de flujo, mientras que el contorno de la base de la estructura constituye en ocasiones la línea más corta. La línea de contacto entre el agua y el material permeable constituyen líneas equipotenciales (fig.2.2).

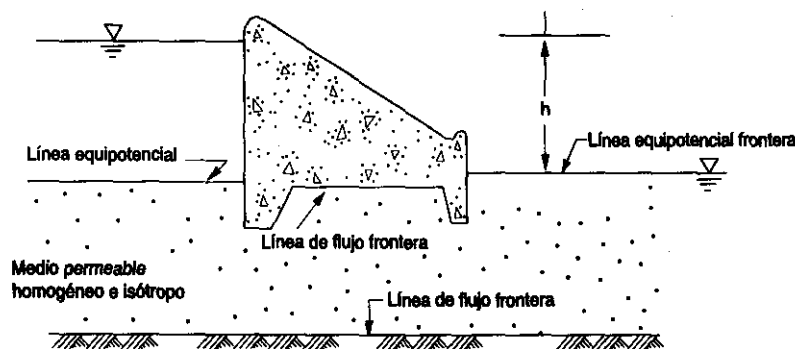


Figura 2.2 Sección transversal de una presa que se apoya sobre un estrato de material permeable.

Una vez establecidas dichas fronteras se procede a trazar tres o cuatro líneas de flujo de manera que entre cada dos de éstas pase la misma cantidad de flujo y se tracen las líneas equipotenciales que permitan que entre una y otra haya la misma caída de potencial. Es decir, si del número infinito de líneas de flujo escogemos sólo unas cuantas, de manera que entre cada dos de ellas pase una misma fracción de flujo Δq , y si del número infinito de líneas equipotenciales trazamos también sólo unas cuantas de manera que entre cada una de ellas y la que le sigue hay una misma fracción de caída de potencial Δh (la caída total es h), la red resultante poseerá la propiedad de tener una relación constante entre los lados de los rectángulos que se obtienen (ver rectángulo sombreado de la fig. 2.3). Es decir: $a/b = \text{constante}$.

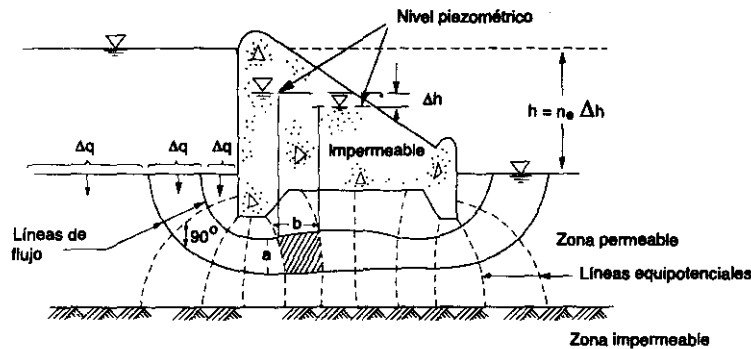


Figura 2.3 Red de flujo.

En estas condiciones el gasto que pasa por cada elemento de suelo rectangular es, de acuerdo con la ley de Darcy, el siguiente:

$$\Delta q = kiA \quad (2.5)$$

pero para el elemento rectangular de suelo que se estudia $i = \Delta h/b$

Además, si consideramos una longitud unitaria (perpendicular al plano del dibujo) del elemento de manera que $A = a * 1$, y tomamos en cuenta que:

$$\Delta h = \frac{h}{n_e} \quad (2.6)$$

donde: n_e = número de caídas de potencial, de las ecuaciones (2.5 y 2.6) se puede escribir:

$$\Delta q = \frac{q}{n_f} = k \frac{h}{n_e} \frac{a}{b}$$

donde: n_f = número de canales que se forman entre cada dos líneas de flujo y q = gasto total que pasa por unidad de longitud

Este gasto total resulta entonces:

$$q = kh \frac{n_f}{n_e} \frac{a}{b} \quad (2.7)$$

Si además hacemos $a = b$, se obtiene:

$$q = kh(n_f / n_e) \quad (2.8)$$

Cuando la red de flujo queda en estas condiciones, es decir, después de haber trazado un par de familias de curvas que se intersectan a 90° , formando cuadrados (curvilíneos) y satisfaciendo las condiciones de frontera, se habrá resuelto en forma gráfica la ecuación diferencial de Laplace (Ec. 2.3).

A la relación n_f/n_e se le denomina factor de forma. Dicho factor lo representaba A. Casagrande con el signo de \$, es decir, $q = kh\$$; la razón de ello, es que el factor de forma indica la cantidad de gasto que se puede fugar o se puede ahorrar en un proyecto, en función de los detalles que se cambien y consecuentemente en la red de flujo que resulte.

2.2 Reglas empíricas para la construcción de redes de flujo

Para el trazo de la red de flujo, Casagrande dio las siguientes recomendaciones:

- a) Utilizar un papel sin rayado, es decir, un papel en blanco.
- b) Utilizar una escala adecuada.
- c) Trazar tres o cuatro canales.
- d) Utilizar un lápiz suave (núm. 2), manteniéndolo siempre con buena punta y trazar líneas delgadas.
- e) La forma de las líneas de flujo deben ser elípticas o parabólicas, las transiciones suaves.

- f) Mover todo el brazo y no solamente la mano.
- g) Señalar las fronteras.
- h) Buscar la simetría.
- i) Cuando la red es lo suficientemente larga, como en el caso de una sección homogénea de una presa que se apoya sobre un estrato permeable, deberá haber distancias iguales en el centro (ver fig. 2.4).
- j) Dar forma a los cuadrados; girar la hoja de papel y ver si los ángulos son de 90° y si son realmente cuadrados.
- k) Si están bien hechos los cuadrados, al subdividirlos se debe seguir teniendo cuadrados (ver fig. núm. 2.5).
- l) Buscar siempre la apariencia de toda la red de flujo; no tratar de ajustar detalles antes de que toda la red esté aproximadamente bien.

Conviene señalar que dos líneas equipotenciales nunca se pueden unir, ya que por definición representan caídas de potencial diferentes; de manera semejante, dos líneas contiguas de flujo tampoco se pueden unir, ya que entre ellas existe un canal de flujo y si se unen se constituiría un tapón al flujo del agua por dicho canal.

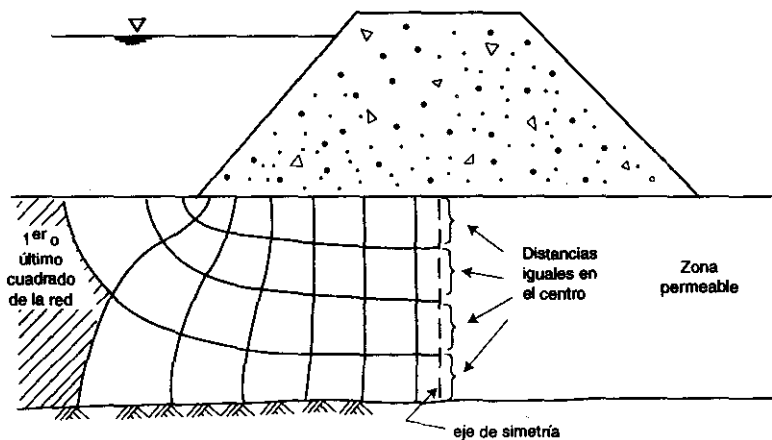


Figura 2.4 Red de flujo que muestra cómo deben quedar las distancias iguales en el centro y cerca de él, en una sección de la cimentación relativamente larga.

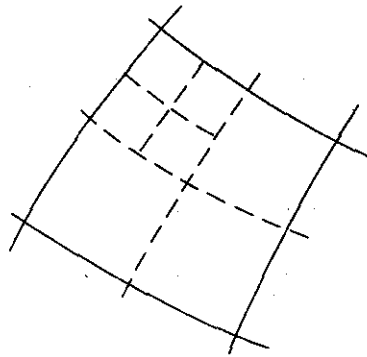


Figura 2.5 Cuadrado curvilíneo de una red de flujo, que al subdividirse deben seguir quedando cuadrados.

2.2.1 Puntos singulares de la red de flujo

Existen algunos cuadrados dentro de la red de flujo que no parecen verdaderos cuadrados y algunos puntos de intersección donde aparentemente las líneas de flujo y las equipotenciales no se cruzan a 90° . Veamos cuáles son estos casos:

a) La línea equipotencial y la de flujo se unen en el infinito en cero grados; tal es el caso mostrado en la fig. 2.6 (ver también primer cuadrado de la fig. 2.4).

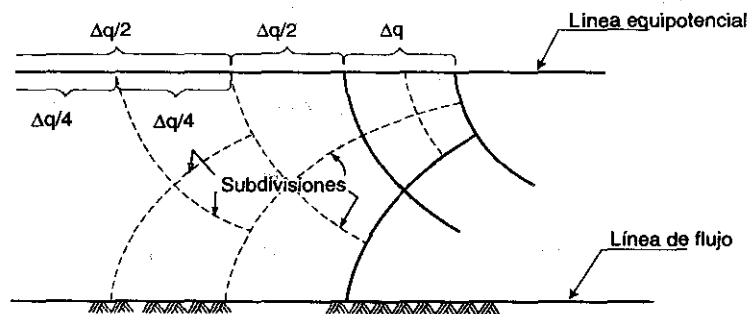


Figura 2.6 Subdivisión del último cuadrado en una red de flujo sobre un estrato horizontal.

Como se puede ver en esta figura, al subdividir repetidamente el último cuadrado, el gasto correspondiente a la última subdivisión se va reduciendo y en el límite dicho gasto vale cero; o sea, la singularidad de que una de las líneas equipotenciales y una de las de flujo del último cuadrado no se intersecten, resulta de que en el límite en esa última subdivisión no existe flujo de agua.

b) Cuadrados de regiones donde la frontera del suelo (que constituye una línea equipotencial y en la que hay entrada o salida de agua) se une con una línea de flujo formando un ángulo mayor o menor de 90° , es decir, regiones donde se intersectan dos líneas frontera formando un ángulo diferente a 90° . Las figuras 2.6, 2.7, 2.8 y 2.9 ilustran estas regiones.

Como puede observarse en la figura 2.6 en los puntos A, B y C, las líneas frontera de flujo y equipotenciales no se intersectan a 90° y los cuadrados en torno a ellos muestran una singularidad. Así, en el punto A, la línea superior de flujo y la línea equipotencial se intersectan en un ángulo menor de 90° ; en este caso, al subdividir repetidamente este cuadrado se podrá observar que mientras el gasto se reduce a la mitad cada vez que se subdivide, el área del último canal subdividido tiene un área mayor que la mitad (en la fig 2.8 $A_2 > A_1$).

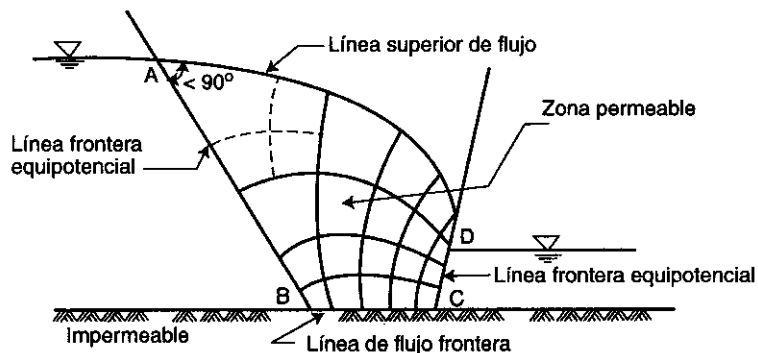


Figura 2.7 Red de flujo donde se tienen diversas condiciones de frontera.

Tomando en cuenta que la velocidad de flujo está dada por la siguiente expresión:

$$\text{velocidad} = \text{gasto}/\text{área}$$

en el límite resulta que la velocidad en el punto A de las figs. 2.7 y 2.8 es cero. Este hecho es, precisamente, el que hace la singularidad de este cuadrado.

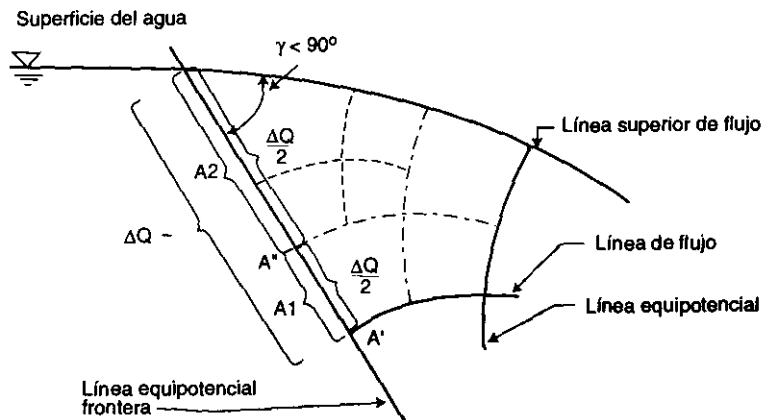


Figura 2.8 Subdivisión del primer cuadrado de la red de flujo de la figura 2.7.

Respecto a los cuadrados en los puntos B y C donde el ángulo con el que se intersectan las líneas equipotenciales y de flujo fronterizos es mayor de 90° , el efecto que resulta de subdividir esos cuadrados es el contrario al señalado en la fig. 2.8, y en este caso la velocidad en estos puntos es teóricamente infinita.²

En los puntos donde teóricamente la velocidad es infinita, la velocidad real está influida por el hecho que para esas velocidades el flujo es turbulento y la ley de Darcy ya no es válida, amén de que los cambios en la carga de velocidad ya no son despreciables. Además, en este caso, la ecuación diferencial de Laplace dada por la expresión (1), tampoco es válida y la red de flujo se desvía de la forma teórica. Sin embargo, las áreas afectadas son tan pequeñas que se pueden despreciar. En resumen, la velocidad que teóricamente es infinita, en realidad no lo es por lo antes señalado.

² En este caso, mientras el gasto Δq que pasa por el canal se reduce a la mitad cuando se hace la primera subdivisión, el área cercana al vértice en vez de quedar reducida a la mitad disminuye a un tamaño mucho menor, por lo que la velocidad debe aumentar cada vez que se subdivide; en el límite, dicha velocidad es infinita.

Otro ejemplo de singularidad se muestra en el ejemplo de la figura 2.9, donde el ángulo entre las líneas equipotenciales y de flujo fronteras es de 180° (punto A).

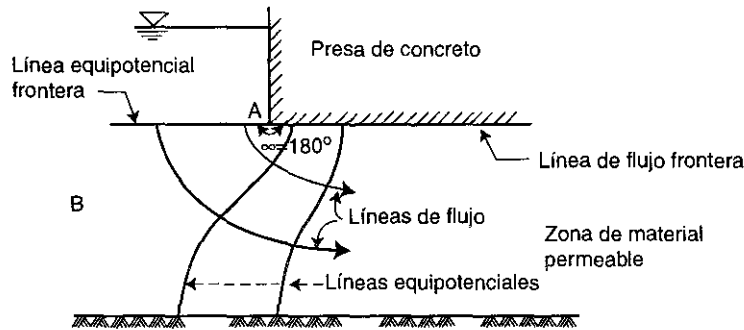


Figura 2.9 Singularidad del cuadro en torno al vértice A.

Otro caso semejante al anterior es el correspondiente a la llegada de agua a un filtro horizontal, como el mostrado en la fig. 2.10. Este caso particular se conoce como la parábola de Kozeny y la veremos con mayor detalle más adelante.

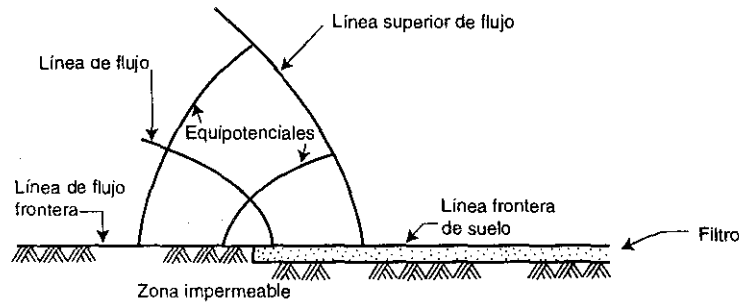


Figura 2.10 Parábola de Kozeny formada sobre el filtro horizontal.

Un ejemplo más de una red de flujo se muestra en la fig. 2.11, donde se pueden ver ciertos "cuadrados" de cinco lados como los que ocurren en las esquinas del ejemplo citado.

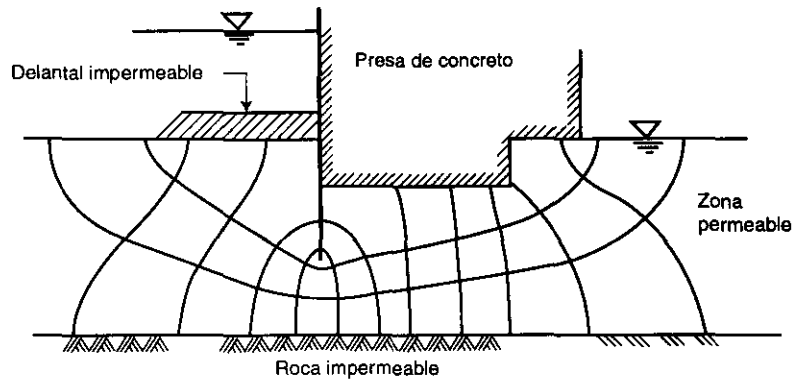


Figura 2.11 Red de flujo mostrando algunas peculiaridades en los cuadrados de las esquinas.

Como se puede ver en el ejemplo de la figura 2.11, siempre debe buscarse la simetría, particularmente donde se tienen tablaestaca o esquinas. Algunos detalles de cómo deben ir los cuadrados alrededor de estas zonas se ilustran en las siguientes siete figuras:

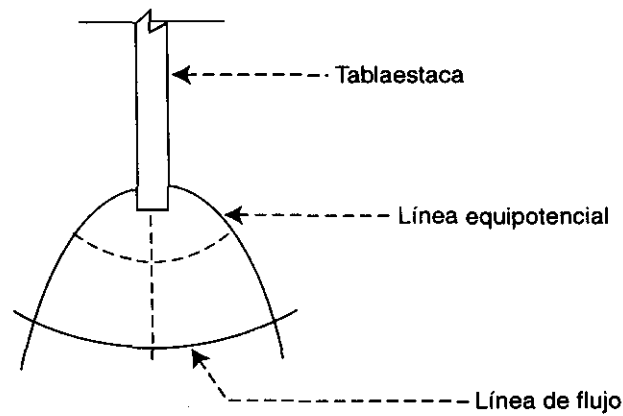


Figura 2.12 Detalle de un cuadrado alrededor de la punta en una tablaestaca.

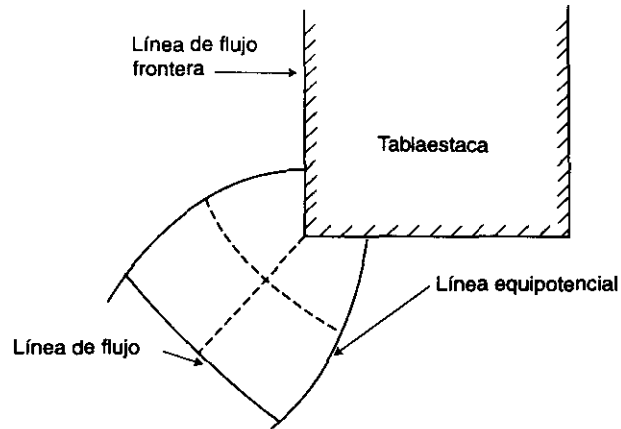


Figura 2.13 Detalle de un cuadrado alrededor de la esquina en una tablaestaca.

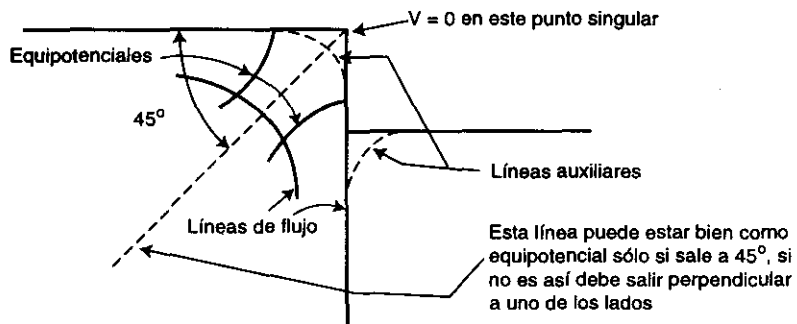


Figura 2.14 Detalle de las líneas de una red de flujo cerca de rincones.

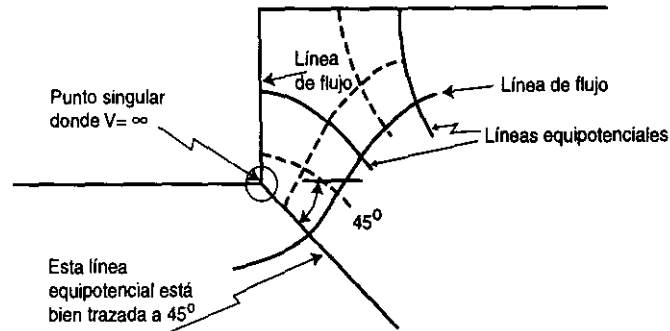


Figura 2.15 Detalle de la red de flujo en un esquina.

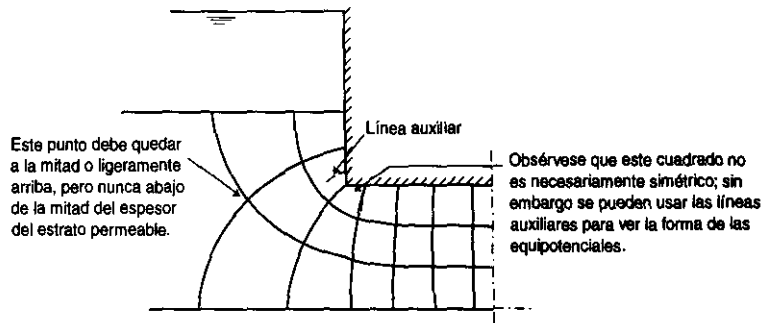


Figura 2.16 Ejemplo de una red de flujo donde no se observa una simetría perfecta en la esquina de una cimentación.

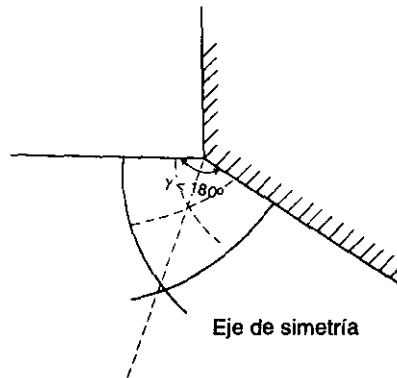


Figura 2.17 Cuadrado de una esquina donde se puede observar la simetría; nótese que en este caso no se tiene que cumplir que $a=y_d/2$ como en la figura 2.18.

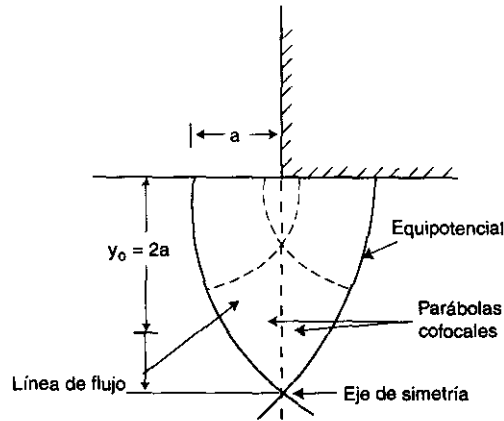


Figura 2.18 Cuadrado singular donde además de haber simetría, se debe cumplir la relación $y_0 = 2a$. ($\gamma = 180^\circ$).

2.3 Condiciones a lo largo de la superficie libre

2.3.1 Redes de flujo a lo largo del cuerpo de las presas de tierra

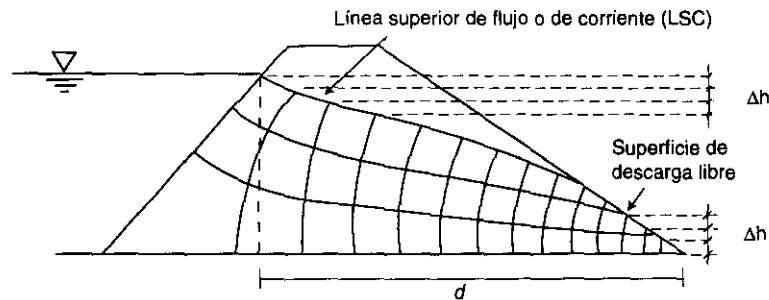


Figura 2.19 Ejemplo de red de flujo a través del cuerpo de una presa de sección homogénea.

Como se puede ver en la fig. 2.19, la red de flujo a través del cuerpo de una presa de tierra está constituida en su parte superior, primero, por la línea superior de flujo o de corriente (LSC) y luego por la *superficie de descarga libre* (que va desde el punto donde la LSC intersecta al talud agua abajo hasta el pie del mismo). Tomando en cuenta que a lo largo de la frontera superior de esta red de flujo la presión es igual a la

atmosférica y por lo tanto constante, y que por otro lado la carga de posición desde cualquier *punto* de esa frontera con respecto a la **base** de la presa es precisamente la distancia existente entre ese *punto* y dicha **base**, resulta que las intersecciones de las equipotenciales con la línea superior fronteriza representan la carga de agua a lo largo de esas líneas equipotenciales. Si nuestra red está constituida por cuadrados, las intersecciones, proyectadas sobre una vertical, deben ser equidistantes en la dirección vertical.

Es importante observar que la superficie de descarga libre, la cual no es línea de flujo ni equipotencial, está también en contacto con el aire y a lo largo de ella la presión es también constante. Esta línea de superficie no es equipotencial porque obviamente la carga varía; tampoco es de flujo porque si así fuera no habría gasto, ya que constituiría un tapón de las líneas de flujo que llegan a ella. Por lo anterior, los cuadrados a lo largo de esta frontera SON INCOMPLETOS y, puesto que no es línea de flujo, las equipotenciales NO TIENEN POR QUE CORTARLA A 90°; nótese, sin embargo, que tal frontera debe satisfacer la misma condición de línea superior de flujo referente a iguales caídas de carga entre los puntos donde interseccionan las equipotenciales.

Para la construcción de la red de flujo, como la de este ejemplo, Casagrande da la siguiente recomendación:

Cuando se construye una red de flujo conteniendo una superficie libre, se deberá empezar suponiendo el punto de intersección de la superficie y la línea superior de flujo, y trabajar hacia la superficie aguas arriba hasta lograr posiciones correctas relativas de los puntos de entrada y salida. La escala en la que la red se deberá dibujar no se conocerá sin antes haber terminado una buena porción de la red. Para problemas de flujo con superficie libre, resulta prácticamente imposible construir una red a una escala predeterminada en un lapso razonable.

Quizá, no está por demás aclarar que el resto de las líneas de flujo no tienen por qué tener intersecciones de igual distancia vertical con las equipotenciales, ya que la presión a lo largo de ellas no es constante e igual a la atmosférica.

2.4 Condiciones de entrada y salida de la línea superior de flujo

2.4.1 *Ángulo con el que intersecciona la línea superior de corriente (LSC) con la superficie libre de descarga*

a) Condición $\gamma < 90^\circ$ (γ = ángulo del talud). Para determinar el ángulo α con el que la línea superior de corriente (LSC) intersecciona a la superficie de descarga libre, se puede

utilizar la siguiente figura 2.20, donde la escala es tal que las líneas de flujo y los equipotenciales aparecen como líneas rectas.

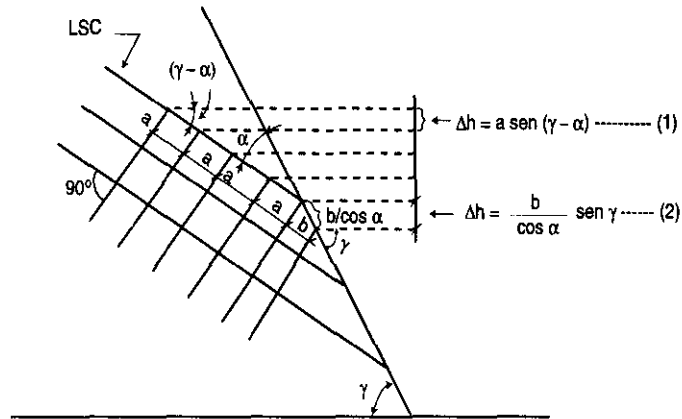


Figura 2.20 Llegada de la línea superior de corriente para un talud.

De acuerdo con la figura 2.20, el problema se limita a determinar el ángulo α de manera que $b=a$; de las ecuaciones 1 y 2 en esta figura, se tiene:

$$\frac{\text{sen } \gamma}{\text{cos } \alpha} = \text{sen}(\gamma - \alpha)$$

De acuerdo con la ecuación anterior, la única solución para que la igualdad se cumpla es que $\alpha = 0$

b) Condición $\gamma > 90^\circ$

De acuerdo con la fig. 2.21, si se cumple que $a = b$, se tendrá que:

$$\text{sen}(180^\circ - \gamma - \alpha) = \text{sen } \gamma / \text{cos } \alpha$$

Las únicas posibilidades son:

a) $\alpha = 90^\circ - \gamma$ (significa un drenaje vertical)

b) $\alpha = 0$

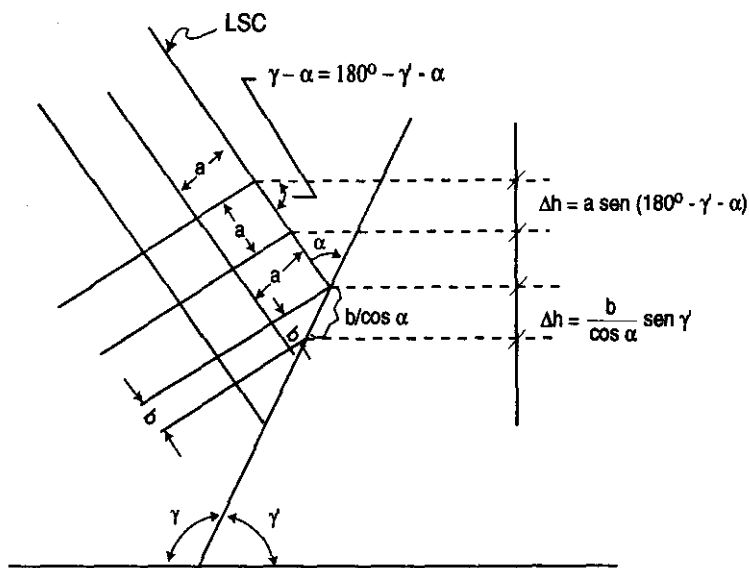


Figura 2.21 Llegada de la línea superior de corriente para un talud $\gamma > 90^\circ$.

Sin embargo, la alternativa b significa que no hay flujo (ya que si hay gradiente el flujo avanza en la dirección del mismo y no en el sentido opuesto). Esto significa que para $\gamma > 90^\circ$ la línea de corriente debe intersectar a la superficie de descarga formando una tangente con la vertical que pasa en el punto de descarga.

Para el caso de $\gamma > 90^\circ$ el tipo de red de flujo que se tendrá es el mostrado en la figura 2.22.

Nótese en la figura 2.22 que las líneas de flujo deben de entrar por arriba de la perpendicular a la superficie libre de descarga; la figura 2.23 ilustra esta observación.

Algunas otras condiciones de entrada y salida de la LSC son las mostradas en la figura 2.24.

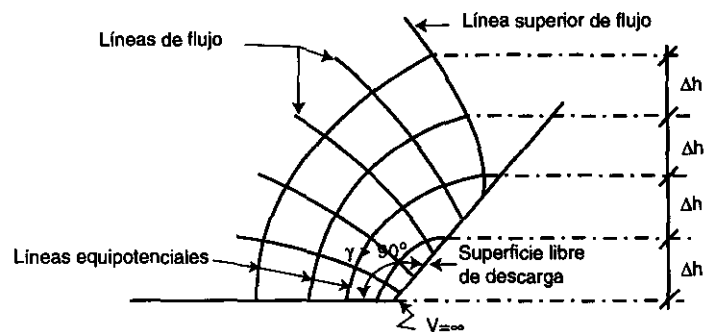


Figura 2.22 Detalle de red de flujo en la descarga de un talud donde $\gamma > 90^\circ$.

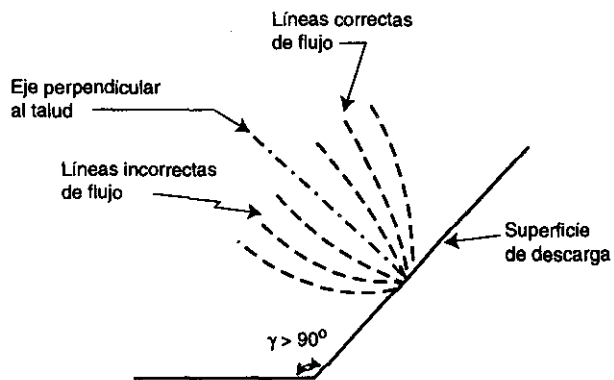


Figura 2.23 Localización de las líneas de flujo en un talud aguas abajo con $\gamma > 90^\circ$.

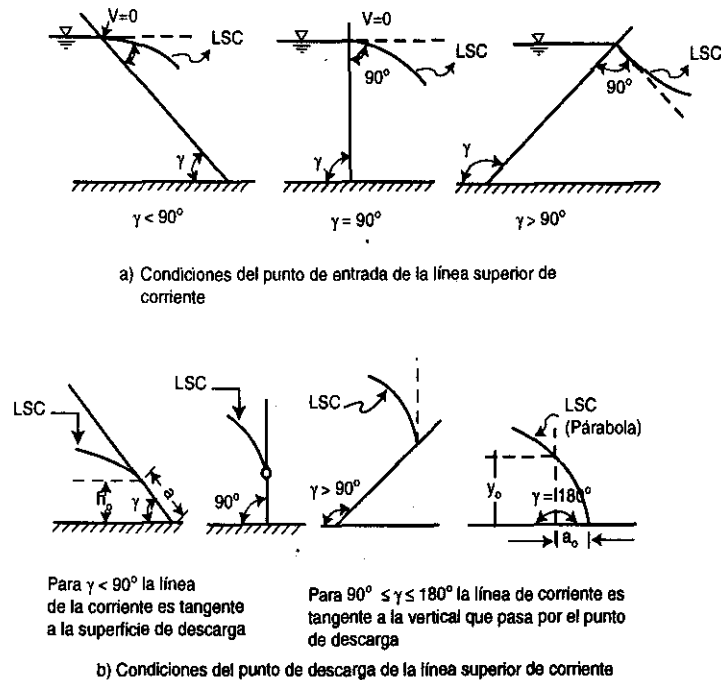


Figura 2.24 Condiciones de entrada y salida de la línea superior de corriente (LSC).

2.4.2 Determinación de la velocidad de salida en la superficie de descarga libre

Si analizamos el gradiente de la línea superior de corriente en un tramo corto como el mostrado en la fig. 2.25, se observará que dicho gradiente está dado por el $\text{sen } \sigma$, siendo σ el ángulo que forma dicha línea con la horizontal; la velocidad de descarga en cualquier punto será por tanto:

$$V_d = k \text{ sen } \sigma$$

Obsérvese que en el caso particular de la figura 2.25, en el punto donde intersecciona la línea superior de corriente a la superficie libre de descarga $\sigma=90^\circ$; por tanto en ese punto la velocidad de descarga V_d es igual a la permeabilidad k , ya que $\text{sen } 90^\circ$ es igual a la unidad.

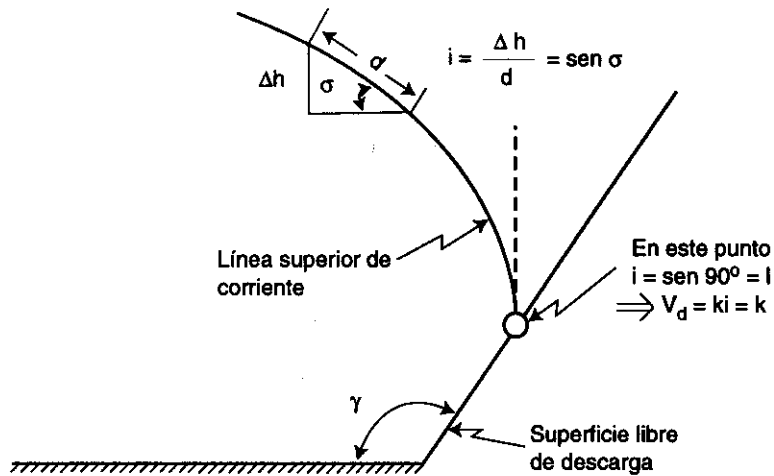


Figura 2.25 Variación del gradiente hidráulico en la línea superior de corriente, en función del ángulo.

Veamos ahora la variación de la velocidad de descarga en la superficie libre de descarga. Para ello recordemos que, en general, el gradiente hidráulico en la dirección "d" del flujo queda representado por:

$$i = \frac{\partial h}{\partial d}$$

Las componentes de este gradiente en las direcciones x, y, y z son, respectivamente:

$$\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}$$

Por lo tanto, las velocidades en la dirección "x" y "y" son:

$$v_x = k \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$v_y = k \frac{\partial h}{\partial y}$$

Observemos ahora la figura 2.26, donde se obtienen las siguientes igualdades:

Velocidad tangencial al talud: $v_t = k \frac{\Delta h}{d} = k \operatorname{sen} \gamma = \text{constante}$

Velocidad a lo largo de la línea de flujo: $v_f = \frac{v_t}{\cos \alpha} = \frac{k \operatorname{sen} \gamma}{\cos \alpha}$

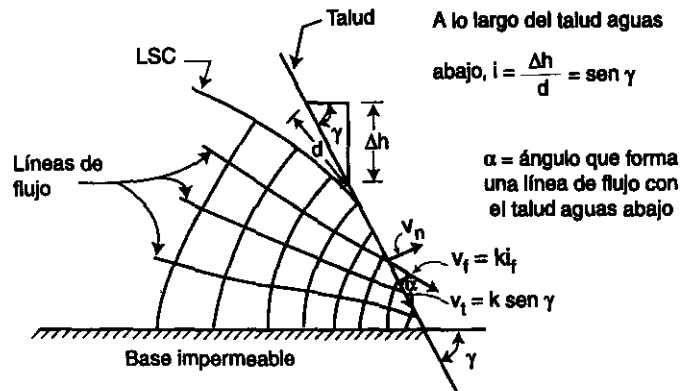


Figura 2.26 Componentes de la velocidad de flujo (v_f) en la dirección tangente (v_t) y normal (v_n) al talud aguas abajo.

Obsérvese que como el ángulo α es variable para cada línea de flujo, la velocidad de flujo, v_f , varía en magnitud y dirección a lo largo de la superficie libre de descarga.

Velocidad normal al talud: $v_n = v_t \tan \alpha = k \operatorname{sen} \gamma \tan \alpha$

Puesto que la velocidad normal v_n , es también función de α , su valor varía en cada punto de la superficie libre de descarga.

Conviene también observar que en el punto de intersección de la superficie libre de descarga y la base impermeable, $\alpha = \gamma$ y por tanto en ese punto $v_f = k \tan \gamma$. Esta observación se puede ver mejor si se considera que en las cercanías a dicho punto las líneas de flujo llegan prácticamente horizontales como se muestra en la figura 2.27. Conviene también hacer notar que la velocidad de flujo v_f varía de $k \cdot \text{sen } \gamma$ en el punto de descarga de la línea superior de corriente, a $k \cdot \text{tan } \gamma$ al pie del talud.

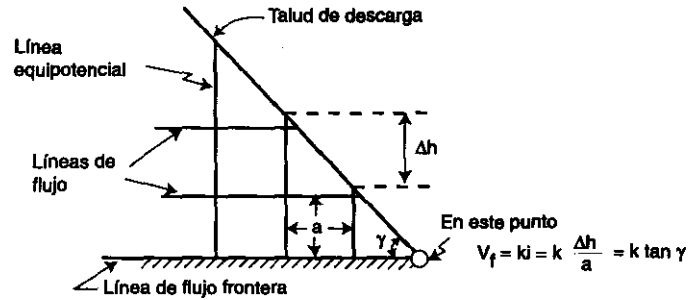


Figura 2.27 Red de flujo cerca del vértice del talud aguas abajo.

Tomando en cuenta lo ilustrado por las tres últimas figuras, los siguientes esquemas (figs. 2.28 a 2.33) indican la variación de la componente normal de la velocidad de flujo a lo largo de las superficies libres de descarga para diversos valores de γ y de tirantes hacia el talud aguas abajo.

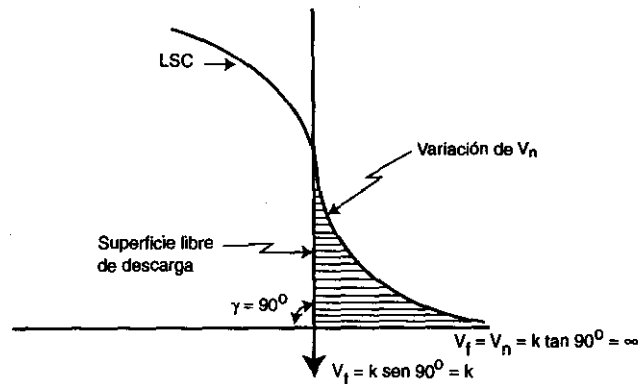


Figura 2.28 Variación de V_n a lo largo de la superficie libre de descarga cuando $\gamma = 90^\circ$, tirante aguas abajo nulo.

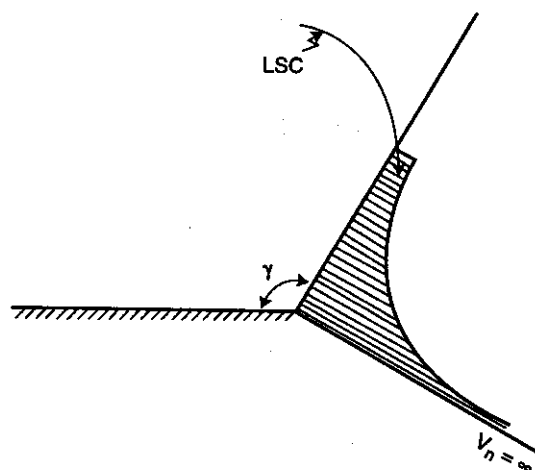


Figura 2.29 Variación de V_n cuando $\gamma > 90^\circ$ sobre la superficie libre de descarga, con tirante nulo aguas abajo.

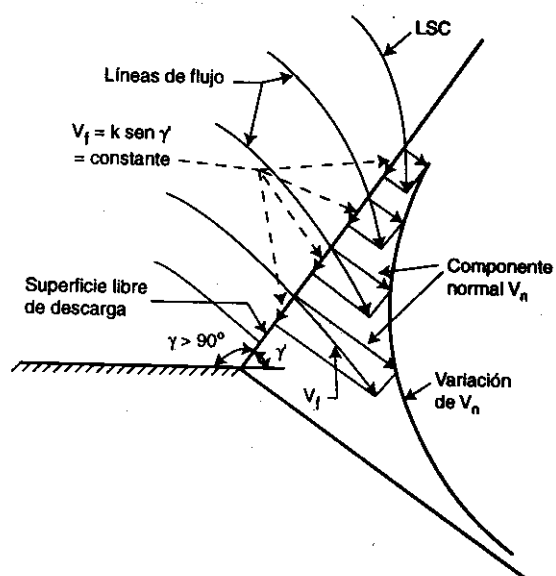


Figura 2.30 Variación de V_f y V_n a lo largo de la superficie libre de descarga cuando $\gamma > 90^\circ$ y tirante nulo en la salida.

La variación de la velocidad normal, V_n para $\gamma > 90^\circ$, según se advierte en la figura 2.29, se puede deducir de la figura 2.30, donde se muestran las componentes normal y tangencial de la velocidad de descarga.

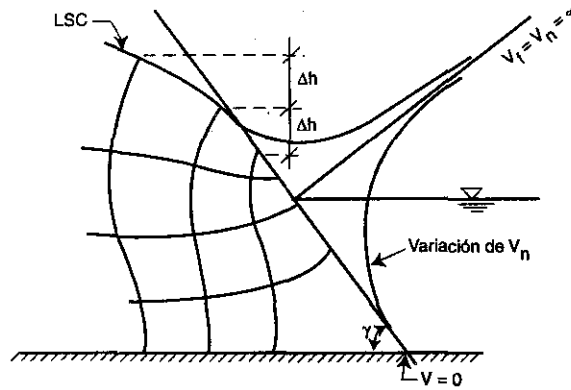


Figura 2.31 Variación de V_n sobre el flujo de aguas abajo cuando $\gamma < 90^\circ$ y existe tirante de agua a la salida.

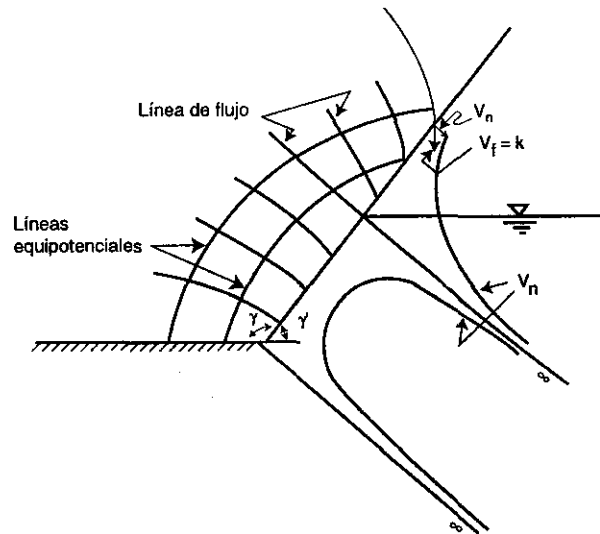


Figura 2.32 Variación de V_n para $\gamma > 90^\circ$ con tirante aguas abajo.

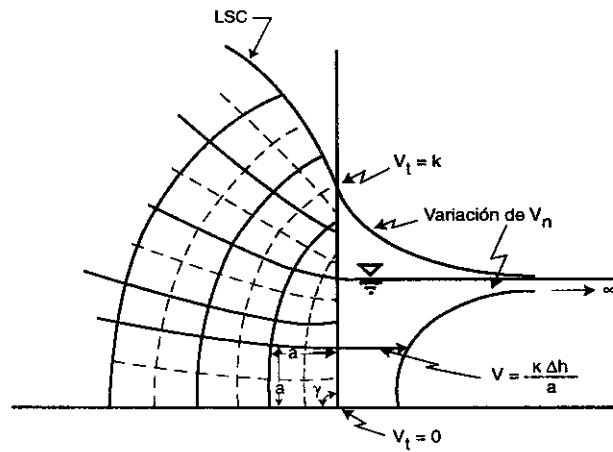


Figura 2.33 Variación de V_n para $\gamma = 90^\circ$ con tirante aguas abajo.

2.4.3 Algunos casos particulares de la línea superior de corriente

Existen algunos casos particulares en que la línea de corriente superior no intersecta tangencialmente a la vertical sobre el talud aguas abajo, cuando $\gamma > 90^\circ$ ($\gamma < 90^\circ$). Las siguientes figuras (2.34 a 2.37) muestran estos casos.

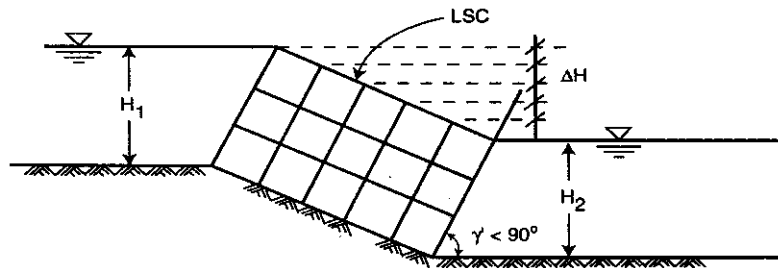


Figura 2.34 Caso en que $H_1 = H_2$ y la línea superior de corriente no llega vertical en su intersección con el talud aguas abajo.

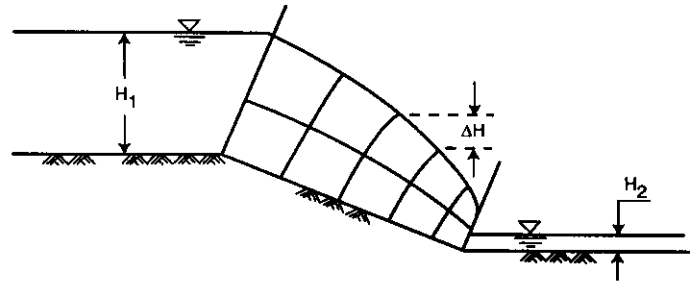


Figura 2.35 Caso en que $H_1 > H_2$ en el cual la línea superior de corriente llega vertical en su intersección con el talud aguas abajo.

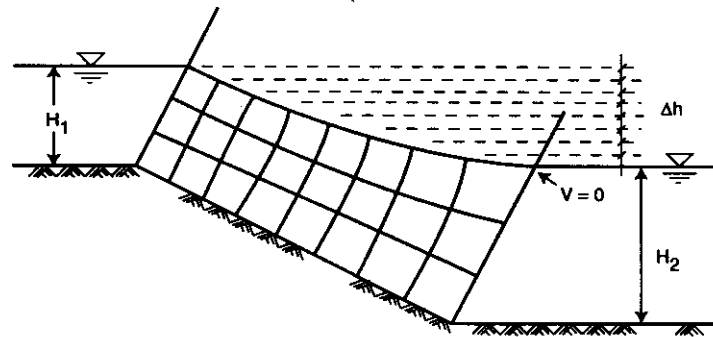


Figura 2.36 Caso en que $H_1 < H_2$ donde la línea superior de corriente llega horizontal al talud aguas abajo.

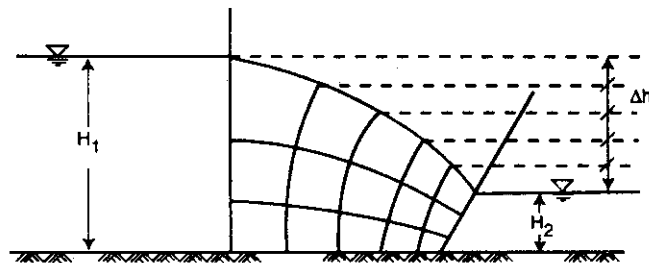


Figura 2.37 Caso en que la altura H_2 es tal que, siendo menor a H_1 , la línea de corriente superior no interseca verticalmente al talud aguas abajo (este valor de H_2 es único).

Conviene señalar que al cambiar el valor de H_2 en la figura 2.37 la línea superior de corriente sería como la mostrada en la figura 2.35 (intersección vertical con el talud aguas abajo) si el tirante aguas abajo es menor al H_2 indicado; si dicho tirante es mayor al señalado por H_2 en la figura 2.37, la línea superior de corriente tendrá la forma como se observa en la figura 2.36 (intersección horizontal). La figura 2.38 muestra, a través de otro ejemplo, estas situaciones.

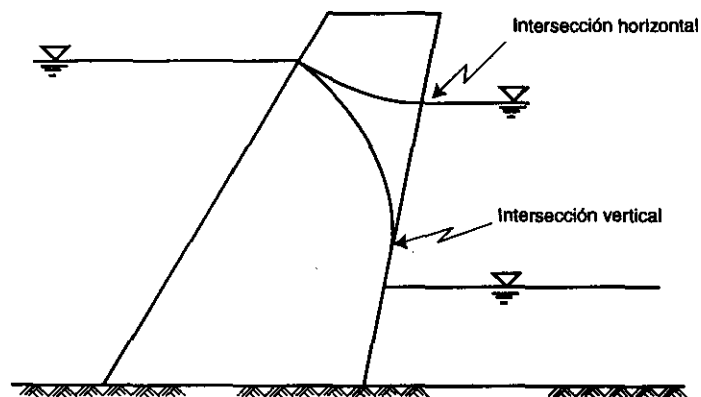


Figura 2.38 Esquema que muestra cómo la línea superior de corriente puede intersectar horizontalmente o verticalmente al talud aguas abajo.

2.5 Red de flujo en canales

La figura 2.39 muestra la red de flujo de un canal de tierra donde el nivel freático está muy por abajo del nivel al que se encuentra el canal que se estudia; como se puede observar en esa misma figura, el gradiente vertical es igual a la unidad y el gasto que se filtra, según la Ley de Darcy, es igual a:

$$q = kD = k (B + 2S)$$

donde:

k = coeficiente de permeabilidad del terreno en el que se encuentra el canal

D = ancho total de la red de flujo = área de filtración para una longitud unitaria de canal

B = ancho de la base del canal

S = talud mojado

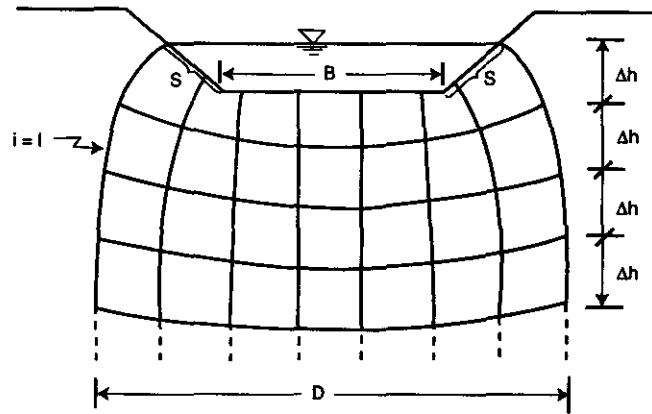


Figura 2.39 Red de flujo en un canal de tierra.

En caso de que el canal tenga un revestimiento, que es el caso más común, el gasto de filtración será mucho menor al señalado y su cuantificación dependerá de la permeabilidad del revestimiento y de lo bien construido que esté el mismo.

Ejercicios del capítulo II

2.1 Dibuje la red de flujo a través del cuerpo de suelo permeable mostrado en la figura 1, utilizando cuatro canales de flujo.

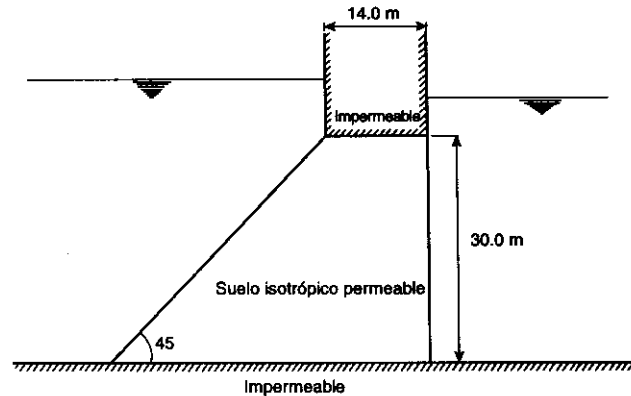


Figura 1

2.2 Dibuje la red de flujo para las condiciones mostradas en la figura 2, y determine la cantidad de flujo por minuto que pasa por abajo de la tablaestaca en una longitud de 30 metros.

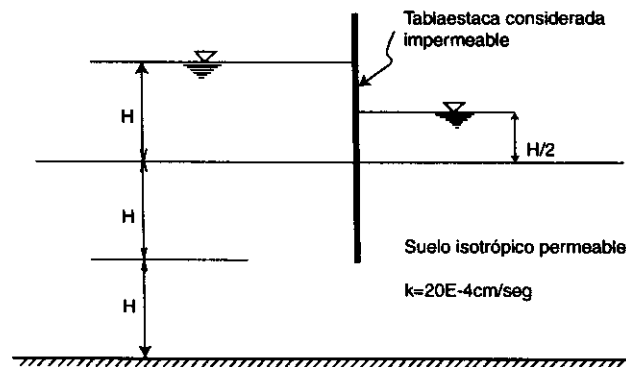


Figura 2

2.3 Dibuje la red de flujo correspondiente a la cimentación de una presa de concreto de 150 metros de longitud, mostrada en la figura 3, y determine la pérdida de agua en metros cúbicos por minuto.

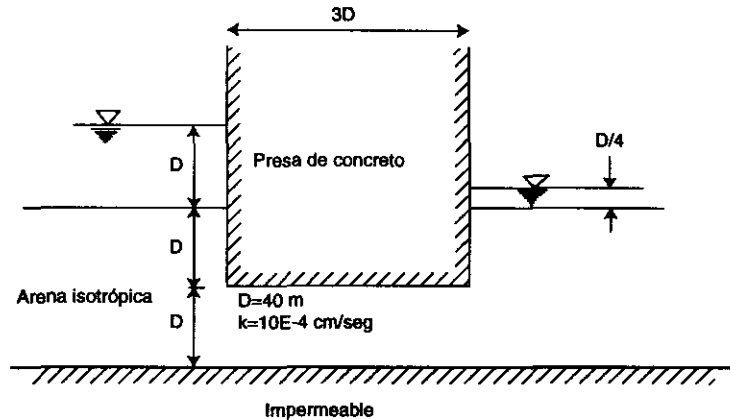


Figura 3

2.4 Para las condiciones mostradas en el problema No.2.2, derive **matemáticamente**, por división progresiva de la red de flujo, la velocidad de entrada o descarga a una distancia infinita de la tablaestaca.

2.5 Dibuje la red de flujo para la corriente que pasa por la cimentación permeable mostrada en la siguiente figura 4 y determine el factor de forma. Use la escala 1:2500.

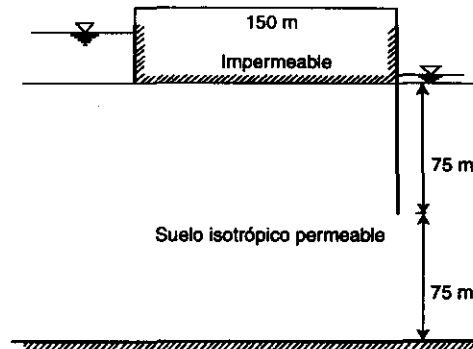


Figura 4

2.6 (a) Demuestre por medio de una red de flujo agrandada, que en general el nivel del tirante aguas abajo de una presa no coincide con el punto de descarga de la línea superior de corriente.

(b) Dibuje un ejemplo de una red de flujo en que estas dos elevaciones coincidan.

2.7 El talud aguas abajo de una presa tiene una inclinación de 45° con respecto a la horizontal. Empezando por un punto arbitrario en la superficie de descarga, construya la línea de corriente superior hasta tener al menos seis caídas de líneas equipotenciales. Construya después la red de flujo en el área triangular abajo de la superficie de descarga, y si es necesario revise toda la red de flujo contruida.

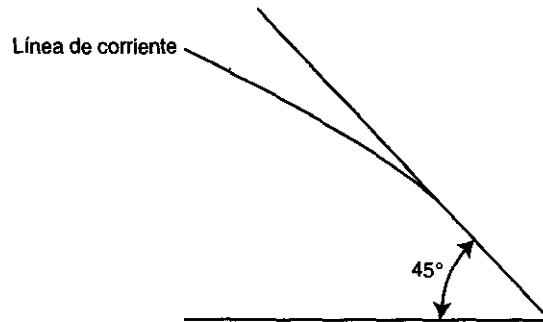


Figura 5

3 CÁLCULO DE FLUJO A TRAVÉS DE PRESAS

3.1 Soluciones matemáticas rigurosas y aproximadas para secciones homogéneas

3.1.1 Parábola básica o de Kozeny

Esta curva se presenta en la línea superior de corriente cuando se tiene un filtro horizontal como se muestra en la figura 3.1. En 1931 Kozeny analizó rigurosamente este problema, llegando a una solución en que las líneas de flujo y las equipotenciales estaban constituidas por un par de familias de parábolas cofocales.

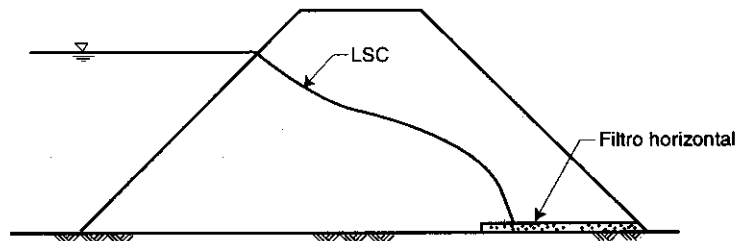


Figura 3.1 Sección de una presa de tierra con un filtro horizontal.

La solución gráfica de este problema a través de las redes de flujo se muestra en la figura 3.2. Esta solución fue comparada por A. Casagrande con la solución rigurosa teórica de Kozeny, encontrando que la diferencia máxima obtenida en cualquier punto de la línea superior de corriente fue de 3%. Esto, dijo Casagrande, "demuestra que el método gráfico no es un juego sino que es de gran valor y que cualquier tiempo invertido para adquirir suficiente facilidad en su manejo, es siempre bien invertido". Haciendo referencia a los ejes X-Y mostrados en la figura 3.2 y de acuerdo con definición de parábola [lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco (punto A en la fig. 3.2) y una recta llamada directriz (línea CD en fig. 3.2)], se observa que si:

$$BA=BC \quad (3.1)$$

y considerando que:

$$BA = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y \quad BC = x + y_0 \quad (3.2)$$

al sustituir 3.2 en 3.1 y elevando al cuadrado ambos miembros se obtiene:

$$x^2 + y^2 = (x + y_0)^2 = x^2 + 2xy_0 + y_0^2$$

y despejando X:

$$x = \frac{y^2 - y_0^2}{2y_0} \quad (3.3)$$

Esta ecuación representa la parábola de Kozeny.

Haciendo nuevamente referencia a la figura 3.2 y a la definición de parábola se tiene que:

$$y_0 = \sqrt{d^2 + h^2} - d \quad (3.4)$$

donde d y h son la absisa y la ordenada respectivamente del extremo de la parábola.

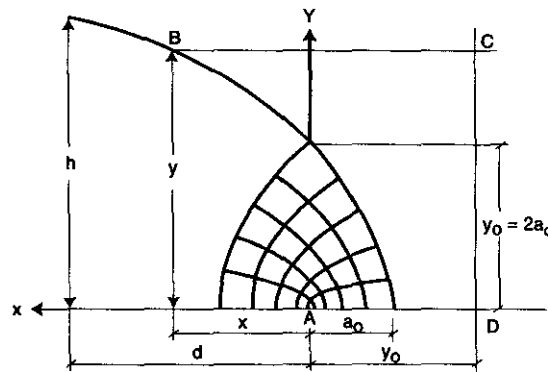


Figura 3.2 Parábola básica y par de familias de parábolas cofocales con centro de coordenadas en A.

Ahora bien, tomando en cuenta que la pendiente de la línea de corriente superior cuando $x=0$, es igual a la unidad (la tangente en este punto forma 45° con respecto a la horizontal) y que i (gradiente hidráulico)=1 como valor promedio en esa sección transversal (de acuerdo con Dupuit como se verá más adelante), resulta que el gasto por unidad de ancho, de acuerdo con la solución de Kozeny, es igual a:

$$q = kiA = ky_o = k[\sqrt{d^2 + h^2} - d] \quad (3.5)$$

La distribución de la velocidad en este caso se muestra en la figura 3.3

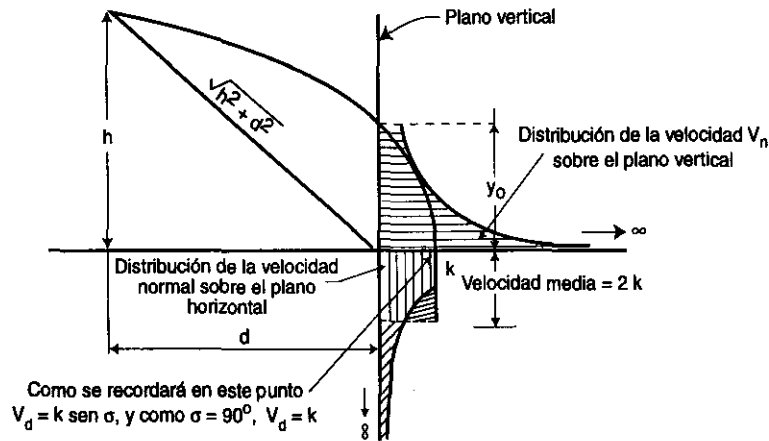


Figura 3.3 Distribución de la velocidad normal a los planos vertical y horizontal en la parábola de Kozeny.

3.1.2 Determinación gráfica de la línea superior de corriente para el caso $60^\circ < \gamma < 180^\circ$, usando la parábola básica de Kozeny

Después de comparar los resultados de soluciones gráficas a varios problemas, obtenidas por aproximaciones y verificadas con modelos físicos, A. Casagrande llegó a la conclusión de que la parábola básica puede servir como auxiliar al trazo de la línea de corriente superior, según se muestra en la siguiente figura número 3.4.

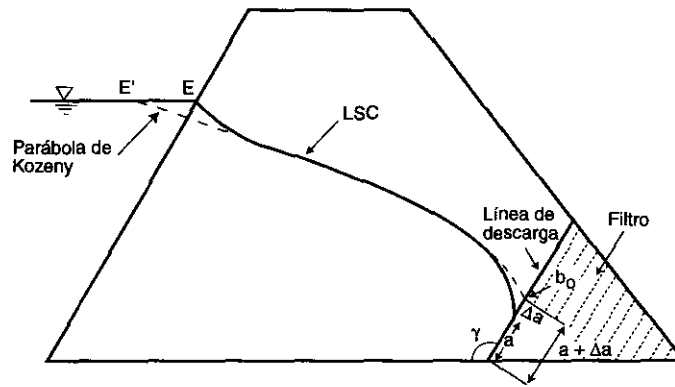


Figura 3.4 Uso de la parábola de Kozeny para dibujar la línea superior de corriente cuando $60^\circ < \gamma < 180^\circ$.

Con base en esa serie de comparaciones Casagrande observó que la parábola intersecta a la línea de descarga un poco más arriba de donde la línea de corriente superior intersecta a dicha línea de descarga, en una cantidad igual a Δa . La relación $\Delta a / (a + \Delta a) = C$ depende del ángulo γ ; si $\gamma = 180^\circ$, $C=0$; si $\gamma = 90^\circ$, $C=0.26$; si $\gamma = 60^\circ$, $C=0.32$.

Los valores intermedios a estos valores de γ se pueden determinar mediante la fig. 3.5 que da Casagrande.

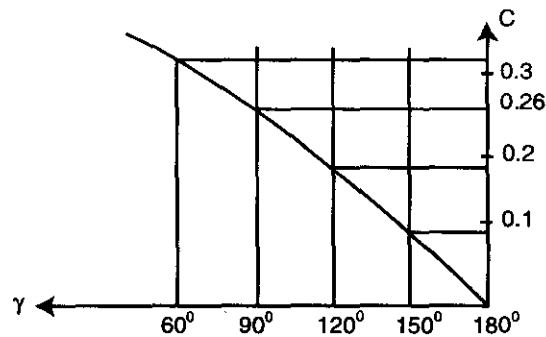


Figura 3.5 Valores de la relación $C = \frac{\Delta a}{a + \Delta a}$ VS γ (γ =ángulo del talud de descarga).

La cantidad de $a + \Delta a$ se obtiene de la intersección de la parábola básica con el talud de descarga, lo cual se puede hacer matemáticamente o gráficamente; en ambos casos se requiere determinar $y_0 = (d^2 + h^2)^{1/2} - d$, como se verá enseguida:

La determinación gráfica del punto b_0 entre la parábola básica y la superficie de descarga se puede hacer a partir de la determinación de la ordenada " h_1 " (ver fig. 3.6) de dicho punto. Esta ordenada se obtiene precisamente de la intersección de la parábola de ecuación:

$$x = \frac{y^2 - y_0^2}{2y_0} \quad (3.3)$$

y la recta del talud aguas abajo cuya ecuación es:

$$y = \pm x \tan \gamma \quad (3.6)$$

signo negativo para $\gamma > 90^\circ$

signo positivo para $\gamma < 90^\circ$

Llevando la expresión (3.3) a (3.6) y arreglando términos, se obtiene, para $y = h_1$:

$$h_1 = \pm \frac{y_0}{\tan \gamma} + \sqrt{\frac{y_0^2}{\tan^2 \gamma} + y_0^2} \quad (3.7)$$

Como se puede observar en la fig. 3.6, el primer término del miembro de la derecha es simplemente la distancia $BE=f$, y el segundo es la distancia $AB=g$. La ordenada h_1 es la suma de $f+g$ y se obtiene gráficamente como se indica en esa figura. Este procedimiento es el siguiente: 1) Se determina el valor de y_0 (ver ecuación 3.4); 2) se traza una vertical en el punto A correspondiente al pie del talud aguas abajo; 3) tomando como ordenada y_0 , trazar una horizontal hasta interceptar al talud en el punto B; 4) haciendo centro en B y tomando como radio la distancia $\overline{BE} = f$, se determina el punto C sobre el talud, y 5) haciendo centro en A se lleva a la distancia $\overline{AC} = f + g$, a la vertical trazada en (2) para obtener el punto D; la distancia \overline{AD} corresponde a la ordenada del punto b_0 donde la parábola intersecciona al talud aguas abajo.

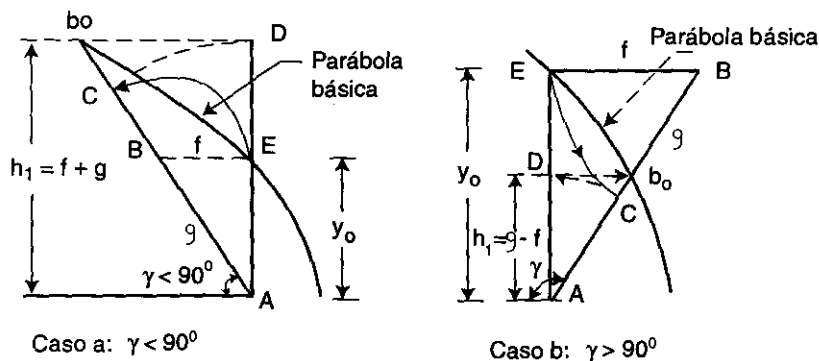


Figura 3.6 Determinación gráfica de b_0 en la parábola básica.

Otro procedimiento gráfico más sencillo para determinar a $\pm \Delta a$ es el ideado por el Dr. Zaldastari (alumno de A. Casagrande, 1947); este procedimiento se muestra en la figura 3.7 y está basado en el hecho de que la tangente a la parábola en el punto de intersección con el talud aguas abajo, debe pasar por el punto donde se intersecta la vertical trazada a partir de y_0 del foco y la perpendicular al talud, a partir de su pie (foco de la parábola). El procedimiento de Zaldastari consiste en: 1) en el pie del talud (punto F en la fig. 3.7) se traza una perpendicular al talud aguas abajo; 2) a partir de una distancia horizontal y_0 del pie del talud, trazar una línea vertical; 3) a partir de la intersección de las líneas trazadas en (1) y (2), trazar un semicírculo a partir de F para obtener el punto B sobre la vertical trazada en (2); dicho punto B corresponde a la ordenada de la intersección de la parábola básica con el talud aguas abajo, es decir, del punto b_0 . Obsérvese en la figura 3.7 que la distancia y_0 se puede obtener también gráficamente, al llevar la distancia de FE' (F es el pie del talud aguas abajo y E' es la intersección de la parábola básica con el tirante de aguas arriba de la figura 3.4), a la horizontal en la base del terraplén.

Teniendo entonces la parábola, el punto de su intersección con el talud aguas abajo y el punto de descarga utilizando la fig. 3.5, es fácil dibujar toda la línea superior de corriente.

3.1.3 Corrección de la línea de corriente superior en el talud aguas arriba

Debido a la condición de entrada en el talud aguas arriba, la línea de corriente superior se desvía un poco de la parábola en las cercanías del punto de entrada.

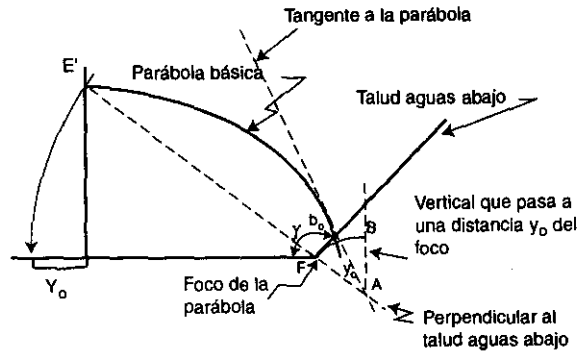


Figura 3.7 a Método del Dr. Zaldastari para determinar el punto b_0 en la parábola básica para $\gamma > 90^\circ$.

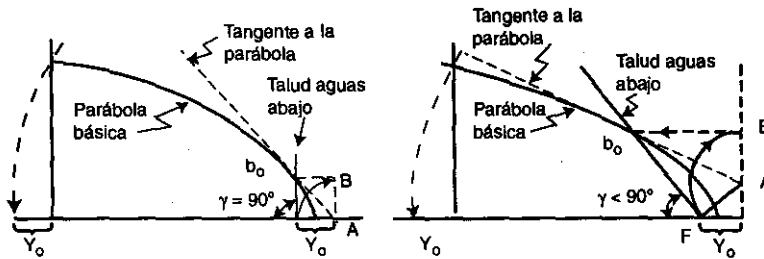


Figura 3.7 b $\gamma = 90^\circ$.

Figura 3.7 c $\gamma < 90^\circ$.

Leo Casagrande propuso hacer la corrección correspondiente determinando la cantidad Δ_1 que se muestra en la figura 3.8, en función de d , h y la pendiente del talud aguas arriba (L. Casagrande presentó una solución gráfica para determinar esa cantidad).

A. Casagrande propuso una solución más sencilla y más fácil de recordar, la cual consiste en determinar el punto E' de la figura 3.8, localizado aproximadamente a $1/3$ de S a partir del punto E ; dicho punto E' es donde la parábola básica intersecta a la superfi-

cie libre del agua en la parte aguas arriba. Una vez trazada la parábola con ayuda del punto E', se podrá hacer fácilmente la corrección de entrada de la línea superior de corriente.

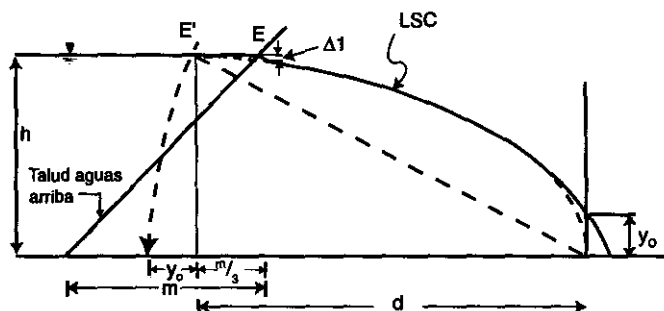


Figura 3.8 Corrección de L. Casagrande, en la parábola básica para cumplir con la condición de entrada.

Es importante señalar que esta corrección aguas arriba sólo se hace si $d > h$; si $d \leq h$ la sección se puede considerar estrecha y, en este caso, la línea superior de corriente se debe obtener directamente del trazo de la red de flujo.

3.2 Derivación original de Dupuit basada en suposiciones simplificadoras y demostración de su validez rigurosa

Las suposiciones que hizo Dupuit en su teoría referente al movimiento del agua son:

- En cada punto de una línea vertical el gradiente hidráulico es constante.
- Este gradiente es igual a la pendiente dy/dx (ver fig. 3.9) de la línea superior de corriente en el punto donde la interseca la línea vertical.

Esta última suposición representa una buena aproximación del gradiente hidráulico promedio en una línea vertical, siempre y cuando la pendiente de la línea superior de corriente sea relativamente plana.

Partiendo de estas suposiciones se tiene:

$$i = dy/dx$$

$$q = k i A = k y \, dy/dx \quad (3.8)$$

ya que $A = y \cdot 1$

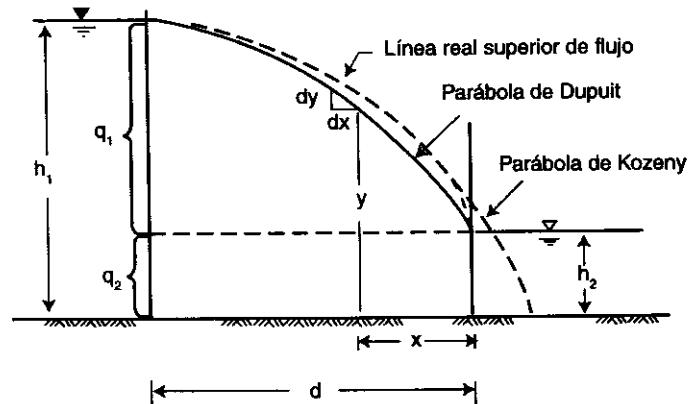


Figura 3.9 Parábola de Dupuit y su comparación con la línea superior de flujo, para una presa de tierra con taludes verticales y tirante h_2 aguas abajo.

Arreglando la ecuación 3.8 e integrando se tendrá:

$$\int (q/k) dx = \int y \, dy$$

o sea:

$$(q/k) x = (y^2/2) + \text{constante} \quad (3.9)$$

para $x = d$ y $y = h_1$, de la ecuación 3.9 se obtiene:

$$\text{cte} = (q/k)d - (h_1)^2/2 \quad (3.10)$$

llevando la ecuación 3.10 a la 3.9 se tiene:

$$\frac{q}{k}(d-x) = \frac{h_1^2 - y^2}{2} \quad (3.11)$$

Esta última ecuación representa la parábola de Dupuit

Para $x = 0$ y $y = h_2$, la ecuación 3.11 se convierte en:

$$\frac{q}{k}d = \frac{h_1^2 - h_2^2}{2} \quad (3.12)$$

y despejando q se obtiene:

$$q = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2d} \quad (3.13)$$

Esta expresión 3.13 se conoce como la fórmula de Dupuit.

Para presas con taludes verticales la fórmula de Dupuit es realmente rigurosa; sin embargo, para presas con taludes cualesquiera la fórmula da valores del gasto con suficiente aproximación para fines prácticos. Empíricamente se sabe que la fórmula para este último caso da mejores resultados si en vez de d_0 se utiliza en la fórmula el valor de d (ver fig. 3.10).

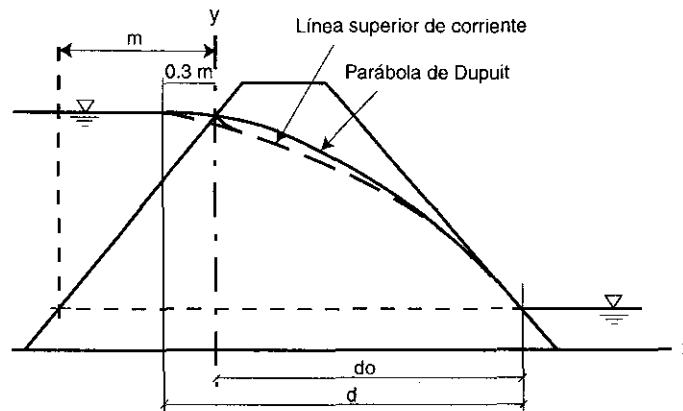


Figura 3.10 Parábola de Dupuit en una presa de tierra con taludes no verticales.

Muskat (1937) realizó un estudio con la línea de corriente superior real y encontró que sus resultados difieren de los de Dupuit en 1%. Obsérvese en la expresión (3.13) que si no existe tirante aguas abajo $h_2 = 0$ y, por tanto:

$$q = k \frac{h^2}{2d} \quad (3.14)$$

Nótese en la figura 3.9 que si se subdivide el flujo en dos partes como allí se indica, al sumarlos se obtiene exactamente la misma cantidad de flujo obtenida mediante (3.13); es decir:

$$q_1 + q_2 = \frac{k}{2d}(h_1 - h_2)^2 + k\left(\frac{h_1 + h_2}{d}\right)h_2 = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2d}$$

Otra forma de llegar a este resultado y que permite recordar la fórmula de Dupuit es la siguiente:

$$q = kiA = k \frac{h_1 - h_2}{d} \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right) = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2d}$$

donde se está tomando como $i = \frac{h_1 - h_2}{d}$

y $A = \frac{h_1 + h_2}{2} = \text{área media}$

3.3 Métodos aproximados para calcular el flujo a través de presas de tierra homogéneas e isotrópicas

3.3.1 Método de la tangente

Solución aproximada para $\gamma < 30^\circ$

Basados en las suposiciones hechas por Dupuit, tanto Schaffernak, en Austria, como Van Iterson, en Holanda, determinaron, en el año de 1916, la cantidad de flujo que pasa por una presa. La figura 3.11 muestra la línea superior de corriente de acuerdo con el criterio dado por estos dos ingenieros y allí mismo se muestra la corrección que

sugirió A. Casagrande para satisfacer la condición de entrada, utilizando la distancia "d" en vez de " d_0 ". La figura 3.12 muestra la corrección de A. Casagrande para el caso de tener tirante aguas abajo.

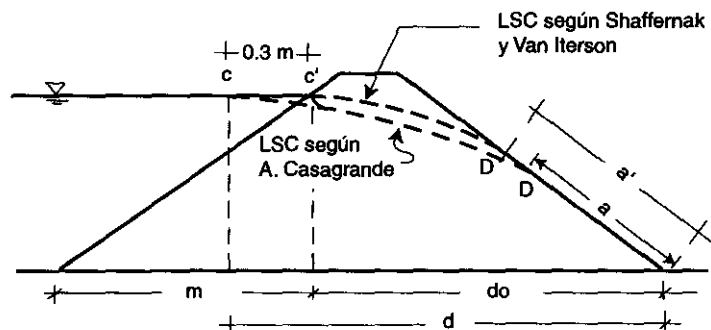


Figura 3.11 Línea superior de corriente según Schaffernak y Van Iterson y su comparación con la de A. Casagrande, para una presa homogénea.

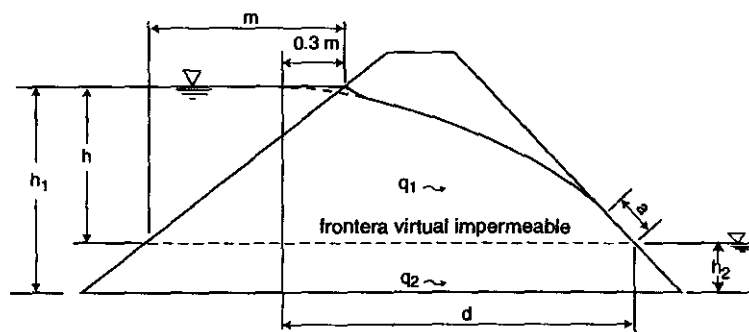


Figura 3.12 Corrección sugerida por A. Casagrande para la línea superior de corriente en su entrada, cuando existe tirante aguas abajo, suponiendo una frontera impermeable.

Haciendo entonces válidas las suposiciones de Dupuit se tiene:

$$i = dy/dx \quad (3.15)$$

y consecuentemente, de acuerdo con la figura 3.13,

$$q = k y (dy/dx) \quad (3.16)$$

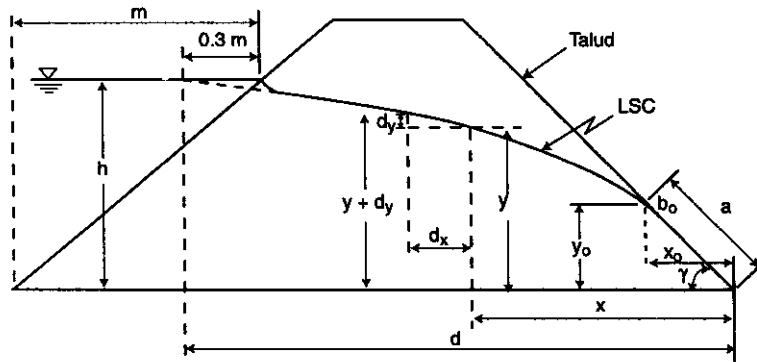


Figura 3.13 Consideraciones de Schaffernark y Van Iterson.

La solución a la ecuación (3.16), como ya se vio anteriormente, es la parábola dada por la ecuación 3.11:

$$\frac{q}{k}(d-x) = \frac{h^2 - y^2}{2} \quad (3.11)$$

Conociendo h y d , se puede obtener el valor de a en la figura 3.13 en función de γ , h y d ; para ello sustituyamos en la expresión anterior, para el punto de descarga b_0 , a $x = a \cos \gamma$, y $y = a \sin \gamma$, obteniéndose:

$$\frac{q}{k}(d - a \cos \gamma) = \frac{h^2 - a^2 \sin^2 \gamma}{2} \quad (3.17)$$

Por otro lado, aplicando la ecuación 3.16 en el punto b_0 se obtiene:

$$q = k y (dy/dx) = k a \sin \gamma \tan \gamma$$

$$q = ka \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} \quad (3.18)$$

LLevando la ecuación (3.18) a la (3.17), se obtiene:

$$a \frac{\text{sen}^2 \gamma}{\cos \gamma} (d - a \cos \gamma) = \frac{h^2 - a^2 \text{sen}^2 \gamma}{2}$$

Arreglando y eliminando términos se obtiene:

$$a^2 - 2a \frac{d}{\cos \gamma} + \frac{h^2}{\text{sen}^2 \gamma} = 0 \quad (3.19)$$

y consecuentemente, de la ecuación anterior se obtiene:

$$a = \frac{d}{\cos \gamma} - \sqrt{\frac{d^2}{\cos^2 \gamma} - \frac{h^2}{\text{sen}^2 \gamma}} \quad (3.20)$$

Finalmente de la ecuación (3.16) para $y=y_0$ se tiene:

$$q = k y_0 \text{ tan} \gamma = k a \text{ sen} \gamma \text{ tan} \gamma \quad (3.21)$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de "fórmula o método de la tangente". Una de las ventajas de este método es la posibilidad de determinar directamente en forma gráfica la distancia "a", mediante el procedimiento mostrado en la figura 3.14 y que se describe a continuación:

- 1.- Prolongar el talud de aguas abajo para encontrar en el punto A la intersección con la vertical que pasa por el tercio medio de la distancia m.
- 2.- Trazar el semicírculo que tiene como diámetro la distancia AE.
- 3.- Prolongar la línea de superficie libre del agua hacia la derecha hasta encontrar la intersección B con el talud aguas abajo.
- 4.- Haciendo centro en el punto E con compás, trazar el semicírculo BC.
- 5.- Haciendo centro en A trazar con el compás el semicírculo CD, la distancia "a" será precisamente la distancia DE.

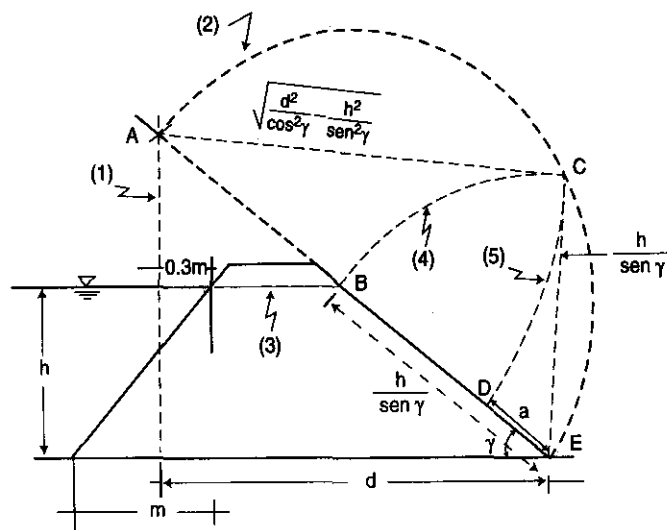


Figura 3.14 Determinación gráfica de "a" usando el método de la tangente.

3.3.2 Método del seno

Solución aproximada para $\gamma \leq 60^\circ$

Cuando se tiene pendientes mayores a 30° en el talud aguas abajo, los errores que se cometen al emplear como gradiente hidráulico promedio el valor dado por Dupuit ($i = dy/dx$), son muy significativos; una mejor aproximación es utilizar, como gradiente promedio, el gradiente de la línea superior de corriente, es decir: $i = dy/ds$ (ver fig. 3.15); a este procedimiento se le conoce como método del seno.

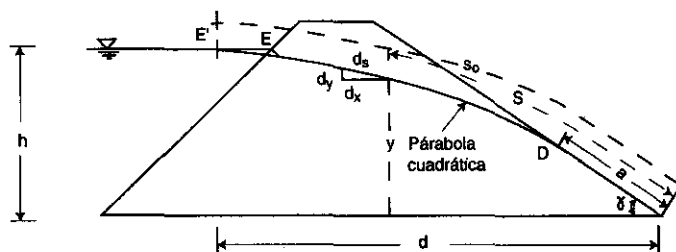


Figura 3.15 Consideración gráfica en el método de seno.

La siguiente tabla muestra las diferencias que puede haber en los valores de la tangente y el seno para algunas pendientes.

PENDIENTE	TANGENTE	SENO
30°	0.577	0.500
60°	1.732	0.866
90°	∞	1.000

La tabla anterior muestra que para fines prácticos los valores del seno y la tangente son iguales cuando $\gamma \leq 30^\circ$, no así cuando $\gamma > 30^\circ$.

Considerando entonces como $i=dy/ds$, el valor del gasto será:

$$q = k \text{ y } (dy/ds) \quad (3.22)$$

Para el punto D de descarga en la figura 3.15 esta ecuación será:

$$q = k a \text{ sen} \gamma \text{ sen} \gamma = k a \text{ sen}^2 \gamma$$

Es decir,

$$\text{y } dy/ds = a \text{ sen}^2 \gamma$$

Separando variables tendremos:

$$\text{y } dy = a \text{ sen}^2 \gamma ds$$

Integrando:

$$\frac{y^2}{2} = a \text{ sen}^2 \gamma S + C \quad (3.23)$$

El valor de la constante C se determina a partir de las condiciones de frontera, es decir, para: $y=h$, $S=S_0$.

Llevando estos valores a la ecuación 3.23, se obtiene:

$$C = \frac{h^2}{2} - a \text{ sen}^2 \gamma S_0 \quad (3.24)$$

Llevando (3.24) a (3.23) se obtiene:

$$y^2 = 2a \operatorname{sen}^2 \gamma S + h^2 - 2a \operatorname{sen}^2 \gamma S_0 \quad (3.25)$$

Para $y = a \operatorname{sen} \gamma$ y $S = a$, la ecuación anterior queda:

$$a^2 - 2S_0 a + \frac{h^2}{\operatorname{sen}^2 \gamma} = 0 \quad (3.26)$$

de donde se obtiene que:

$$a = S_0 - \sqrt{S_0^2 - \frac{h^2}{\operatorname{sen}^2 \gamma}} \quad (3.27)$$

y el gasto es:

$$q = k a \operatorname{sen}^2 \gamma \quad (3.28)$$

La distancia "a" se puede determinar gráficamente como se muestra en la figura 3.16. Esta figura se obtiene de manera semejante a la fig. 3.14, sólo que como primer paso se selecciona el punto C de manera arbitraria (como primer tanteo) y se determina el punto D haciendo el giro BD desde C; los demás pasos son similares a los de la fig. 3.14. Si el punto F resulta muy diferente al punto inicial C, el procedimiento se repite hasta que dichos puntos sean más o menos coincidentes.

Como se puede ver en la figura 3.16, se está tomando como $(S_0 - a)$ la distancia CB; el error que se comete es pequeño. De hecho, para ángulos $\gamma \leq 60^\circ$, es perfectamente tolerable sustituir S_0 por la recta \overline{AB} eliminando el procedimiento de tanteos.

Cuando se admiten desviaciones hasta del 25%, la simplificación de hacer $S_0 = \overline{AB}$ es válida aún para el caso de $\gamma = 90^\circ$; para este caso se tiene:

$$\overline{AB} = \sqrt{h^2 + d^2},$$

$$S_0 = \sqrt{h^2 + d^2}$$

$$a = S_0 - \sqrt{S_0^2 - h^2}$$

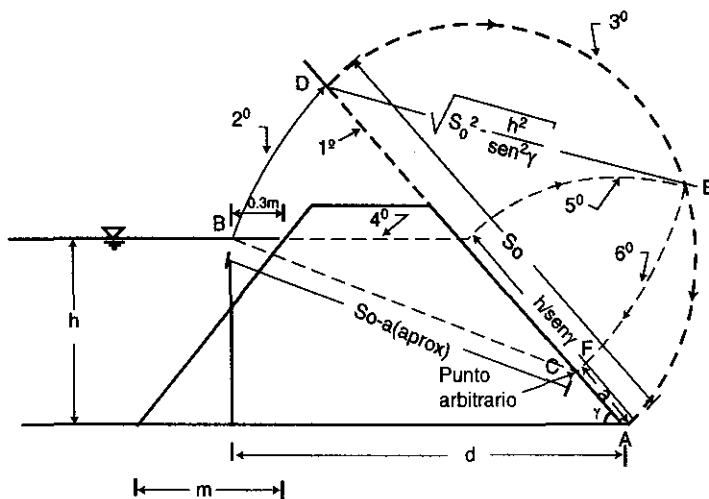


Figura 3.16 Procedimiento gráfico para determinar "a" usando el método del seno.

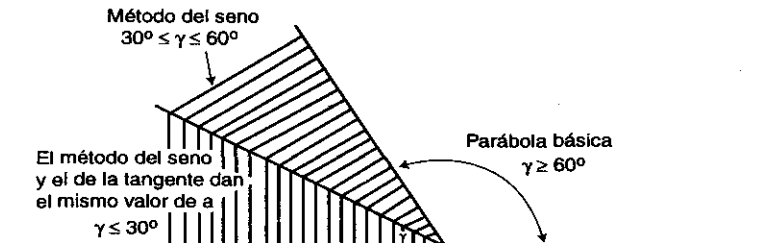


Figura 3.17 Resumen de los ángulos γ para los cuales se recomienda usar los métodos del seno, la tangente o la parábola básica.

pero:

$$S_0 = \sqrt{h^2 + d^2}$$

y sustituyendo en la ecuación previa nos queda:

$$a = \sqrt{d^2 + h^2} - \sqrt{d^2 + h^2 - h^2};$$

por tanto:

$$a = \sqrt{d^2 + h^2} - d$$

Este último valor es igual a y_0 , es decir, el punto donde la parábola de Kozeny intersecta la vertical (y ya sabemos que la línea superior de corriente en este caso pasa 26% más abajo de esa distancia). Debe señalarse, sin embargo, que el método del seno es práctico cuando $30^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$. Para mayores valores de γ se recomienda utilizar la parábola básica. La figura 3.17 presenta un resumen del empleo de estos métodos.

3.3.3 Factores de forma en las fórmulas de Dupuit y la parábola básica

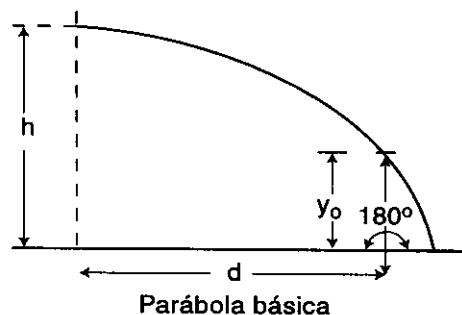
Es conveniente observar que si uno quiere analizar la fórmula de Dupuit o la parábola básica para determinar el gasto mediante la expresión usada en una red de flujo, esto se puede hacer simplemente determinando el factor de forma en cada fórmula correspondiente. Así, por ejemplo, si consideramos la ecuación de Dupuit para el caso de no tener tirante aguas abajo, se tiene:

$$q = k \frac{h^2}{2d} = kh \frac{h}{2d} = kh \frac{n_f}{n_e} = kh\$ \quad (\text{ver Ec. 2.8})$$

Puesto que en la red de flujo se tiene que el gasto está dado por: $q=kh\$$, se deduce que en la fórmula anterior el factor de forma es:

$$\$ = h/2d$$

Para el caso de la parábola básica ($\gamma=180^\circ$), se tiene:



$$q = ky_0 = k(\sqrt{d^2 + h^2} - d)$$

$$q = kh(\sqrt{d^2/h^2 + 1} - d/h)$$

En este caso el factor de forma es:

$$\$ = \sqrt{d^2/h^2 + 1} - d/h$$

La siguiente tabla muestra estos factores de forma para dos valores de h :

	DUPUIT	PARÁBOLA BÁSICA
	$\gamma = 90^\circ$	$\gamma = 180^\circ$
\$ para $h = d$	0.5	0.41
\$ para $h = d/10$	0.05	0.05

En el análisis de la tabla anterior se puede ver que para $h=d$ ($h/d = 1$) la fórmula de Dupuit da una razonable aproximación y para valores más pequeños de h/d dicha fórmula es rigurosa.

Se analizará ahora el factor de forma para el caso mostrado en la figura 3.18, en el cual la superficie libre de descarga hace contacto con la superficie libre del agua. De la fórmula $q = kh (n_f/n_e)$, para este caso se tiene:

$$q = kh \frac{h/a}{d/a} = kh^2/d$$

y el factor de forma en este caso es:

$$\$ = h/d$$

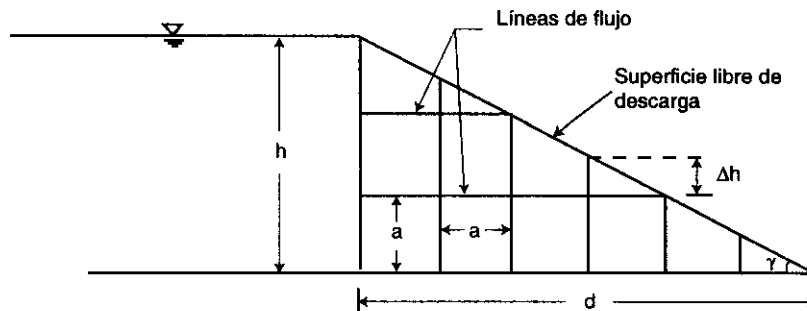


Figura 3.18 Caso particular en que la línea de superficie libre de descarga interseca la superficie libre del agua.

El factor de forma para la fórmula del seno (ver Ec. 3.28) es:

$$\$ = \frac{a}{h} \operatorname{sen}^2 \gamma \quad (3.29)$$

Para

$$S_0 = \sqrt{h^2 + d^2}$$

de la ecuación (3.27) se obtiene:

$$a = S_0 - \sqrt{S_0^2 - \frac{h^2}{\operatorname{sen}^2 \gamma}} = \sqrt{h^2 + d^2} - \sqrt{h^2 + d^2 - \frac{h^2}{\operatorname{sen}^2 \gamma}} \quad (3.30)$$

Llevando (3.30) a (3.29) se tendrá:

$$\$ = \left(\sqrt{1 + d^2/h^2} - \sqrt{1 + \frac{d^2}{h^2} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \gamma}} \right) \operatorname{sen}^2 \gamma \quad (3.31)$$

En esta última expresión se puede ver que \$ es función del ángulo γ y que d/h debe ser mayor que un cierto valor para que el segundo término de la raíz cuadrada no sea imaginario.

De manera semejante, tomando en cuenta que en la fórmula de la tangente (ver Ec. 3.21):

$$q = k a \operatorname{sen} \gamma \tan \gamma$$

donde:

$$a = \frac{d}{\cos \gamma} - \sqrt{\frac{d^2}{\cos^2 \gamma} - \frac{h^2}{\operatorname{sen}^2 \gamma}} \quad (3.20)$$

el factor de forma en este caso es:

$$\$ = \frac{a \operatorname{sen} \gamma \tan \gamma}{h} \quad (3.32)$$

Llevando la ecuación (3.20) a la (3.32) y simplificando términos se obtiene:

$$S = \left(\frac{d}{h} \tan \gamma - \sqrt{\frac{d^2}{h^2} \tan^2 \gamma - 1} \right) \tan \gamma \quad (3.33)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (3.31) y (3.33), se obtiene la siguiente tabla donde se indican los valores mínimos de h/d para que los factores de forma no sean imaginarios, y los valores máximos del S para varios ángulos; esta tabla se utilizó para dibujar la gráfica de la figura 3.19, en la cual se indica, a manera de ejemplo, los datos del primer renglón de la fórmula de la tangente.

γ	FÓRMULA DE LA TANGENTE		FÓRMULA DEL SENO	
	valores mín. de d/h	valores máx. de S	valores mín. de d/h	valores máx. de S
70°	0.363	2.747	0.363	0.940
60°	0.580	1.760	0.577	0.866
45°	1.000	1.000	1.000	0.707
30°	1.730	0.580	1.732	0.500
20°	2.747	0.350	2.747	0.342

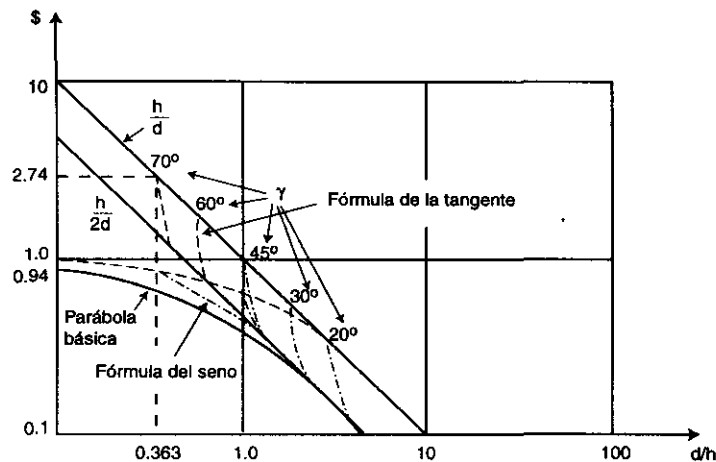


Figura 3.19 Factores de forma versus d/h de acuerdo con las diversas fórmulas.

3.4 Condiciones de transferencia cuando existe cambio de permeabilidad

Cuando existen materiales isotrópicos con diferentes permeabilidades en una presa, las líneas de flujo y las equipotenciales experimentan deflexiones en la frontera de estos materiales, de manera tal, que entre cada dos líneas de flujo pase la misma cantidad de gasto en ambos lados de la frontera. Por ejemplo, haciendo referencia a la siguiente figura, donde las líneas de flujo están trazadas a una escala tal que aparecen como rectas, se obtiene la siguiente igualdad:

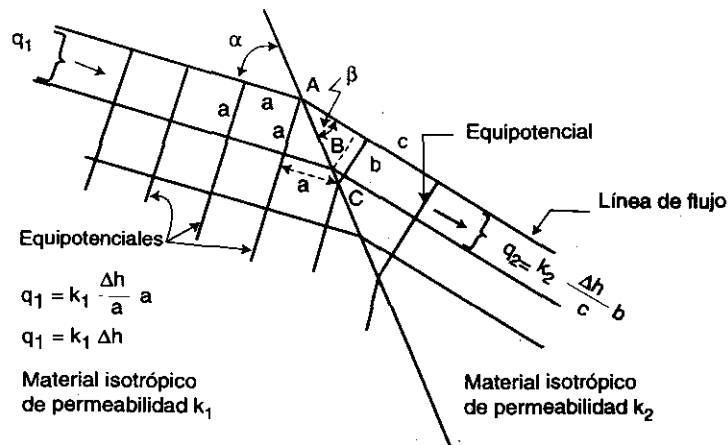


Figura 3.20 Transferencia de las líneas de flujo y equipotenciales al pasar de un material con permeabilidad k_1 , a otro con permeabilidad k_2 .

$$k_1 \Delta h = k_2 (\Delta h/c)b$$

Consecuentemente se obtiene:

$$k_1/k_2 = b/c \quad (3.34)$$

De la misma figura se obtiene que:

$$\overline{AC} = a / \cos \alpha = c / \cos \beta \quad (3.35)$$

$$y \quad \overline{AB} = a / \sin \alpha = b / \sin \beta \quad (3.36)$$

Dividiendo la (3.35) entre la (3.36) se tiene:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha} = \frac{\text{sen}\beta}{\text{cos}\beta} \frac{c}{b}$$

o sea:

$$\tan \alpha / \tan \beta = c / b \quad (3.37)$$

Llevando ahora la Ec. (3.34) a la Ec. (3.37) se obtiene:

$$\tan \alpha / \tan \beta = k_2 / k_1 \quad (3.38)$$

O sea que el ángulo es inversamente proporcional a la permeabilidad; dicho en otras palabras, el ángulo mayor corresponde al lado donde la permeabilidad es menor; en el caso de la figura anterior, $k_1 < k_2$ y $\alpha > \beta$.

De las ecuaciones (3.34) y (3.38) se puede decir que los cuadrados de un lado cambian a rectángulos en el otro lado con una relación de lados iguales a la relación de permeabilidades, y que los canales de flujo más anchos corresponden al lado donde la permeabilidad es menor. De la figura anterior (fig. 3.20) se puede observar que los ángulos α y β quedan en cuadrantes opuestos.

Tomando en cuenta la relación c/b dada por la ecuación (3.34), se puede hacer el siguiente truco para dibujar la red de flujo. Si por ejemplo, se tiene que $k_2 = 3k_1$, la relación c/b resulta igual a 3; o sea se tendrá, en el caso de un canal horizontal, un rectángulo como el mostrado por la fig. 3.21 a en el lado donde la permeabilidad es k_2 .

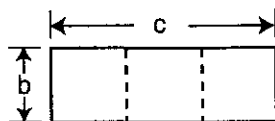


Figura 3.21 a Rectángulo que aparece en uno de los canales horizontales.

Al extender este rectángulo tres veces hacia abajo se tendrá un cuadrado perfecto, como el que se observa en la fig. 3.21 b.

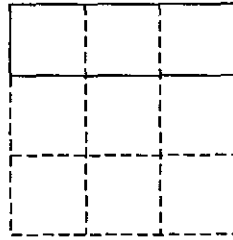


Figura 3.21 b Cuadro que resulta después de aumentar tres veces la dimensión b del rectángulo de la fig. 3.21 a.

Si se aplica este procedimiento de "extensión vertical" a todos los "rectángulos" que se obtienen en un problema de flujo de aguas como el mostrado en la fig. 3.22a, el resultado será el de una red compuesta por "cuadrados" como se muestra en la figura 3.22b.

Es importante señalar que el procedimiento indicado por la fig. 3.22 es sólo un truco para ver cómo son y qué forma tienen las redes de flujo; en realidad se puede dibujar la red sin este truco o artificio que no tiene fundamentación matemática alguna.

Cedergren sugiere otro método para encontrar las redes de flujo en zonas con diferente permeabilidad (apéndice A).

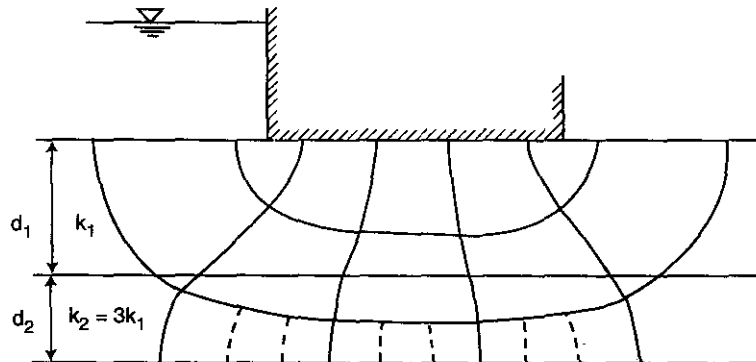


Figura 3.22 a Red de flujo a través de dos estratos de permeabilidad diferente.

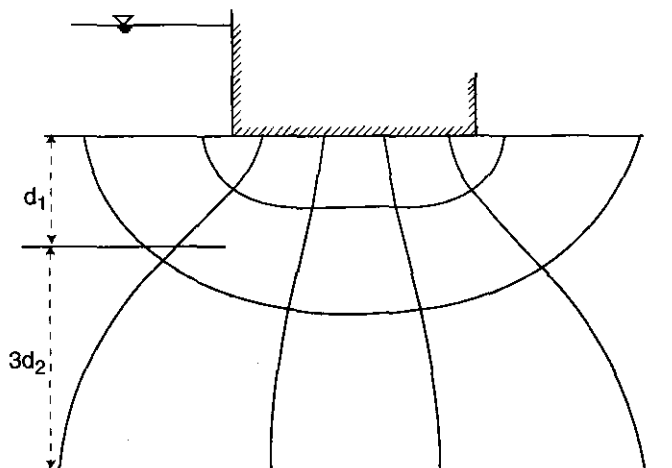


Figura 3.22 b Red de flujo constituida por cuadrados para auxiliarse en la construcción de la red correcta de la fig. 3.22 A.

3.4.1 Condiciones de transferencia de la línea superior de corriente

a) Para $\gamma < 90^\circ$

Caso 1: $k_1 > k_2$

Como se puede ver en la fig. 3.23, para el caso de que $k_1 > k_2$ resulta que $\Delta h_1 \neq \Delta h_2$, es decir: $\Delta h_1 > \Delta h_2$, y no hay manera de hacerlos igual (que sabemos es requisito para la línea superior de corriente a fin de tener iguales caídas de potencial), ya que $c > a$ y las pendientes de las líneas de flujo son mayores en el material 1 que en el material 2.

Caso 2: $k_1 < k_2$

En este caso, como se puede apreciar en la fig. 3.24, resulta que $\Delta h_1 < \Delta h_2$. Veamos entonces cuáles son las condiciones que se deben cumplir para que $\Delta h_1 = \Delta h_2$

De la figura 3.24 se tiene:

$$\Delta h_1 = a \operatorname{sen}(\gamma - \alpha) \quad (3.39)$$

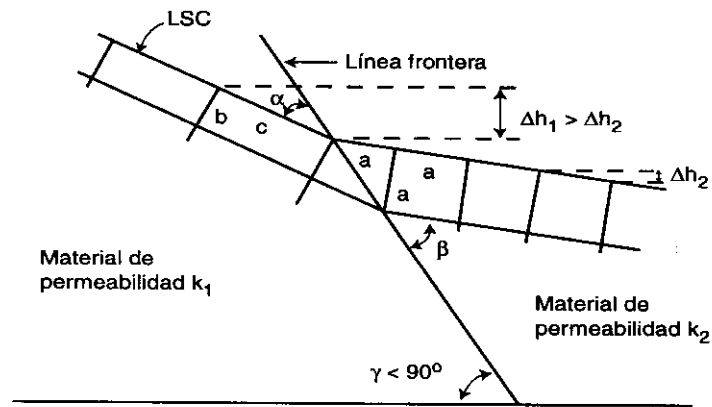


Figura 3.23 Deflexión de la línea superior de corriente para $\gamma < 90^\circ$ y $k_1 > k_2$.

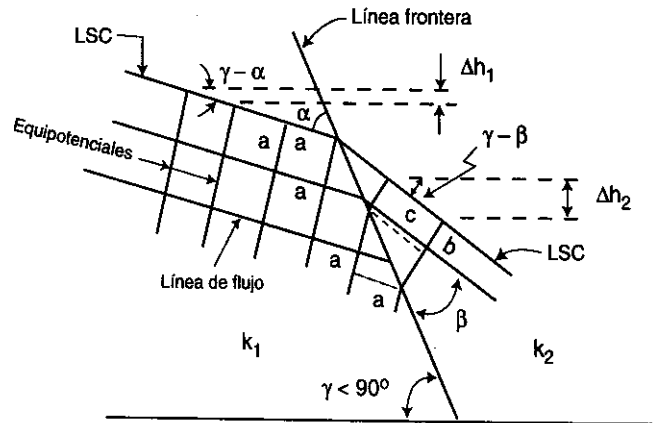


Figura 3.24 Deflexión de la línea superior de corriente para $\gamma < 90^\circ$ y $k_1 < k_2$.

$$\Delta h_2 = c \operatorname{sen}(\gamma - \beta) \quad (3.40)$$

Igualando las expresiones (3.39) y (3.40) se obtiene:

$$a \operatorname{sen}(\gamma - \alpha) = c \operatorname{sen}(\gamma - \beta) \quad (3.41)$$

Por otro lado se tiene que, de la misma figura,

$$a / \cos \alpha = c / \cos \beta \quad (3.42)$$

De las ecuaciones 3.41 y 3.42 se obtiene:

$$\text{sen}(\gamma - \alpha) \cos \alpha = \text{sen}(\gamma - \beta) \cos \beta \quad (3.43)$$

La única solución posible para la Ec. 3.43 es que:

$$\alpha = \beta \quad (3.44)$$

Ahora bien, se debe tomar en cuenta que la siguiente condición se debe también cumplir (vista anteriormente en la ecuación 3.38).

$$\tan \beta / \tan \alpha = k_1 / k_2 \quad (3.38)$$

Al considerar las expresiones (3.38) y (3.44) se tendrá un resultado incongruente, exceptuando los siguientes dos valores:

$$\begin{aligned} \alpha = \beta = 0 & \text{ (indeterminación de la ec. 3.38)} \\ \alpha = \beta = \gamma & \text{ (velocidad nula)} \end{aligned} \quad (3.45)$$

O sea, la línea superior de corriente puede pasar de un material a otro a través de su frontera, mediante una de las formas mostradas en la fig. 3.25

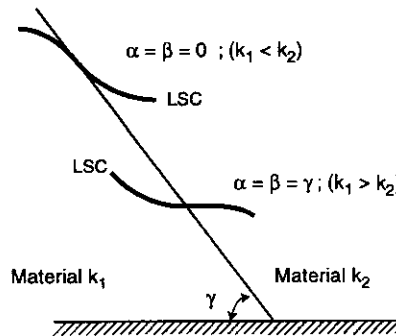


Figura 3.25 Formas posibles en que la línea superior de corriente puede cruzar la frontera entre dos materiales de permeabilidad diferentes, para $\gamma < 90^\circ$.

Este resultado de hecho ya se vio anteriormente cuando se estudiaron las condiciones de entrada y salida de la línea superior de corriente para $\gamma \leq 90^\circ$ (ver fig. 3.26 a y b).

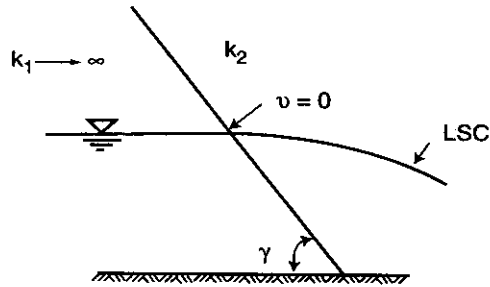


Figura 3.26 a Condición de entrada de la línea superior de corriente.

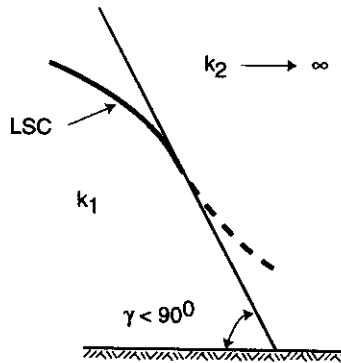


Figura 3.26 b Condición de salida de la línea superior de corriente para $\gamma < 90^\circ$.

b) Para $\gamma > 90^\circ$

En este caso se pueden tener los siguientes resultados, según sea el valor de k_1 con respecto a k_2 :

1.- La LSC entra por el cuadrante inferior

Como se puede observar en la figura 3.27, si la línea superior de corriente entra por el cuadrante inferior se puede lograr que $\Delta h_1 = \Delta h_2$; veamos ahora qué sucede si dicha línea entra por el cuadrante superior, para ello utilizaremos la fig. 3.28.

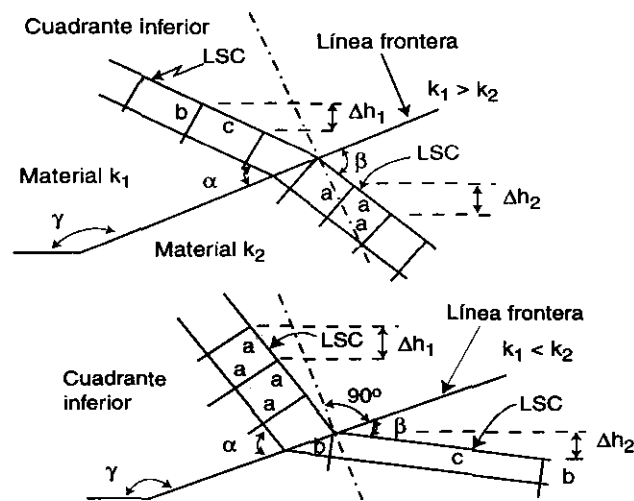


Figura 3.27 Entrada de la LSC por el cuadrante inferior $\gamma > 90^\circ$.

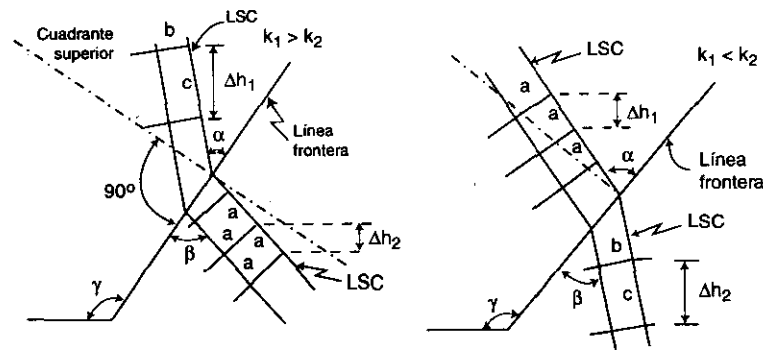


Figura 3.28 Entrada de la línea superior de corriente por el cuadrante superior $\gamma > 90^\circ$.

Como se puede observar en la fig. 3.28, este tipo de transferencia de la LSC por el cuadrante superior no es posible, pues siempre resulta que $\Delta h_1 \neq \Delta h_2$. Veamos cuáles son las condiciones que se deben cumplir para este caso haciendo uso de la fig. 3.29.

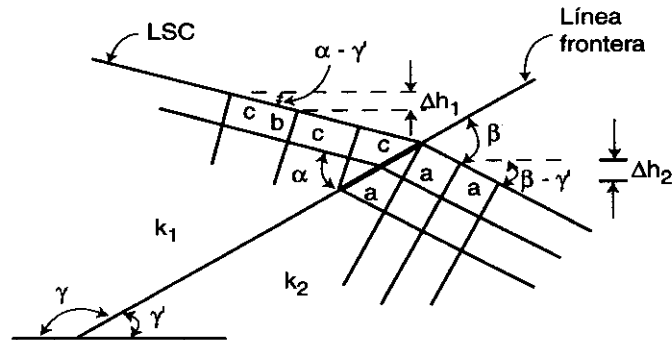


Figura 3.29 Cruce de la LSC a través de una frontera para $\gamma > 90^\circ$.

Puesto que $\Delta h_1 = \Delta h_2$, se obtiene:

$$c \operatorname{sen}(\alpha - \gamma) = a \operatorname{sen}(\beta - \gamma) \quad (3.46)$$

$$\text{y } a/\cos\beta = c/\cos\alpha ; \text{ o sea}$$

$$c/a = \cos\alpha/\cos\beta \quad (3.47)$$

Llevando la Ec. (3.47) a la Ec. (3.46) se obtiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \gamma) \cos\alpha = \operatorname{sen}(\beta - \gamma) \cos\beta$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha - \gamma)}{\operatorname{sen}(90^\circ - \beta)} = \frac{\operatorname{sen}(\beta - \gamma)}{\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)} \quad (3.48)$$

Para que esta igualdad se cumpla se debe tener:

$$\alpha - \gamma = 90^\circ - \beta \quad (3.49)$$

O sea, tendremos como primera condición:

$$\alpha + \beta = 90^\circ + \gamma \quad (3.50)$$

y la segunda condición es la que se había visto en la Ec. (3.38)

$$k_1/k_2 = \tan\beta/\tan\alpha \quad (2^\circ \text{ condición})$$

Una forma de determinar los ángulos α y β que cumplan ambos requisitos es la mostrada en la fig. 3.30. Esta figura se obtiene siguiendo la siguiente secuencia:

- 1.- A partir de la horizontal trazar una línea recta que forma un ángulo de $90^\circ + \gamma$.
- 2.- Llevar sobre esta línea los valores de k_1 y k_2 utilizando una escala adecuada de dibujo.
- 3.- Trazar un semicírculo con diámetro igual a k_1 y k_2 .
- 4.- A partir del punto donde termina k_2 y se inicie k_1 , trazar una línea horizontal hasta que intercepte el semicírculo trazado en el paso 3.
- 5.- Trazar una recta desde esta última intersección hasta el punto donde se trazó la línea que forme un ángulo de $90^\circ + \gamma$ con la horizontal (paso 1); denominar con la letra h la distancia entre los puntos de intersección de esta recta.

Los ángulos α y β serán respectivamente los formados por la línea trazada en el paso 5 y la horizontal, y entre dicha línea y la recta trazada en el paso 1.

Demostración:

Por triángulos semejantes se tiene:

$$k_1/h \tan \beta = k_2/h \tan \alpha \quad (3.51)$$

o sea:

$$k_1/k_2 = \tan \beta / \tan \alpha$$

La otra condición de $\beta + \alpha = 90^\circ + \gamma$ se satisface por la construcción en sí de la fig. 3.30.

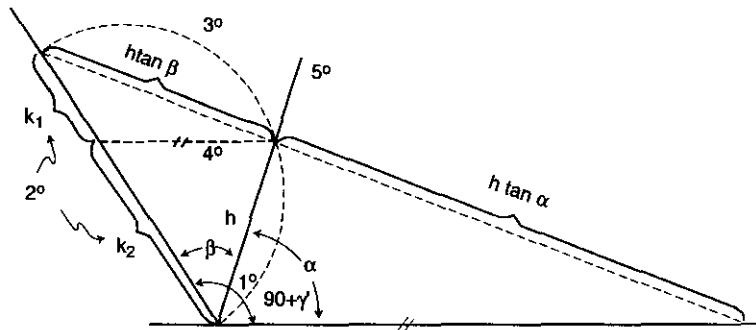


Figura 3.30 Determinación de los ángulos α y β gráficamente.

Se puede demostrar, y esta demostración se deja al lector como ejercicio, que la siguiente construcción mostrada en las figuras 3.31 y 3.32 es también válida y cumple con las dos condiciones antes señaladas.

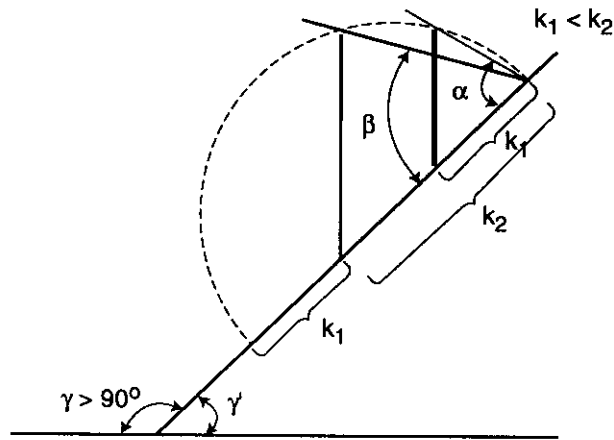


Figura 3.31 Gráfica para determinar los ángulos α y β cuando $k_1 < k_2$.

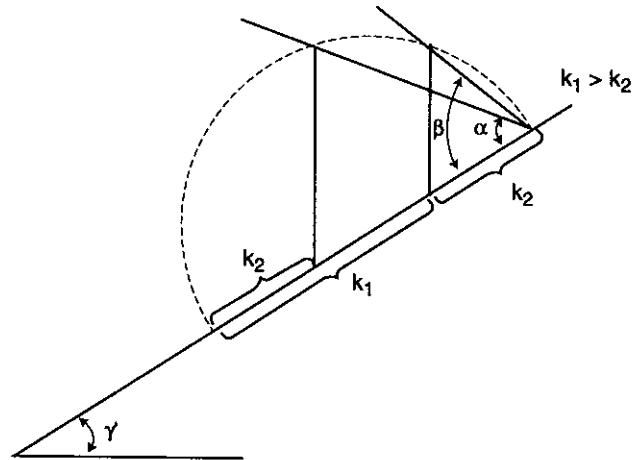


Figura 3.32 Gráfica para determinar los ángulos α y β cuando $k_1 > k_2$.

Como conclusión sobre cómo debe cruzar la LSC, una frontera donde $\gamma > 90^\circ$, se puede decir que dicho cruce sólo es posible por el cuadrante inferior, y dependiendo de si $k_1 > k_2$ ó $k_1 < k_2$, el mismo se efectúa como se muestra en la fig. 3.33.

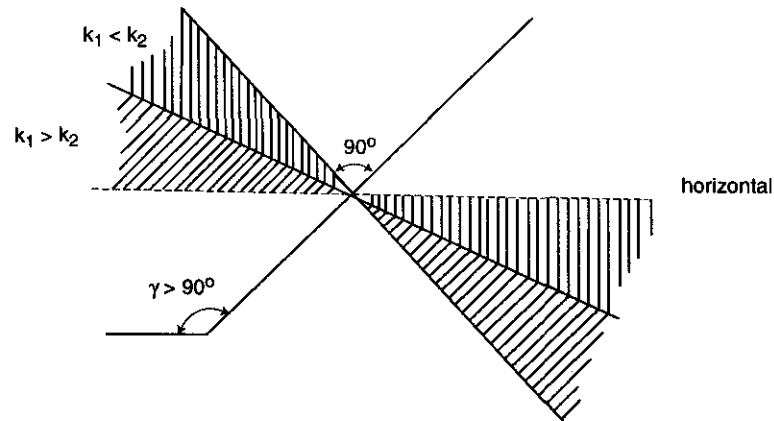


Figura 3.33 Zonas por donde puede cruzar la LSC, dependiendo de si k_1 es mayor o menor de k_2 .

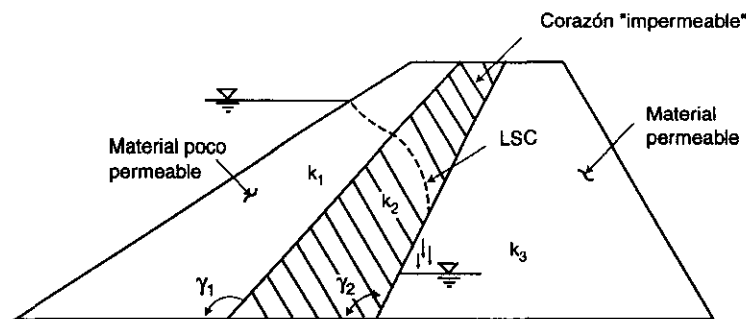


Figura 3.34 Ejemplo de LSC, cuando $\gamma > 90^\circ$.

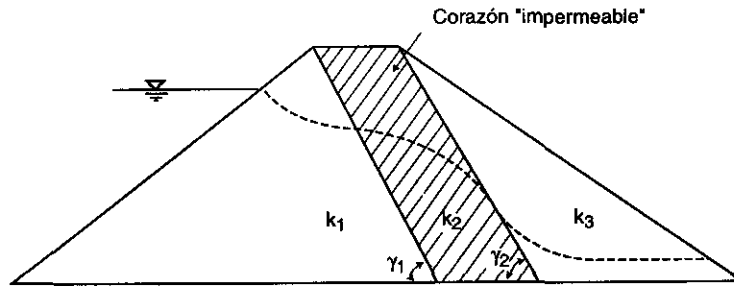


Figura 3.35 Ejemplo de cruce de la LSC, cuando $\gamma < 90^\circ$.

3.4.2 Cálculo del gasto en una sección compuesta

Haciendo referencia a la figura 3.36 y tomando en cuenta la fórmula de Dupuit, se obtiene que el gasto a través de cada material está dado por:

$$q_1 = k_1 \frac{h_1^2 - h_2^2}{2d_1} = \text{gasto a través del material 1} \quad (3.52)$$

y

$$q_2 = k_2 \frac{h_2^2}{2d_2} = \text{gasto a través del material 2} \quad (3.53)$$

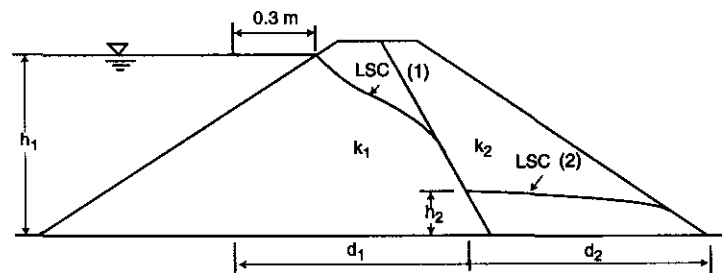


Figura 3.36 Sección compuesta por dos materiales de diferente permeabilidad.

Todos los valores de las expresiones (3.52) y (3.53) son conocidos, excepto el de h_2 ; sin embargo, dicha cantidad se puede obtener de igualar ambas expresiones, ya que el gasto q_1 debe ser igual a q_2 .

3.5 Flujo a través de suelos anisotrópicos y estratificados

3.5.1 Introducción

Hasta ahora se ha estudiado el flujo a través de suelos isotrópicos. Sin embargo, en la mayoría de los problemas prácticos se tiene una permeabilidad mayor en el sentido de la estratificación, en comparación con lo que se tiene en el sentido perpendicular a ella; la diferencia puede ser diez veces o más. Aún en el caso de suelos compactados, donde se procura la utilización de un equipo que trata de no formar estratigrafías, no es fácil eliminar totalmente dichas estratificaciones.

Por lo tanto, es muy importante indagar las características de permeabilidad que se tienen en la obra que se analiza y tomar en cuenta las variaciones que pueden haber en esta permeabilidad debido a la variación que puede existir en las propiedades de los materiales del banco que se está explotando o, simplemente, por la falta de un control adecuado en la compactación de esos materiales.

3.5.2 Determinación de la permeabilidad en cualquier dirección γ

Muchas veces se observará que la permeabilidad máxima ocurre en el sentido horizontal, mientras que la mínima ocurrirá en el sentido vertical. Haciendo referencia a la fig. 3.37, en cualquier otra dirección γ la velocidad está dada por:

$$V_{\gamma} = k_{\gamma} i_{\gamma}$$

donde:

k_{γ} es el coeficiente de permeabilidad en la dirección γ

i_{γ} es el gradiente hidráulico en la dirección γ , siendo γ el ángulo formado por la dirección del flujo con respecto al eje horizontal x .

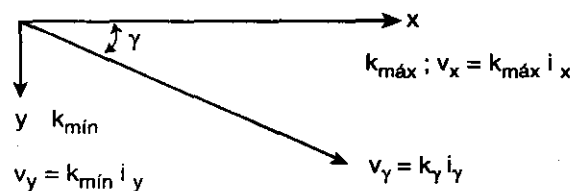


Figura 3.37 Variación de las velocidades en función de las permeabilidades y de los gradientes hidráulicos.

Lo anterior se ilustra mejor a través de la figura 3.38, donde se muestra la variación de la velocidad a lo largo de una línea de flujo. En ese ejemplo la permeabilidad en los sentidos X y Y son diferentes, y la velocidad en cualquier punto en el sentido del flujo está dada por V_y . Es por tanto importante determinar k_y en función de las cantidades k_x y k_y , que son las permeabilidades máxima y mínima, respectivamente, en el ejemplo de la fig. 3.38

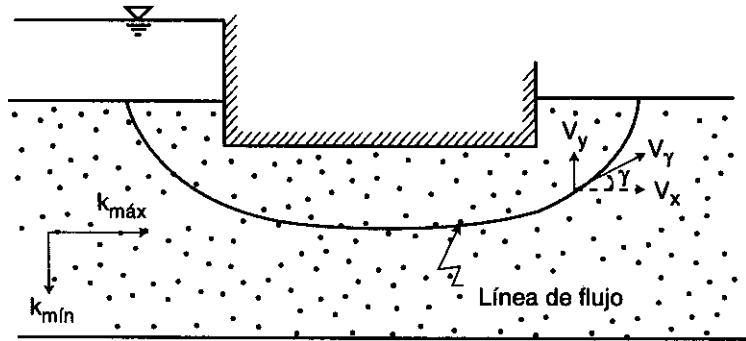


Figura 3.38 Ejemplo mostrando la variación de la velocidad de flujo a lo largo de una línea de flujo.

Consideremos que la carga h se puede representar como una función de las coordenadas X y Y, es decir, que se puede representar por una superficie no plana, de manera que los gradientes i_x , i_y e i_y queden representados, a su vez, por los vectores señalados en la figura 3.39.

De la figura 3.39 y tomando en cuenta que:

$$\partial h = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy \quad (3.54)$$

o también:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (3.55)$$

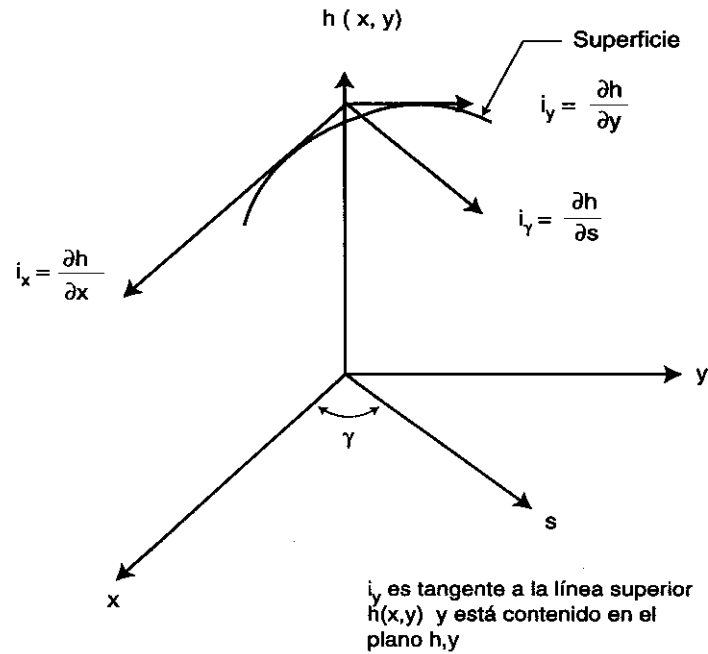


Figura 3.39 Representación gráfica de la carga $h(x,y)$ y del gradiente i_x , i_y e i_γ

se obtiene que:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial x} \cos \gamma + \frac{\partial h}{\partial y} \operatorname{sen} \gamma \quad (3.56)$$

es decir:

$$i_\gamma = i_x \cos \gamma + i_y \operatorname{sen} \gamma \quad (3.57)$$

y puesto que:

$$i_\gamma = \frac{V_\gamma}{k_\gamma}, i_x = \frac{V_x}{k_x}, i_y = \frac{V_y}{k_y} \quad (3.58)$$

sustituyendo en la ecuación 3.57 se tiene:

$$\frac{V_\gamma}{k_\gamma} = \frac{V_x}{k_{\text{máx}}} \cos \gamma + \frac{V_y}{k_{\text{mín}}} \text{sen} \gamma \quad (3.59)$$

Sin embargo, puesto que $V_y = V_\gamma \text{sen} \gamma$ y $V_x = V_\gamma \cos \gamma$ (ver fig. 3.40), y llevando estas expresiones a la ecuación (3.59), se tiene:

$$\frac{1}{k_\gamma} = \frac{\cos^2 \gamma}{k_{\text{máx}}} + \frac{\text{sen}^2 \gamma}{k_{\text{mín}}} \quad (3.60)$$

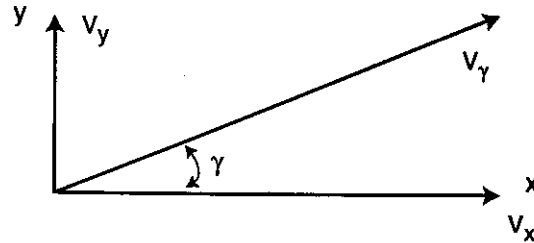


Figura 3.40 Determinación de V_x y V_y en función de V_γ

Esta función k_γ tiene la representación gráfica mostrada por la figura 3.41.

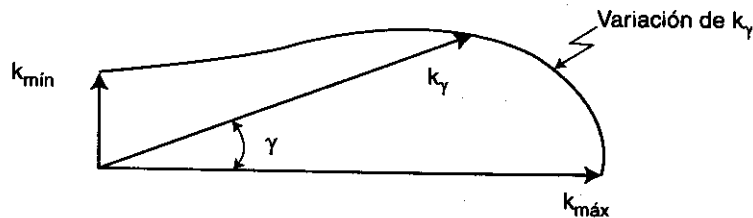


Figura 3.41 Variación de k_γ en función $k_{\text{mín}}$, $k_{\text{máx}}$ y el ángulo γ .

Nabor Carrillo demostró que la raíz cuadrada de esta función k_γ está representada por una elipse, según se puede observar en la figura 3.42.

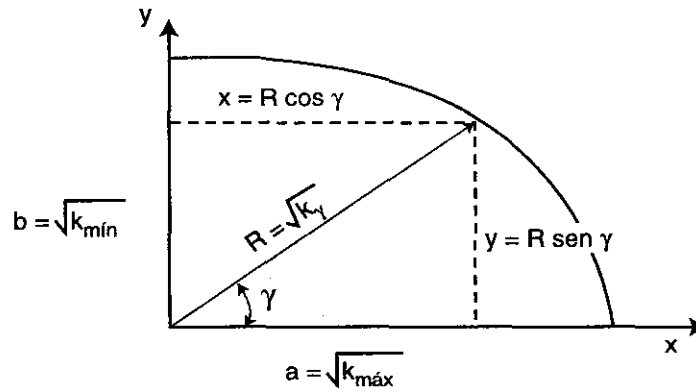


Figura 3.42 Representación gráfica de $\sqrt{k_\gamma}$.

En efecto, considerando que:

$$\begin{aligned} \cos\gamma &= x/R \\ y & \\ \text{sen}\gamma &= y/R \end{aligned} \quad (3.61)$$

y sustituyendo en la ecuación (3.60), se tiene:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{x^2}{R^2} \frac{1}{a^2} + \frac{y^2}{R^2} \frac{1}{b^2} \quad (3.62)$$

Eliminando R^2 queda finalmente:

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

que es la ecuación de la elipse.

3.5.3 Flujo a través de suelos anisotrópicos

El problema del flujo a través de suelos anisotrópicos fue investigado primeramente por Samsioe, en 1930, utilizando para ello las transformaciones o funciones transformadas. Mediante su empleo, y variando simplemente la escala en una de las direcciones, tal y como se muestra en la figura 3.43, se puede, por ejemplo, convertir una circunferencia en una elipse o viceversa.

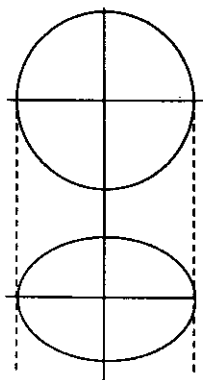


Figura 3.43 Transferencia de un círculo en un elipse mediante la reducción del eje vertical.

Se puede demostrar (apéndice B) que mediante el empleo del factor de transformación:

$$F_r = \sqrt{k_{\text{mín}} / k_{\text{máx}}}$$

donde F_r = factor de reducción,

aplicado en la reducción de todas las dimensiones en la dirección de $k_{\text{máx}}$, o mediante

$$F_a = \sqrt{k_{\text{máx}} / k_{\text{mín}}}$$

donde F_a = factor de amplificación,

aplicado en la amplificación de todas las dimensiones en la dirección de $k_{\text{mín}}$, el problema de flujo en suelos anisotrópicos se reduce a la solución de la ecuación de Laplace

(Ec. 2.3). Es decir, que la red de flujo dibujada en la sección transformada, tiene las mismas características señaladas anteriormente para suelos isotrópicos en cuanto a las líneas equipotenciales y las líneas de flujo se refiere.

Una vez que se determinó la línea superior de corriente y toda la red de flujo en la sección transformada, hay que regresar a la sección real (original) a fin de proyectar allí la red de flujo señalada; en dicha proyección las líneas de flujo y las equipotenciales no se intersectan en ángulos rectos, excepto en las líneas frontera que son paralelas a la dirección donde la permeabilidad k es máxima o mínima.

Es importante señalar que para determinar el gradiente hidráulico en cualquier punto o la magnitud de las fuerzas de flujo, es necesario utilizar la red de flujo proyectada en la sección real; sin embargo, si se desea sólo conocer la distribución de la presión de poro o la cantidad de flujo de agua, se puede utilizar directamente la red obtenida en la sección transformada. Para el logro de este último (determinación de la cantidad de flujo) se debe utilizar como coeficiente de permeabilidad el valor de:

$$\bar{k} = \sqrt{k_{\min} \cdot k_{\max}}$$

Demostremos lo anterior basándonos en la figura 3.44.

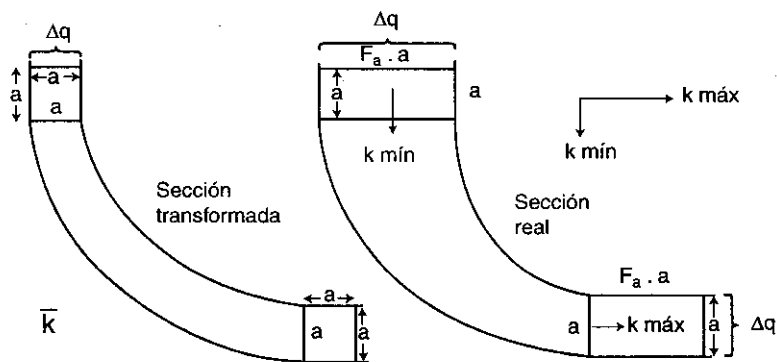


Figura 3.44 a Canal de flujo dibujado en la sección transformada.

Figura 3.44 b Canal de flujo dibujado en la sección real.

Consideramos el flujo a través del canal dibujado en la sección transformada (constituida por cuadrados), se obtiene que el gasto es igual a:

$$\Delta q = \bar{k} \frac{\Delta h}{a} a = \bar{k} \Delta h \quad (3.63)$$

Por otro lado, el gasto a través del canal dibujado en la sección real es igual a:

$$\Delta q = k_{\min} (\Delta h/a) F_a a \quad (3.64)$$

$$\text{o bien } \Delta q = k_{\max} (\Delta h/F_a a) a \quad (3.65)$$

Por lo tanto, igualando las ecuaciones (3.63) y (3.64) se obtiene

$$\bar{k} \Delta h = k_{\min} \Delta h \times F_a$$

de donde resulta:

$$F_a = \frac{\bar{k}}{k_{\min}} \quad (3.66)$$

y puesto que en este caso el factor F es igual al factor de amplificación, es decir,

$$F_a = \sqrt{\frac{k_{\max}}{k_{\min}}} \quad (3.67)$$

sustituyendo (3.67) en (3.66) y despejando \bar{k} se tiene que:

$$\bar{k} = \sqrt{k_{\max} k_{\min}}$$

Las figuras 3.45 y 3.46 ilustran algunos ejemplos de redes de flujo en secciones transformadas y en secciones reales.

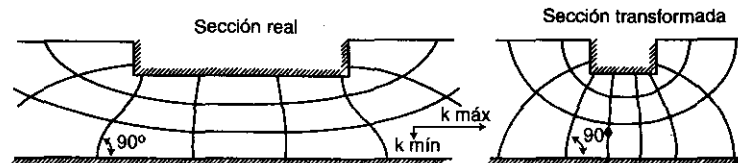


Figura 3.45 Ejemplo de red de flujo en una sección transformada donde el factor de reducción fue de 1/3 ($F_r = \sqrt{k_{\min} / k_{\max}} = \sqrt{1/9}$).

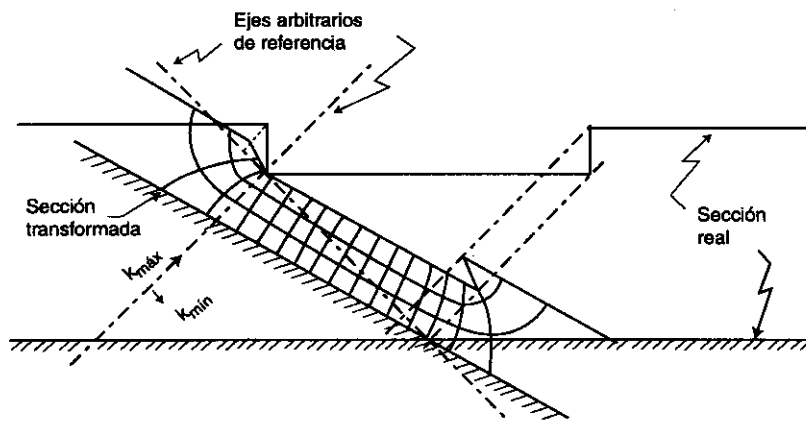


Figura 3.46 Sección transformada correspondiente a un estrato permeable, en el cual la permeabilidad máxima no es horizontal y $k_{máx}/k_{mín} = 9$.

Es importante enfatizar que se necesita regresar a la sección original sólo cuando se requiere encontrar las fuerzas de flujo, pero no así cuando se requiere determinar el gasto, ya que este se puede determinar directamente de la sección transformada.

Veamos ahora la diferencia que puede haber en la línea superior de corriente cuando se tiene una sección de material anisotrópico en comparación con la de un material isotrópico; esto equivale a ver la diferencia entre cuidar que no exista anisotropía y el tener estratificación.

Como se puede ver en la figura 3.47, la anisotropía puede causar problemas de estabilidad en el talud aguas abajo. En la figura se puede observar que, a pesar de que la presa tiene taludes estables, al tener anisotropía el filtro resulta inadecuado para proteger el talud aguas abajo.

Como se puede ver en los ejemplos anteriores, el caso anisotrópico resulta más desfavorable. Para estar del lado de la seguridad, A. Casagrande recomendaba suponer como mínimo $k_h/k_v > 4$.

3.5.4 Empleo de la transformada para suelos estratificados y anisotrópicos

Cuando se tienen suelos estratificados el problema se puede transformar en un problema de suelos anisotrópicos, donde se tiene un $k_{máx}$ en el sentido de la estratificación y

un k_{\min} en el sentido perpendicular a ésta; el problema anisotrópico, a su vez, se puede resolver mediante la sección transformada, como un problema isotrópico.

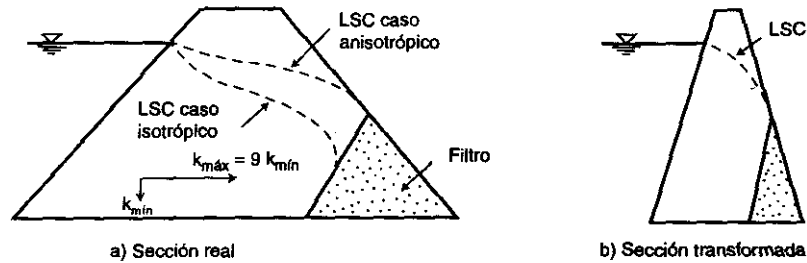


Figura 3.47 Efecto de la anisotropía en la línea superior de corriente.

La solución del flujo a través de suelos estratificados se puede obtener a partir de las figuras 3.48 y 3.49, donde las permeabilidades k_1 y k_2 son diferentes; veamos pues cuáles serían los valores correspondientes de k_{\max} y k_{\min} del medio anisotrópico.

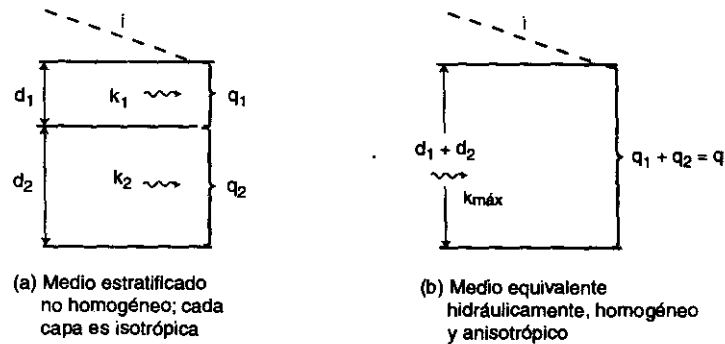


Figura 3.48 Flujo horizontal.

Si hacemos referencia a las figuras 3.48a y 3.48b, y consideramos por el momento sólo el flujo paralelo a la estratificación, al determinar el gasto entre dos secciones relativamente cercanas para tener una misma variación del gradiente hidráulico i , se obtiene:

$$q_1 + q_2 = q$$

Aplicando la ley de Darcy a la expresión anterior tendremos:

$$k_1 i d_1 + k_2 i d_2 = k_{\text{máx}} i (d_1 + d_2) \quad (3.68)$$

Despejando $k_{\text{máx}}$ de la ecuación (3.68) se obtiene:

$$k_{\text{máx}} = \frac{k_1 d_1 + k_2 d_2}{d_1 + d_2} \quad (3.69)$$

y generalizando para n estratos se obtiene:

$$k_{\text{máx}} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i d_i}{\sum_{i=1}^n d_i} \quad (3.70)$$

Veamos ahora el flujo en el sentido perpendicular a la estratificación (ver fig. 3.49), donde h_1 es la diferencia de carga que permite que haya flujo a través del estrato 1, y h_2 es la diferencia de carga que hace posible que haya flujo en el sentido perpendicular al estrato 2.

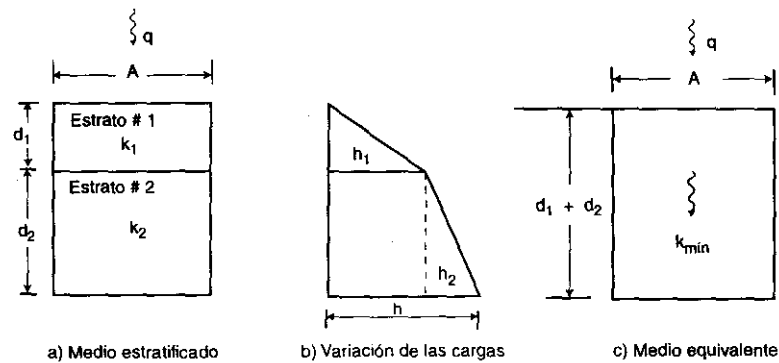


Figura 3.49 Flujo vertical.

De la figura 3.49 se obtiene que la carga total h está dada por:

$$h = h_1 + h_2 \quad (3.71)$$

Como el gasto vertical que pasa por cada estrato debe ser el mismo, se obtiene, de la figura 3.49a:

$$q = k_1 (h_1/d_1) A, \text{ de donde: } h_1 = qd_1/Ak_1 \quad (3.72)$$

$$q = k_2(h_2/d_2) A, \text{ o sea } h_2 = qd_2/Ak_2 \quad (3.73)$$

y de la figura 3.49C:

$$q = k_{\text{mín}} \frac{h}{d_1 + d_2} A, \text{ es decir } h = \frac{q}{A} \frac{d_1 + d_2}{k_{\text{mín}}} \quad (3.74)$$

llevando las ecuaciones 3.72, 3.73 y 3.74 a la ecuación 3.71 se obtiene:

$$\frac{d_1 + d_2}{k_{\text{mín}}} = \frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2} \quad (3.75)$$

y despejando $k_{\text{mín}}$ resulta:

$$k_{\text{mín}} = \frac{d_1 + d_2}{\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2}} = \frac{(d_1 + d_2)k_1k_2}{d_1k_2 + d_2k_1} \quad (3.76)$$

Generalizando la ecuación anterior se obtiene:

$$k_{\text{mín}} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{k_i}} \quad (3.77)$$

Ejemplo: sean dos estratos de espesor igual a un metro y $k_1 = 10^{-5}$ m/seg y $k_2 = 10^{-3}$ m/seg; para este caso:

$$k_{\text{máx}} = \frac{\sum kd}{\sum d} = \frac{10^{-3} + 10^{-5}}{2} \frac{\text{m}}{\text{seg}} = \frac{1.01 \times 10^{-3}}{2} \frac{\text{m}}{\text{seg}} = 5 \times 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

$$k_{\min} = \frac{\sum d}{\sum \frac{d}{k}} = \frac{2}{\frac{1}{10^{-3}} + \frac{1}{10^{-5}}} \frac{\text{m}}{\text{seg}} = 2 \times 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

obsérvese de los resultados de este ejemplo que el estrato más permeable es el que gobierna el flujo en el sentido donde k es máxima, mientras que el menos permeable gobierna el flujo en el sentido perpendicular.

Resumiendo: cuando se tienen varias estratificaciones se usan las fórmulas 3.70 y 3.77 para obtener k_{\max} y k_{\min} respectivamente, y luego se usa una transformación para el material anisotrópico que resulte. Dice A. Casagrande: "Se debe tratar de simplificar todos los problemas que se tienen en mecánica de suelos aplicada."

3.5.5 Determinación del coeficiente de permeabilidad en una determinada dirección, para un medio estratificado

Supongamos que tenemos dos estratos de espesores d_1 y d_2 , y permeabilidades k_1 y k_2 respectivamente, como se muestra en la figura 3.50: si lo que nos interesa es determinar el valor de k en la dirección γ , podemos suponer que a través de estos dos estratos pasa un tubo (o canal) en la forma como se muestra en la misma figura, de manera que en la interfase los ángulos α y β cumplen con la condición de frontera antes establecida; entonces, como ya se había señalado anteriormente, se tiene:

$$h = h_1 + h_2 \quad (3.78)$$

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{k_2}{k_1} \quad (\text{ver Ec. 3.38}) \quad (3.79)$$

De la figura 3.50 se puede ver que:

$$\frac{d_1}{\tan \alpha} + \frac{d_2}{\tan \beta} = C \cos \gamma \quad (3.80)$$

llevando (3.79) a (3.80) se obtiene:

$$\frac{1}{\tan \alpha} \left(d_1 + d_2 \frac{k_2}{k_1} \right) = C \cos \gamma \quad (3.81)$$

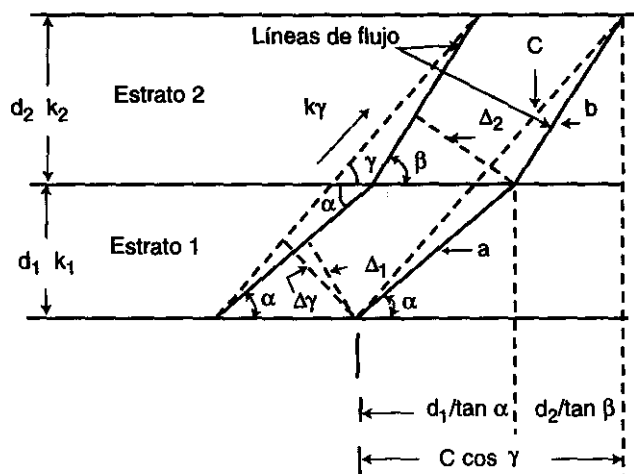


Figura 3.50 Canal de flujo a través de dos estratos y el equivalente en la dirección.

y arreglando términos queda:

$$\frac{1}{k_1 \tan \alpha} = \frac{C \cos \gamma}{k_1 d_1 + k_2 d_2} \quad (3.82)$$

Por otro lado, de la ley de los senos, se tiene:

$$\frac{\Delta_1}{\text{sen} \alpha} = \frac{\Delta_2}{\text{sen} \beta} = \frac{\Delta \gamma}{\text{sen} \gamma} \quad (3.83)$$

Consecuentemente se tiene:

$$\Delta_1/\Delta \gamma = \text{sen} \alpha/\text{sen} \gamma \quad \text{y} \quad \Delta_2/\Delta \gamma = \text{sen} \beta/\text{sen} \gamma \quad (3.84)$$

Tomando en cuenta que el gasto que pasa por un estrato debe ser el mismo que pasa por el otro, se tiene

$$\Delta q = k_\gamma \Delta \gamma (h/C) = k_1 \Delta_1 (h_1/a) = k_2 \Delta_2 (h_2/b) \quad (3.85)$$

Despejando los valores de h_1 y h_2 de (3.85), y tomando en cuenta (3.84), se tiene:

$$h_1 = \frac{k_\gamma h a \Delta\gamma}{k_1 C \Delta_1} = \frac{k_\gamma h a \operatorname{sen}\gamma}{k_1 C \operatorname{sen}\alpha} \quad (3.86)$$

y

$$h_2 = \frac{k_\gamma h b \operatorname{sen}\gamma}{k_2 C \operatorname{sen}\beta} \quad (3.87)$$

Llevando (3.86) y (3.87) a (3.78) se obtiene:

$$\frac{k_\gamma a \operatorname{sen}\gamma}{k_1 C \operatorname{sen}\alpha} + \frac{k_\gamma b \operatorname{sen}\gamma}{k_2 C \operatorname{sen}\beta} = 1 \quad (3.88)$$

Considerando que:

$$a = d_1 / \operatorname{sen} \alpha \quad \text{y} \quad b = d_2 / \operatorname{sen} \beta$$

La ecuación (3.88) se puede escribir:

$$\frac{1}{k_\gamma} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{C} \left(\frac{d_1}{k_1 \operatorname{sen}^2 \alpha} + \frac{d_2}{k_2 \operatorname{sen}^2 \beta} \right) \quad (3.89)$$

Tomando en cuenta además que:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad \text{y} \quad \frac{1}{k_2 \tan \beta} = \frac{1}{k_1 \tan \alpha} \quad (3.90)$$

se tiene:

$$\frac{1}{k_\gamma} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{C} \left[\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2} + \frac{1}{k_1 \tan \alpha} \left(\frac{d_1}{\tan \alpha} + \frac{d_2}{\tan \beta} \right) \right] \quad (3.91)$$

Llevando (3.82) a (3.91) se obtiene:

$$\frac{1}{k_\gamma} = \frac{\text{sen}\gamma}{C} \left(\frac{d_1 k_2 + d_2 k_1}{k_1 k_2} + \frac{C^2 \cos^2 \gamma}{k_1 d_1 + k_2 d_2} \right) \quad (3.92)$$

Reemplazando el valor de $C = (d_1 + d_2)/\text{sen}\gamma$ en (3.92), tendremos:

$$\frac{1}{k_\gamma} = \frac{\text{sen}^2 \gamma}{(d_1 + d_2) k_1 k_2} + \frac{\cos^2 \gamma}{k_1 d_1 + k_2 d_2} = \frac{\text{sen}^2 \gamma}{k_{\text{mín}}} + \frac{\cos^2 \gamma}{k_{\text{máx}}} \quad (3.93)$$

Esta última expresión es exactamente igual a la obtenida para suelos anisotrópicos.

3.5.6 Gasto en un suelo anisotrópico usando la fórmula de Dupuit

El análisis de este gasto se puede hacer con la ayuda de la figura 3.51, donde se muestra la parábola de Dupuit en una sección isotrópica y la sección transformada correspondiente a una sección de material anisotrópico.

Como se recordará, en una sección isotrópica sin tirante aguas abajo el gasto, de acuerdo con Dupuit, está dado por la expresión:

$$q = k(h^2/2d) \quad (3.14)$$

Para la construcción de la sección transformada el factor de transformación es:

$$F = (k_{\text{máx}}/k_{\text{mín}})^{1/2}$$

y consecuentemente:

$$\bar{d} = \frac{d}{\sqrt{\frac{k_{\text{máx}}}{k_{\text{mín}}}}} \quad (3.94)$$

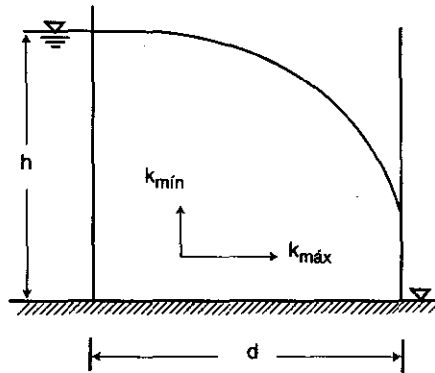


Figura 3.51 a Línea de corriente superior, según Dupuit, en un material isotrópico.

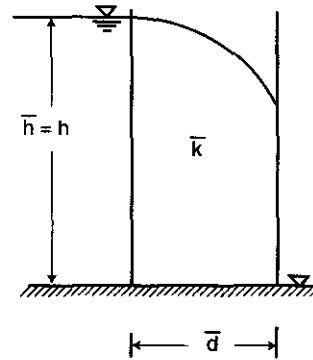


Figura 3.51 b Sección transformada correspondiente a un suelo anisotrópico.

$$\bar{k} = \sqrt{k_{\text{máx}} k_{\text{mín}}} \quad (3.95)$$

O sea que el gasto determinado con las dimensiones de la sección transformada es:

$$q = \bar{k} \frac{h^2}{2\bar{d}} \quad (3.96)$$

Llevando por tanto las expresiones (3.94) y (3.95) a la (3.96) se obtiene:

$$q = \sqrt{k_{\text{máx}} k_{\text{mín}}} \frac{h^2}{2d} \sqrt{\frac{k_{\text{máx}}}{k_{\text{mín}}}} \quad (3.97)$$

o sea:

$$q = k_{\text{máx}} (h^2/2d) \quad (3.98)$$

Vemos que esta última expresión es igual al caso isotrópico, sólo que se introduce $k_{\text{máx}}$ en vez de k en la fórmula original de Dupuit.

Como se puede observar en las figuras 3.52a y 3.52b, la línea superior de corriente se mueve hacia arriba a medida que la anisotropía aumenta. La figura 3.53a muestra un ejemplo de anisotropía en dos zonas diferentes, cada uno de los cuales presenta estratificación diferente; la figura 3.53b muestra cómo se debe transformar cada zona. Posteriormente se aumenta la escala de la zona de menor tamaño a fin de que $\overline{A''B''}$ coincida y sea igual a $\overline{A'B'}$, obteniendo así un sistema estratificado "normal" que ya sabemos resolver; es decir, lo único que se hace es cambiar la escala, pero k'' sigue siendo la misma y así se tendrán dos materiales que son isotrópicos cada uno. Este ejemplo se puede presentar en dos situaciones o circunstancias diferentes.

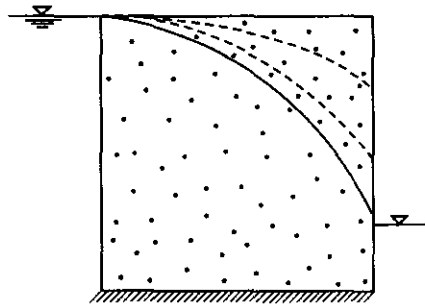


Figura 3.52 a Sección anisotrópica real.

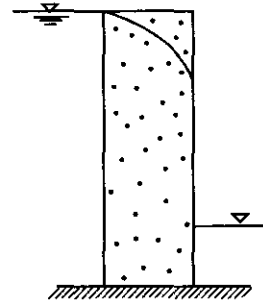


Figura 3.52 b Sección transformada.

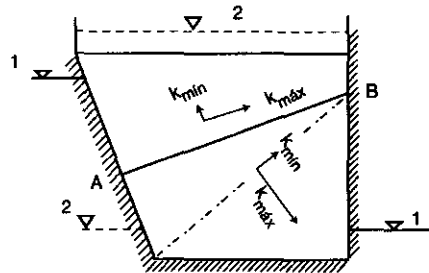


Figura 3.53 a Sección con dos zonas anisotrópicas.

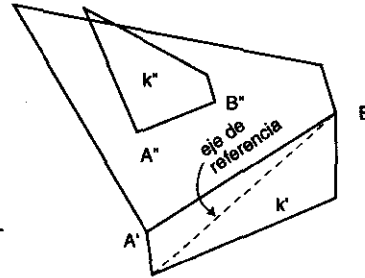


Figura 3.53 b Sección transformada que se convierte en un medio con dos permeabilidades diferentes (k' y k'').

La situación 1 corresponde al paso de agua a través de un corazón impermeable, la situación 2 pertenece a un depósito aluvial en la base de un cañón sobre el cual se desea construir una presa.

3.6 Ejemplos de redes de flujo en secciones estrechas

En casos como el de los siguientes ejemplos, conviene seleccionar tres o cuatro caídas de potencial y, a partir de allí, intentar dibujar la red de flujo.

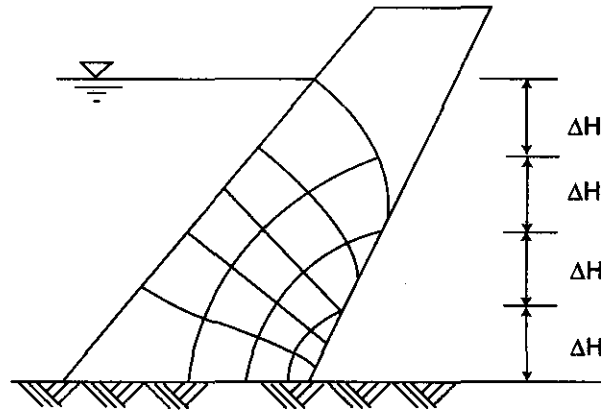


Figura a) Sección estrecha sin tirante aguas abajo y $\gamma > 90^\circ$.

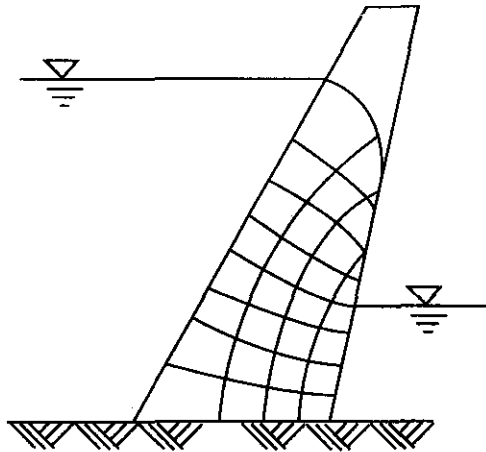


Figura b) Sección estrecha con tirante aguas abajo.

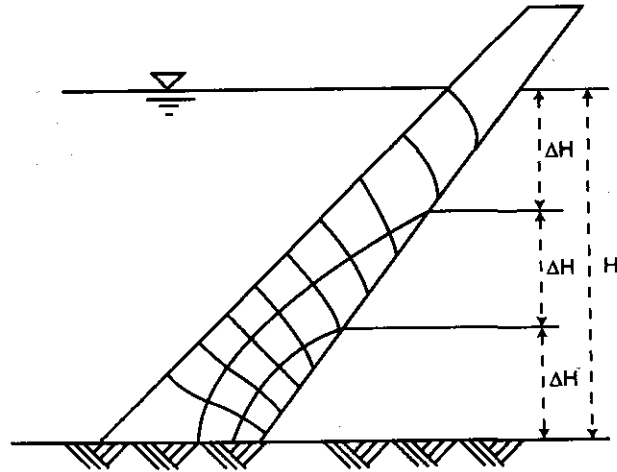


Figura c) Sección correspondiente a un corazón "impermeable".

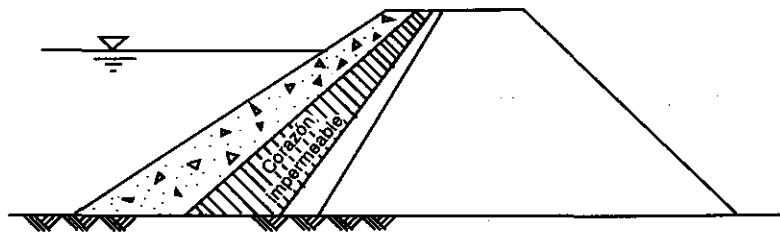


Figura d) Esquema de la sección del corazón impermeable de una presa de tierra, correspondiente a la red de la figura c.

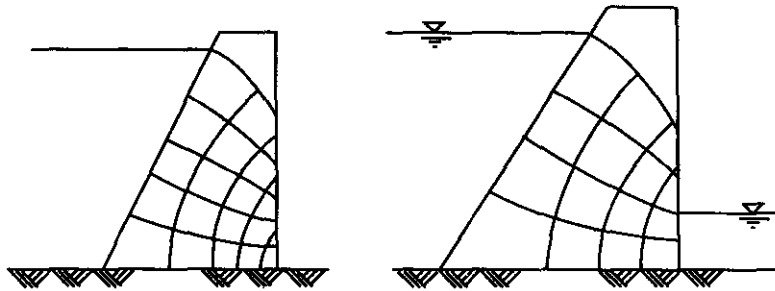


Figura e) Sección sin tirante aguas abajo
y $\gamma = 90^\circ$.

Figura f) Sección con tirante aguas abajo
y $\gamma = 90^\circ$.

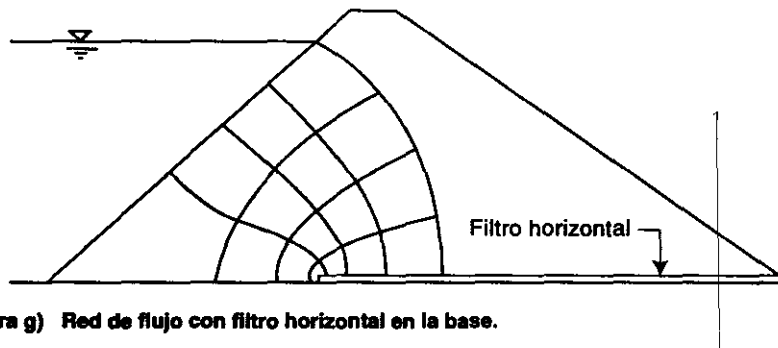


Figura g) Red de flujo con filtro horizontal en la base.

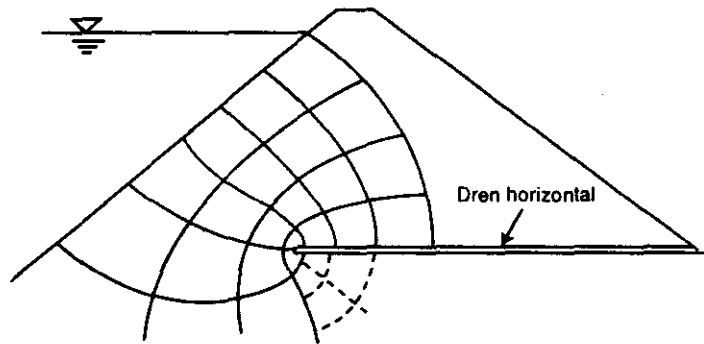


Figura h) Forma de la red de flujo alrededor de un dren horizontal.

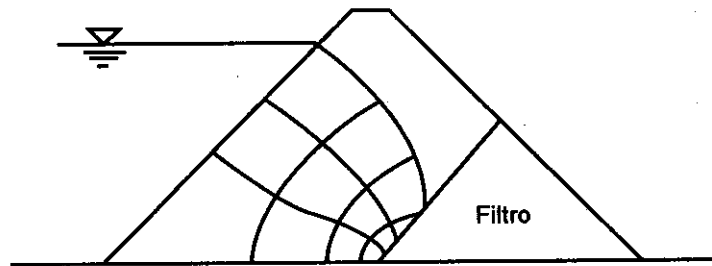


Figura i) Red de flujo sobre filtro inclinado.

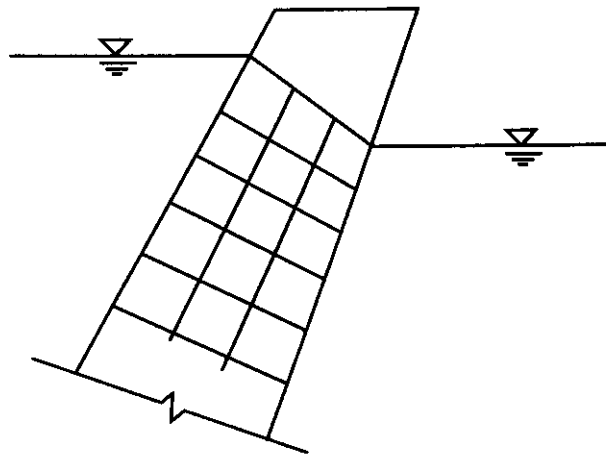


Figura j) Parte de una red de flujo en un caso especial de una sección estrecha.

Ejercicios del capítulo III

3.1 Utilizando las suposiciones que hace Dupuit, deduzca:

- La ecuación de la línea superior de flujo en términos de x , y , d , h , a y α (fig. 1).
- La fórmula para la distancia a en términos de h , d y α .

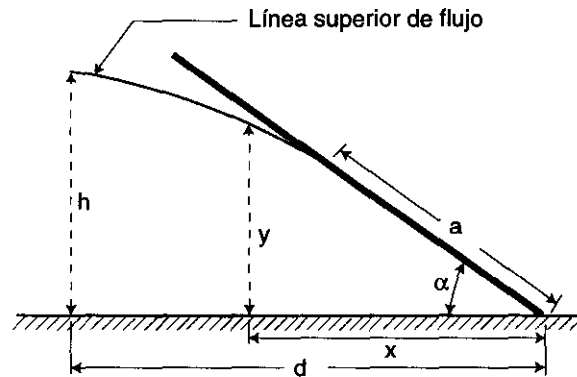


Figura 1

- Dibuje la red de flujo para la corriente que pasa a través de la cimentación permeable de la presa de concreto mostrada en la figura 2. Use la escala $2.5 \text{ cm} = 10 \text{ m}$.
- Dibuje, mediante la superficie piezométrica, la distribución de la presión hidrostática hacia arriba a lo largo de la base, y establezca si, en su opinión, la presa está segura contra el levantamiento.
- Calcule la pérdida de flujo a través de la cimentación en metros cúbicos por segundo, para una longitud de presa de 120 m .

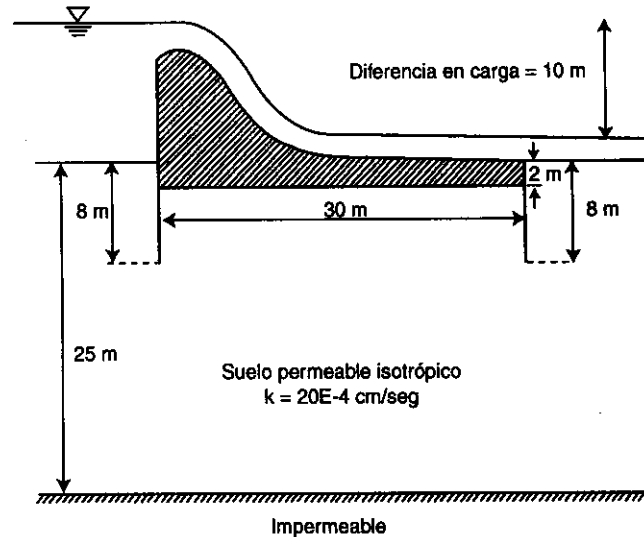


Figura 2

3.3 Demuestre que la fórmula $q = kh(n_f/n_e)$

donde:

- q = cantidad de flujo por unidad de tiempo.
- k = coeficiente de permeabilidad.
- h = diferencia total de carga entre el nivel de la presa y el tirante aguas abajo.
- n_f = número de canales de flujo.
- n_e = número de caídas de potencial.

Es también válida para el caso de una red de flujo en que una de las fronteras es una superficie libre.

3.4 (a) Para el caso de la presa mostrada en la siguiente figura, con su nivel de agua igual a la elevación de la cresta de la presa y con un nivel de aguas abajo igual a la elevación del terreno natural, determine la línea de corriente superior mediante la construcción de toda la red de flujo.

- (b) Determine la pérdida de flujo a través de la presa en metros cúbicos por minuto:
- (1) Directamente de la red de flujo.
 - (2) Mediante la fórmula de Dupuit, usando como punto de entrada de la línea de corriente superior el punto que se obtiene al emplear la corrección sugerida por A. Casagrande.
 - (3) Mediante la parábola básica suponiendo que entra en el mismo punto corregido, señalado en (2).

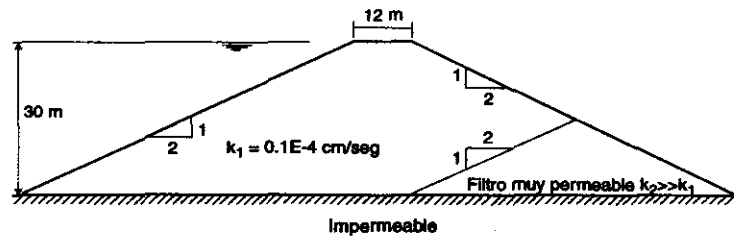


Figura 3

3.5 Para el dique de arena mostrado en la figura 4, cuando el nivel de aguas arriba coincide con la elevación de la cresta y no existe tirante aguas abajo:

- (a) Determine la posición del punto de descarga de la línea de corriente superior, usando la construcción basada en la ecuación de la tangente.
- (b) Determine la posición del punto de descarga de la línea de corriente superior, usando la construcción basada en la ecuación del seno.
- (c) Calcule la cantidad de agua que pasa por el dique, en litros por segundo por metro lineal de dique:
 - (1) mediante la fórmula de la tangente
 - (2) mediante la fórmula del seno
 - (3) mediante la fórmula de Dupuit
- (d) Dibuje la línea superior de corriente, suponiendo que es una parábola cuadrática.
- (e) Usando la línea superior de corriente determinada en (d) y tres canales de flujo, dibuje toda la red de flujo.

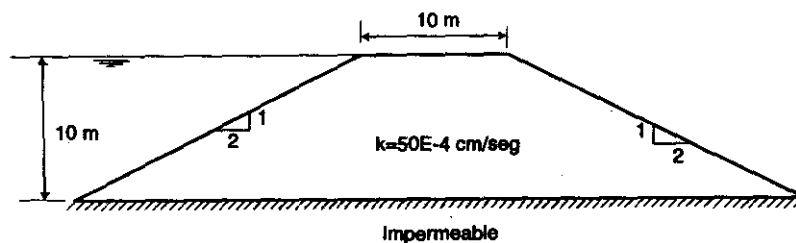


Figura 4

3.6 Dibuje a escala 1:600 las redes de flujo correspondiente a la cimentación permeable de la presa señalada en la figura 5, haciendo las siguientes suposiciones:

- $D=0$ metros.
- $D=15$ metros.
- $D=27$ metros.

Dibuje la curva que indica la pérdida de flujo expresada en porcentaje de la pérdida cuando $D=0$, en función de la longitud del tablaestacado.

3.7 Dibuje a escala 1:250 la red de flujo para la sección mostrada en la figura 6, correspondiente al corazón de una presa de tierra. Utilice cuatro caídas de potencial, en la forma allí señalada. Con el objeto de determinar lo mejor posible la línea superior de corriente, subdivida dos veces el "cuadrado" superior de la red de flujo; o sea, divida la caída de potencial superior en cuatro subdivisiones iguales.

Determine la pérdida de flujo para una longitud de 300 metros, en metros cúbicos por segundo.

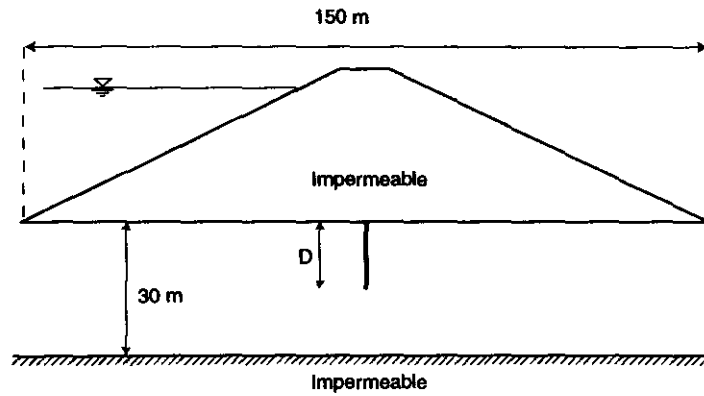


Figura 5

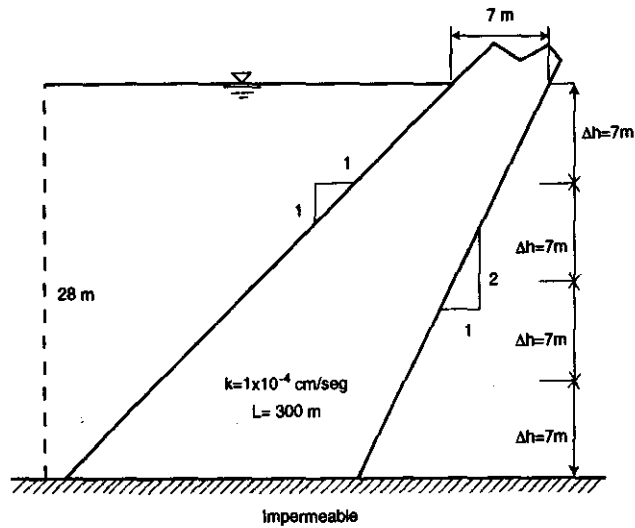


Figura 6

3.8 Dibuje la red de flujo para un gasto que pasa por la cimentación permeable de la presa mostrada en la figura 7, para el caso en que $k_2 = 3k_1$. Considere la escala $D = 10 \text{ cm}$.

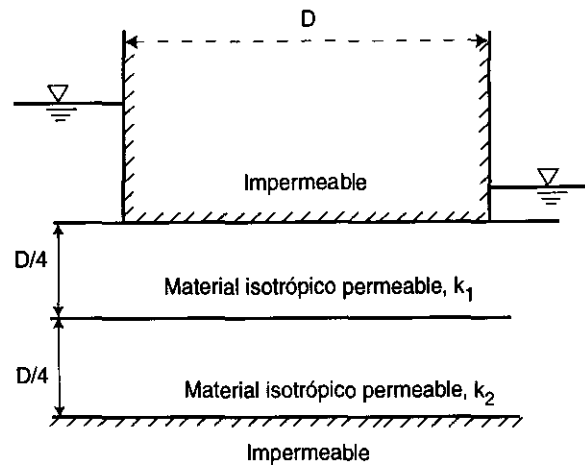


Figura 7

3.9 Determine la red de flujo para el gasto que pasa bajo la tablaestaca mostrada en la figura 8; considere $k_{\text{máx}} = 9k_{\text{mín}}$, y una escala $D = 1.65\text{cm}$.

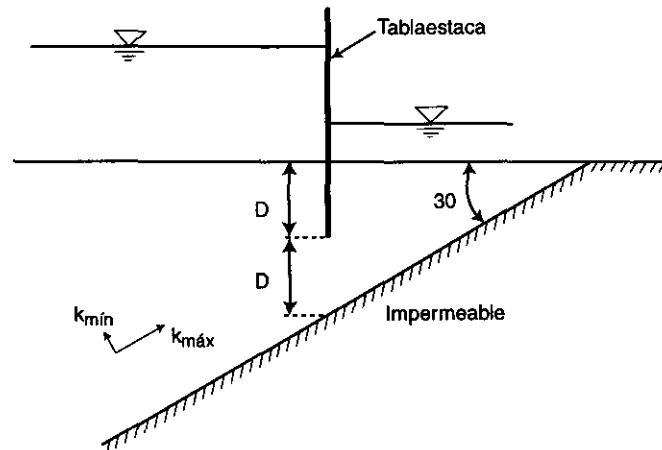


Figura 8

3.10 El vertedor de una presa (ver figura 9), se apoya sobre una arena suelta que tiene un coeficiente de permeabilidad, en la dirección de la estratificación de $k_{\text{máx}} = 4 \times 10^{-2}$ cm/seg, y en la dirección normal a la misma de $k_{\text{mín}} = 10^{-2}$ cm/seg. La diferencia máxima en la carga de agua, entre el nivel aguas arriba y el nivel aguas abajo es de 9.0 m.

(a) En escala 1:250, dibuje la red de flujo en la sección transformada y determine el factor de forma.

(b) Calcule la pérdida de agua que ocurre bajo el vertedor, por metro de ancho y en m^3/minuto .

(c) Determine el gradiente de salida. Establezca si el factor de seguridad es lo suficientemente grande para evitar que ocurra la condición crítica al pie del vertedor.

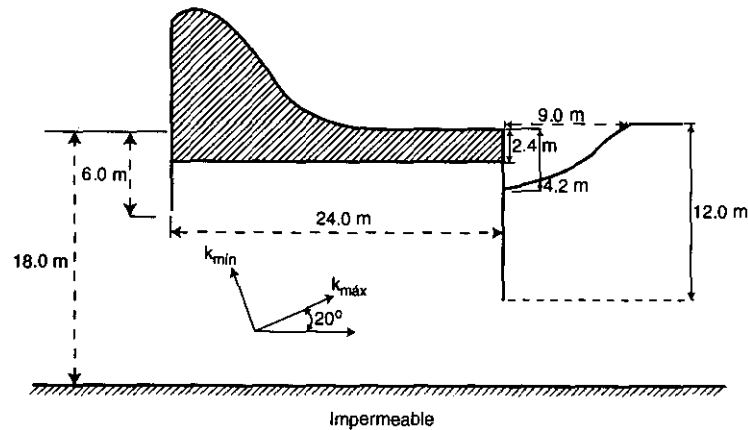


Figura 9

3.11 Dibuje la red de flujo para el gasto que pasa bajo la tablaestaca mostrada en la figura 10; suponga que la permeabilidad de la berma de arena es la misma que la que tiene la cimentación permeable.

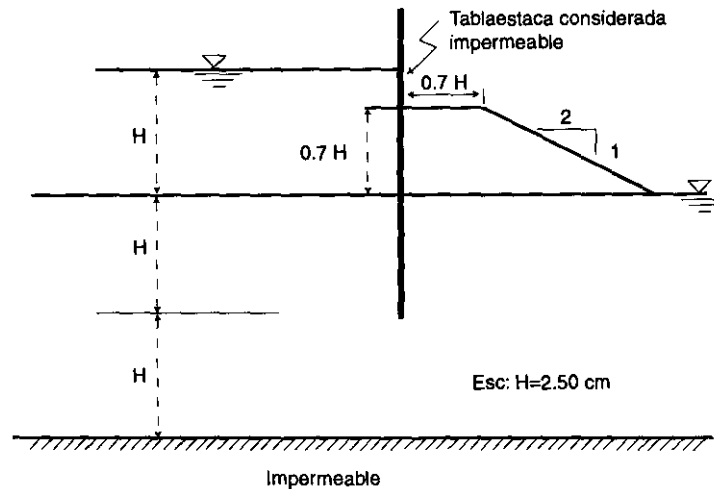


Figura 10

3.12 Determine el coeficiente de permeabilidad promedio perpendicular a los planos de estratificación de un suelo que tiene capas alternadas de arena gruesa, de igual espesor, con coeficientes de permeabilidad de 0.06 y 3.0 cm/min respectivamente; deduzca la fórmula requerida.

3.13 Por medio de la ley de Darcy determine las relaciones entre los ángulos que forman las equipotenciales que se encuentran en la frontera de dos medios con diferente permeabilidad.

3.14 En la figura 11 se muestra la sección de una presa de tierra que se apoya sobre una cimentación impermeable. La zona aguas arriba tiene un coeficiente de permeabilidad promedio de 90×10^{-4} cm/seg en el sentido horizontal y 10×10^{-4} cm/seg en el sentido vertical. La longitud de la presa es de $1,000$ metros.

(a) Dibuje la red de flujo en el espacio disponible en la misma hoja.

(b) Calcule la pérdida de agua a lo largo de toda la presa, expresada en m^3/seg .

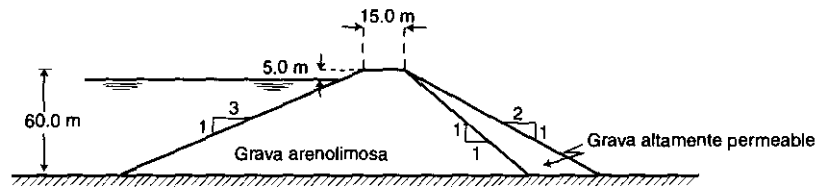


Figura 11

4 FUERZAS DE FLUJO: MECANISMO Y CONTROL DE LA TUBIFICACIÓN

4.1 Gradiente hidráulico crítico y fuerzas de flujo

Al inicio del curso se vio que la velocidad de flujo está dada por la expresión siguiente: $V_s = ki/n$, donde n = porosidad, y que la velocidad de descarga o de salida está dada por $V_d = k i$.

Se vio también que esta última velocidad tiene dos componentes, la normal y la tangencial, según se puede apreciar en la figura 4.1.

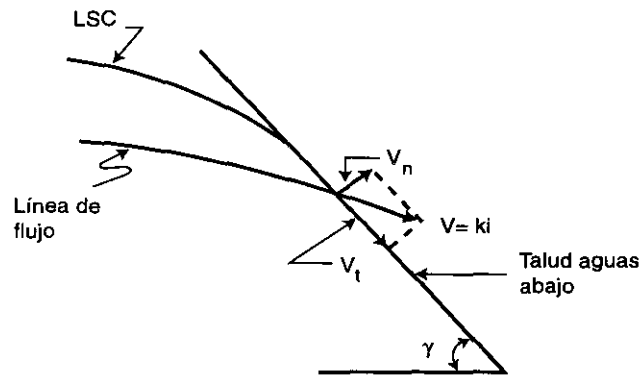


Figura 4.1 Velocidad de salida y sus componentes normal y tangencial.

Se verá ahora cuál es el gradiente hidráulico que anula los esfuerzos efectivos de un suelo. Como se puede ver en la figura 4.2, estos esfuerzos se anulan cuando $h \gamma_w = D \gamma_m'$ donde h es la columna de agua en exceso de la hidrostática y D es la profundidad a la cual se hace el análisis de presiones; γ_w es el peso volumétrico del agua y γ_m' es el peso volumétrico sumergido del suelo.

Si se considera $\gamma_w \approx \gamma_m'$, cuando $h \approx D$ se tendrá el gradiente que anula la presión efectiva, es decir:

$$i_c = \frac{h}{D} \approx 1 \quad (4.1)$$

Dicho en otras palabras, la presión de flujo que anula la presión efectiva sucede cuando el gradiente crítico es: $i_c \approx 1$

El valor de i_c varía en general entre 0.9 y 1.1.

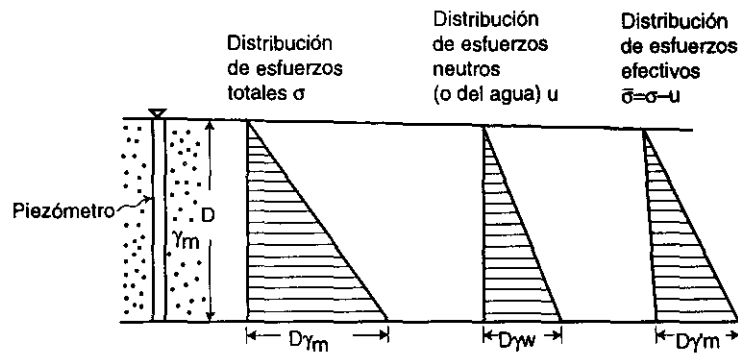


Figura 4.2 (a) Distribución de las presiones totales (σ), neutras (u) y efectivas ($\bar{\sigma}$) versus profundidad cuando no hay exceso de presión hidrostática

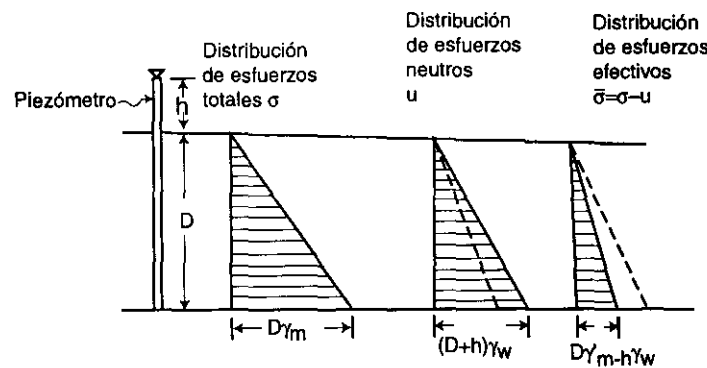


Figura 4.2 (b) Distribución presiones totales, neutras y efectivas versus profundidad, cuando existe un exceso de presión de agua h , a la profundidad D .

4.1.1 Cálculo de la fuerza de flujo por unidad de volumen

Consideremos el elemento del canal de flujo mostrado en la figura 4.3, al cual intersectan dos equipotenciales.

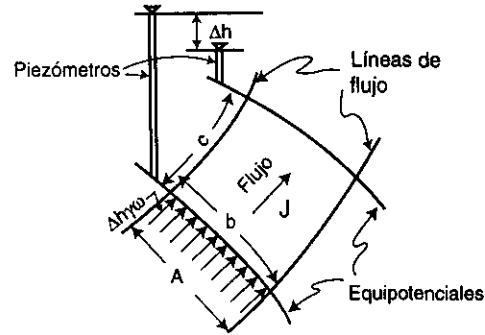


Figura 4.3 Fuerzas de flujo sobre un elemento de la red de flujo.

Si se denomina:

j = fuerza de flujo por unidad de volumen y

J = fuerza total de flujo, tendremos:

$$j = \frac{J}{Ac} = \frac{\Delta h \gamma_w A}{Ac} = \frac{\Delta h}{c} \gamma_w = i \gamma_w$$

donde:

A = Área transversal del elemento

c = Longitud media del elemento considerado

o sea:

$$j = i \gamma_w \quad (4.2)$$

Si cierta porción de suelo con volumen total V está sometido a un flujo uniforme (gradiente constante), la fuerza de filtración total es simplemente:

$$J = i\gamma_w V \quad (4.3)$$

Si el gradiente en la masa infiltrada es una función de punto, la fuerza de filtración resultante es la suma vectorial de las fuerzas en cada uno de los elementos de volumen, esto es:

$$J = \gamma_w \int_V i dV \quad (4.4)$$

La fuerza de flujo puede aumentar o disminuir en un problema dado, dependiendo de las medidas que se adopten; las figuras 4.4 y 4.5 ilustran lo que puede originar alguna de estas medidas.

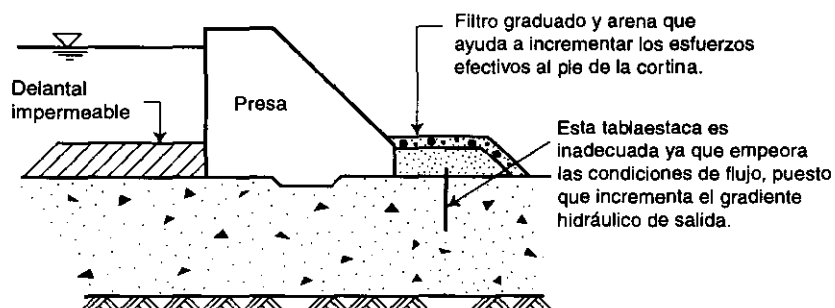


Figura 4.4 Diversas medidas que pueden ayudar o perjudicar la estabilidad por flujo.

Para el caso de un dique provisional o un cilindro, conviene llenarlo de agua como se muestra en la figura 4.5, a fin de evitar las fuerzas de filtración a través del fondo.

Para controlar las fuerzas de flujo, Terzaghi ideó el "filtro invertido" (ver fig. 4.6) y el filtro pesado (*weighted filter*) que va cubierto con sobrecarga para evitar levantamientos por fuerzas de flujo (ver fig. 4.7).

En el análisis de las fuerzas de filtración se debe tener mucho cuidado de los efectos que pueden tener lo que Casagrande y Terzaghi llamaron "efectos geológicos menores" (*minor geological effects*), como el mostrado en la figura 4.7.

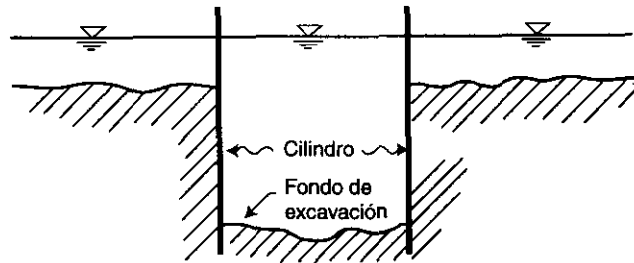


Figura 4.5 Excavación de un cilindro y su llenado con agua a fin de evitar fuerzas de filtración.

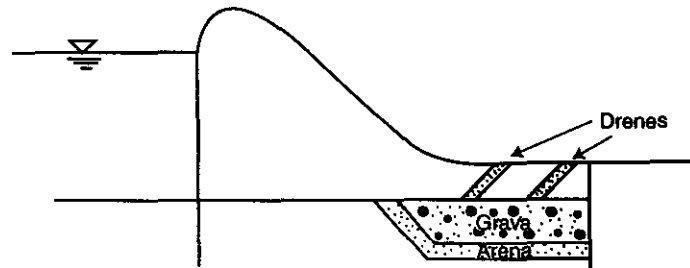


Figura 4.6 Filtro invertido o *wighted filter*.

Otra solución al problema mostrado en la figura 4.7 es poner un delantal impermeable aguas arriba que cubra el "efecto geológico". Es muy conveniente efectuar observaciones a través de piezómetros en situaciones como las mostradas en esta figura, pero sobre todo tener mucho cuidado de no empeorar las condiciones ya críticas.

4.2 Mecanismos de falla por tubificación (*piping*)

Este fenómeno se presenta cuando las fuerzas resistentes a la erosión son menores que las fuerzas del flujo de agua que tienden a producirlo, de manera que las partículas de suelo son removidas y llevadas por la corriente.

Las fuerzas resistentes dependen de la cohesión, del efecto de "amarre" entre las partículas, del peso de éstas, así como del efecto del filtro aguas abajo, si existe.

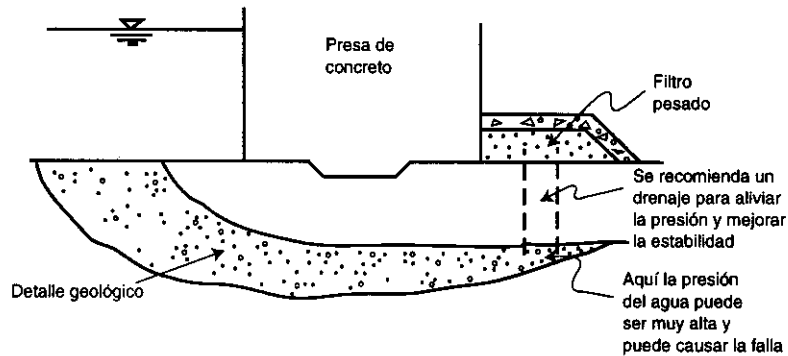


Figura 4.7 Detalle de un estrato o efecto geológico pequeño que puede causar una falla aguas abajo.

Este problema se puede iniciar en cualquier grieta causada por asentamientos diferenciales, temblores o grietas de tensión, e incluso a partir de hoyos dejados por raíces o troncos podridos. La falla puede suceder desde el primer llenado o después de varios años de construida la presa.

4.2.1 Métodos teóricos y empíricos para diseñar contra tubificación

El primero que analizó este problema fue W. G. Blight quien publicó un artículo en diciembre de 1910 en la revista *Engineering News Record*. En ese artículo definió el factor de percolación según la siguiente expresión:

$$C_B = \frac{\sum b + \sum t}{h} \quad (4.5)$$

El significado de este factor lo ilustró Blight a través del ejemplo mostrado en la figura 4.8.

Los valores obtenidos por Blight a partir de un estudio estadístico de este factor (C_B), a fin de que no exista falla por tubificación, son los mostrados en la tabla 4.1.

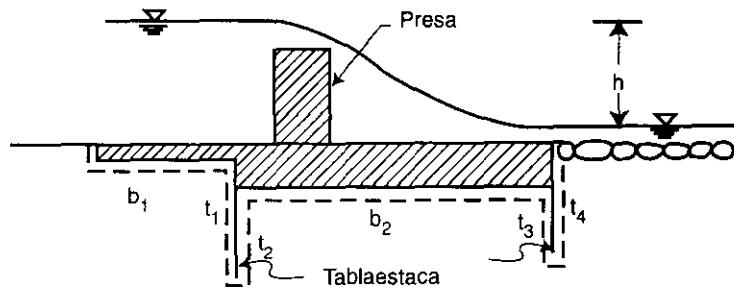


Figura 4.8 Ejemplo mostrado por W. G. Bling para definir el factor de percolación.

Tabla 4.1 Factores de percolación de acuerdo con los criterios de Blight y Lane

MATERIAL	C_B	C_L
Arena fina y limos	18	8.5
Arena gruesa ordinaria	12	6.0
Grava y arena	9	3.0
Boleos, grava y arena	4	2.5

Los valores de esta tabla son los mínimos que deben tenerse para que, según Blight, no se tenga la falla por tubificación. La realidad sin embargo es que, debido a que generalmente la permeabilidad es mayor en el sentido horizontal comparado con el sentido vertical, la distancia horizontal tiene menor influencia que la vertical.

Para tomar en cuenta dicha influencia, E. W. Lane (*Security for Underseepage*, ASCE, Trans, 1935) modificó la anterior fórmula por la siguiente expresión:

$$C_L = \frac{\sum t + \frac{1}{3} \sum b}{h} \quad (4.6)$$

En la última columna de la tabla anterior se muestran los valores del factor de percolación recomendado por Lane. Se sugiere al lector leer el capítulo 2 del libro *Earth and Earth-Rocks Dams* de Sherard, Woodward, Gisienski y Clevenger, editado por John Wiley

(1967), ya que allí se trata ampliamente el problema de tubificación. La tabla 4.2 muestra que los suelos más resistentes a la tubificación son los arcillosos de alta plasticidad; los de mediana resistencia, las gravas y arenas bien graduadas y los menos resistentes son las arenas finas y uniformes. La tabla 2.1.1 del libro de Sherard *et al.*, trae una lista muy grande de presas que han fallado o tenido problemas por tubificación. El primer capítulo del libro de Cedergren (1989) contiene también algunos ejemplos muy claros de presas donde se produjo tubificación.

Tabla 4.2 Relaciones empíricas entre la resistencia a la tubificación y el tipo de suelo (Sherard *et al.*, 1967). La resistencia está mostrada en forma decreciente

Resistencia mayor a la tubificación	1. Arcilla de alta plasticidad, bien compactada. 2. Arcilla de alta plasticidad, mal compactada.
Resistencia intermedia a la tubificación	3. Arena gruesa bien graduada o mezclas de arena-grava empacadas en arcilla de mediana plasticidad, bien compactada. 4. Arena gruesa bien graduada o mezclas de arena-grava empacadas en arcilla de mediana plasticidad, mal compactada. 5. Mezclas de gravas-arenas-limos bien graduados sin cohesión ($IP < 6$), bien compactados.
Mínima resistencia a la tubificación	6. Mezclas de gravas-arenas-limos bien graduados sin cohesión ($IP < 6$), mal compactados. 7. Arenas finas sin cohesión muy uniformes, bien compactadas. 8. Arenas finas sin cohesión muy uniformes, mal compactadas.

En relación a los criterios de Blight y Lane, existen desde luego algunos casos que no son cubiertos por las fórmulas, ya que estos sólo consideran los obstáculos abajo de la

presa. Un ejemplo que muestra que estas fórmulas no funcionan perfectamente, es el mostrado en la figura 4.9, según se explica a continuación.

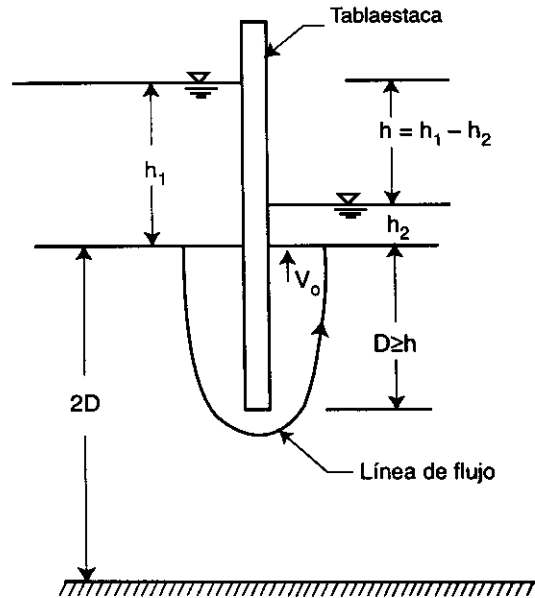


Figura 4.9 Situación no cubierta por los criterios de Blight o Lane.

En este caso existe la regla empírica para tablestacas que establece que si $D \geq h$, el factor de seguridad (FS) es igual a 3. Sin embargo, para este caso el factor de percolación es:

$$C_B = C_L = \frac{2D}{h} = 2$$

Este valor indica que para este caso el factor de percolación anda bajo (ver tabla 4.1) y se pueden tener, por tanto, problemas de tubificación. Sin embargo, calculando la velocidad de salida V_o , según Darcy, se tiene:

$$V_o = k \frac{h_1 - h_2}{\pi D}$$

O sea:

$$\frac{V_o}{k} = \frac{h}{\pi D} = i \approx \frac{h}{3D}$$

Para $i_c = 1$, se obtiene $h_c = 3D$

donde: h_c = altura crítica para tener falla.

Consecuentemente, si $h=D$, el FS=3

De acuerdo con lo comentado anteriormente, el factor de percolación no funciona muy bien, por lo que la forma, como considera este factor el tipo de cimentación y la clase de suelo, sólo se debe tomar como guía. En realidad, independientemente del gradiente hidráulico promedio, cualquier cimentación de presas puede estar segura contra tubificación si se diseñan y construyen filtros graduados adecuadamente.

La experiencia indica que la tubificación se puede evitar haciendo uso de las siguientes recomendaciones:

- a) Una buena elección de materiales de construcción.
- b) Controlando la homogeneidad de los materiales durante el proceso de la construcción.
- c) Efectuando zonas de transición entre los materiales finos y gruesos.

La instalación de filtros graduados han dado también un magnífico resultado contra la tubificación. Es importante tener cuidado de inspeccionar que no existan fugas de agua o manifestaciones de tubificación, tales como los *Sand Boils* o volcancitos de arena aguas abajo de la presa. Generalmente, es más factible tener tubificación a través de la cimentación de la cortina que a través del cuerpo de ésta, aunque también puede existir en este último caso cuando no hay un control adecuado en la compactación y calidad de los materiales durante la construcción, debido al peligro de la estratificación horizontal que se puede formar.

El ejemplo mostrado en la figura 4.10 ilustra como, a pesar de tener el mismo factor de percolación, los cuadrados de salida en la red de flujo son diferentes y, por tanto, los gradientes de salida serán también diferentes; consecuentemente el factor de seguridad es mayor donde el gradiente hidráulico de salida es menor.

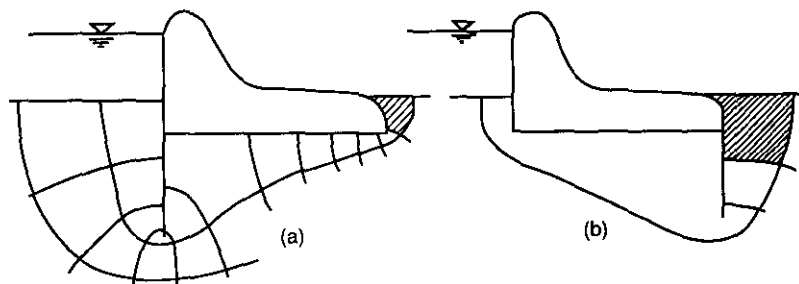


Figura 4.10 Ejemplo de un mismo factor de percolación y condiciones de salida muy diferentes.

Otro problema que debe evitarse en presas es el llamado *roofing* (ahuecamiento) que se presenta, por ejemplo, cuando se desplanta la presa sobre pilotes (ver fig. 4.11).

Todos estos problemas, junto al de pequeños detalles geológicos (ver fig. 4.12), se pueden resolver proporcionando filtros y drenajes adecuados.

Se recomienda al lector ver la primera lectura Rankine dada por A. Casagrande "Control of Seepage Through Foundations and Abutments of Dams", Harvard Soil Mechanics, serie No. 63 o en *Geotechnique*, vol.II, No 3, septiembre de 1961.

En particular resultan muy interesantes las conclusiones que Casagrande obtiene de la figura 9 de la publicación antes mencionada (ver fig. 4.13), la cual muestra los problemas que se pueden tener cuando no se proporciona un drenaje adecuado.

Estas conclusiones son las siguientes:

- a) Considerando el relativo bajo costo de los drenes, se recomienda que la profundidad de los mismos sea al menos la altura de la presa; las condiciones geológicas locales pudieran señalar la necesidad de construir drenes a mayores profundidades.
- b) Donde las condiciones geológicas crean la más ligera duda sobre el control de las presiones hidrostáticas en algunas zonas de roca abajo de la presa o en las laderas, no sólo se deberán de hacer mediciones de presiones a lo largo de la base de la presa, sino que además se deberán hacer observaciones piezométricas más profundas en otros sitios de la roca subyacente donde se necesite.

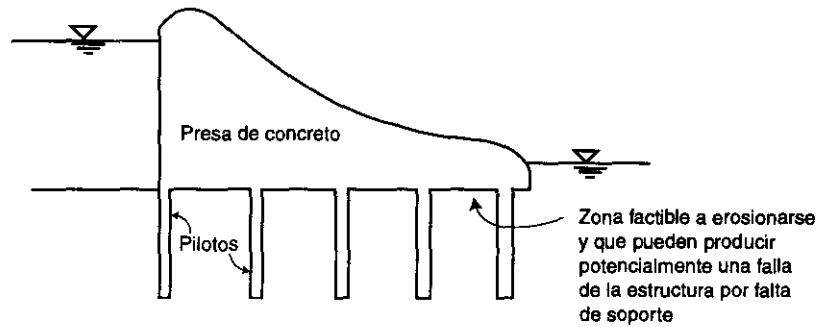


Figura 4.11 Cimentación de una presa donde puede haber problemas de *roofing* o falta de soporte.

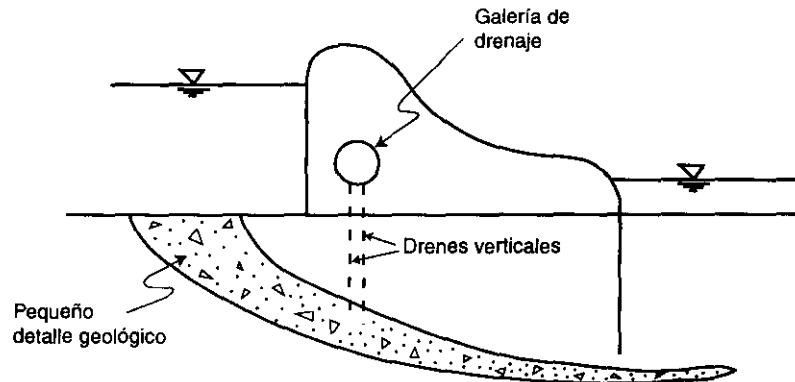


Figura 4.12 Drenaje que resuelve el problema del detalle geológico.

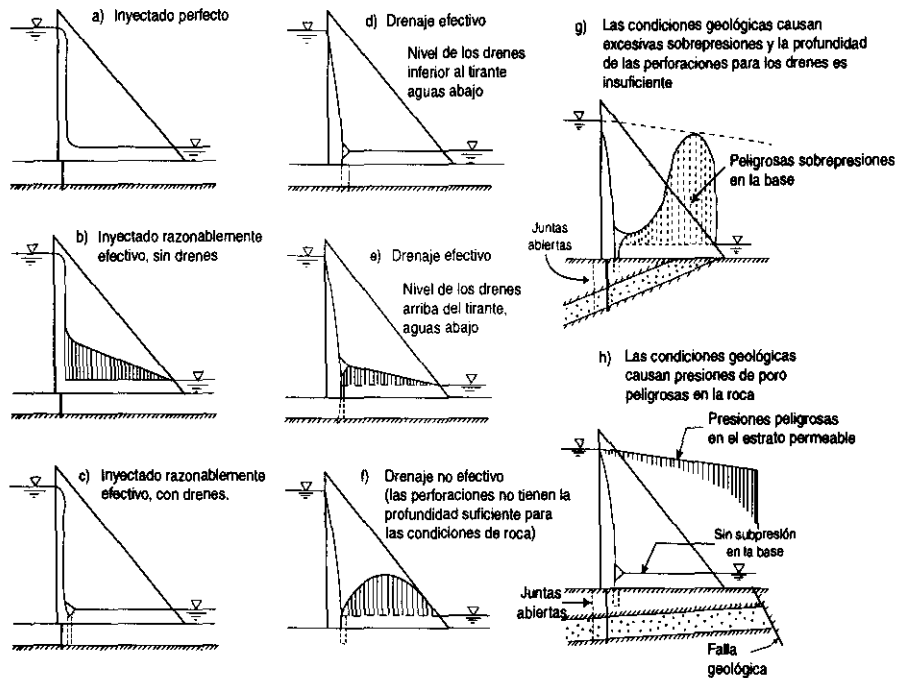


Figura 4.13 Ejemplos de A. Casagrande en relación a la efectividad de los inyecciones y los drenes en presas.

4.3 Diseño de filtros

Introducción

Todo filtro debe cumplir con tres condiciones:

a) **Condición geométrica.** El filtro debe impedir el paso de las partículas del suelo que trata de proteger; debe por tanto existir una relación entre el tamaño de los granos del suelo por proteger y los espacios o poros del filtro.

b) **Condición hidráulica.** El filtro debe ser suficientemente permeable para que no se acumulen presiones de agua y resistente contra las fuerzas de flujo de agua; en este caso se puede decir que el filtro debe operar como un buen dren.

c) **Condición de estabilidad.** Las partículas del filtro mismo no deben emigrar y, por tanto, su estructura debe mantenerse siempre estable. Esta condición se puede cumplir haciendo que el material del filtro sea relativamente uniforme, por ejemplo, con un límite superior del coeficiente de uniformidad $U_f < 10$, pero también con un límite inferior para asegurar que no se moverán o pasarán las partículas más pequeñas a través del filtro, por ejemplo, $U_f > 1.5$.

De estas condiciones sin duda la más importante es la primera, ya que a través de ella se satisface la función primordial del filtro, que es la protección contra problemas de erosión y tubificación.

Criterios de diseño

Existen varios criterios para satisfacer las condiciones antes señaladas, principalmente las que se refieren a los aspectos geométrico e hidráulico; casi todos ellos son esencialmente empíricos y están basados, fundamentalmente, en la distribución de tamaños de partículas del filtro y del material base.

Uno de los más conocidos y usados es el criterio de Terzaghi (1943), el cual se establece mediante la siguiente expresión:

$$\frac{D_{15}^f}{D_{85}^s} < 4 < \frac{D_{15}^f}{D_{15}^s} \quad (4.7)$$

donde D_{15}^f se refiere al diámetro del material del filtro correspondiente al 15% en peso de la curva granulométrica; este diámetro se conoce también como *diámetro característico* del filtro.

D_{15}^s es el diámetro del material del suelo por proteger, correspondiente al 15% en peso de la curva granulométrica.

D_{85}^s es el diámetro del material del suelo por proteger, correspondiente al 85% en peso de la curva granulométrica.

La parte izquierda de esta desigualdad, llamada *relación de tubificación*, indica la condición geométrica, la cual significa que los granos pequeños del suelo base (que se intenta proteger), no podrán pasar dentro del filtro si la relación de diámetros D_{15}^f / D_{85}^s es menor a 4 (ver fig. 4.14). Taylor (1954), indica que si tres esferas perfectas tienen un diámetro mayor de 6.5 veces el diámetro de una pequeña esfera, ésta se puede mover libremente a través de las esferas grandes (fig. 4.15). El significado gráfico de esta condición de Terzaghi se muestra en la fig. 4.16.

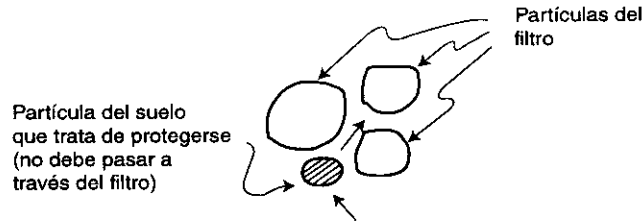


Figura 4.14 Espacios del filtro que deben impedir el paso de partículas de suelo.

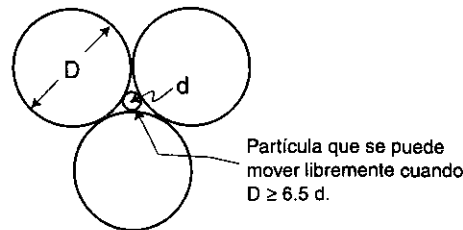


Figura 4.15 Figura mostrando el tamaño de partícula que puede pasar libremente a través de las partículas de mayor tamaño.

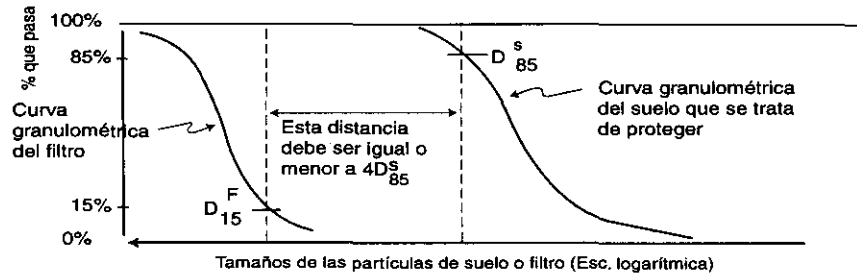


Figura 4.16 Significado del primer requisito que da Terzaghi para el diseño de filtros.

La parte de la derecha de la desigualdad (4.7) corresponde a la condición hidráulica, la cual señala que el diámetro característico del filtro D_{15}^f debe ser mayor a cuatro veces el diámetro característico del suelo (D_{15}^s); si tomamos en cuenta que la permeabilidad es proporcional al cuadrado de estos diámetros característicos, al cumplirse esta desigualdad significa que habrá una permeabilidad mucho mayor en el filtro (alrededor de 16 veces) con respecto a la del suelo por proteger.

Una limitación de los criterios basados en las distribuciones granulométricas de las partículas, es que no hay una correspondencia única entre los tamaños de los poros y la de los granos, ya que se ve afectada, entre otros factores, por la compacidad del material y la forma de los granos. Otra limitación de esos mismos criterios es que generalmente no se contempla la ejecución de pruebas de laboratorio como parte de los estudios para diseño de filtros. A este respecto Sherard y Dunnigan (1989) recomiendan realizar, para asegurar que no pasará a través del filtro el material proveniente del corazón impermeable, la prueba denominada *filtro sin erosión* (NEF, *no erosion filter*), la cual se describe más adelante.

Investigaciones posteriores indican que el criterio de Terzaghi es conservador; así por ejemplo, en la condición geométrica antes señalada, Bertran (1940) demostró que la relación D_{15}^f / D_{85}^s puede ser menor de seis a nueve veces antes de que una cantidad considerable de suelo se mueva o pase a través del filtro. Sin embargo, si bien es cierto que el valor de esta relación no es una constante absoluta, ya que depende en cierta medida en la distribución granulométrica de ambos materiales, la condición geométrica recomendada por Terzaghi es hoy en día aceptada perfectamente en la práctica geotécnica, sólo cambiando por "5" en vez de "4" en la ec. (4.7). La fig. 4.17 muestra gráficamente los requisitos de Terzaghi para que un filtro cumpla simultáneamente con las condiciones geométricas e hidráulicas antes señaladas.

A fin de tomar en cuenta la condición de estabilidad del filtro, se sugiere complementar el criterio de Terzaghi requiriendo que el coeficiente de uniformidad del filtro, U^f , se encuentre entre los siguientes límites:

$$2 < U^f = \frac{D_{60}^f}{D_{10}^f} < 5 \quad (4.8)$$

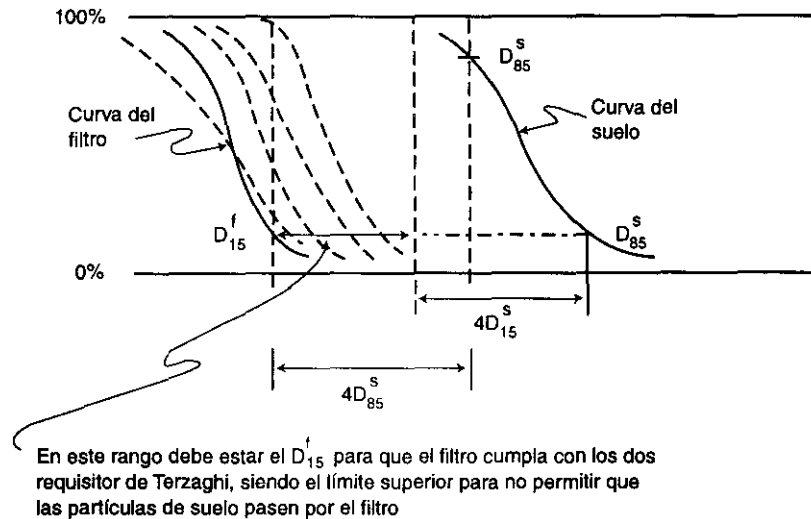


Figura 4.17 Resumen y significado de los requisitos que da Terzaghi para la selección de filtro.

Existe un requisito adicional hidráulico que deben tener los filtros según otros criterios (Lubochkov, 1955; COMECON, 1969), el cual se refiere a que la velocidad máxima esperada a la salida del mismo ($v_{m\acute{a}x}$), sea menor a la crítica del agua dentro del filtro v_{cr} (máxima velocidad del agua permisible a través del filtro sin que se dañe su estructura). Esto significa que si bien la permeabilidad del filtro es la adecuada para asegurar que el filtro no permitirá el paso de partículas del suelo por proteger a través de él, la velocidad de salida puede ser lo suficientemente grande para que cause la falla de la sección del filtro en su cara de salida. Este requisito se puede expresar diciendo que, en cualquier punto de la cara de salida del filtro, se debe cumplir:

$$\frac{v_{cr}^f}{v_{m\acute{a}x}} \geq F \quad (4.9)$$

donde v_{cr}^f a la salida del filtro se puede calcular mediante las siguientes expresiones:

a) cuando no existe tirante de agua a la salida del filtro:

$$[v_{cr}] = k \frac{\gamma_m - \gamma_w}{\gamma_w} \cdot \frac{\tan\phi - \tan\beta}{1 + \tan\phi \tan\beta} \quad (4.10)$$

b) cuando existe tirante de agua en la cara de salida:

$$[v_{cr}] = k \cos\beta \frac{\gamma_m - \gamma_w}{\gamma_w} \left[1 - \frac{\tan\beta}{\tan\phi} \right] \quad (4.11)$$

donde:

β es el ángulo que forma el talud del filtro con la horizontal

γ_m = peso volumétrico del material del filtro

γ_w = peso volumétrico del agua

k = coeficiente de permeabilidad del filtro

ϕ = ángulo de fricción interna del material de filtro

$v_{m\acute{a}x}$ depende de la dirección de las líneas de flujo y el talud aguas abajo, según se indica en el capítulo 3.

F = factor de seguridad

Combinando las condiciones (4.8) y (4.9), se puede ver si es o no necesario que el espesor total del filtro esté constituido por más de una capa de material, en cuyo caso se tiene lo que se llama *filtros graduados o filtros de varias capas*; el criterio para el diseño de estos filtros se da más adelante.

La teoría de Terzaghi ha servido como base para la mayoría de los demás criterios existentes. Así por ejemplo, el Bureau of Reclamation de los Estados Unidos, para establecer los requisitos que debieran satisfacer las granulometrías de los filtros de las presas reguladas por esa institución, fijó los límites superior e inferior de dos puntos en la curva granulométrica; estos límites, en el caso de filtros bien graduados y mezclados artificialmente, están dados por las siguientes expresiones:

$$12 < \frac{D_{50}^f}{D_{50}^s} < 58 ;$$

$$12 < \frac{D_{15}^f}{D_{15}^s} < 40 \quad (4.12)$$

Estas últimas expresiones dan resultados aceptables solamente cuando se combina con la condición de estabilidad del filtro y se fija al menos el límite superior del coeficiente de uniformidad U_f (Bear, 1972).

La fig. 4.18 muestra los criterios utilizados hoy en día por el Cuerpo de Ingenieros de los Estados Unidos de Norteamérica, los cuales son también utilizados por una gran mayoría de las instituciones públicas y privadas relacionadas a la construcción y diseño de presas de aquel país.

Criterio de Sherard-Dunningan

A través de la ejecución de la prueba NEF (*no erosion filter*), realizada en un equipo como el mostrado en la fig. 4.19, Sherard y Dunningan (1989) determinaron el tamaño de "filtro frontera", denominado D_{15b} , a partir del cual se observa que el material base que se investiga y constituye el corazón impermeable, no experimenta erosión por efecto del paso del agua. Los experimentos se llevaron a cabo en cuatro diferentes grupos de suelo:

- 1) Limos finos y arcillas cuyas partículas pasan más del 85% la malla # 200.
- 2) Limos, arenas arcillosas, limos arenosos y arcillas que pasan de 40-85% la malla # 200.
- 3) Arenas limosas y arcillosas, y arenas con gravas con menos del 15% pasando la malla # 200.
- 4) Suelos intermedios entre los tipos # 2 y 3.

Las conclusiones principales del trabajo de estos autores son las siguientes:

- 1) Para las pruebas con filtros más finos que el *filtro frontera*, no existe una erosión visible en las paredes del agujero preconstruido en el material base.
- 2) La prueba NEF da resultados realistas y se puede llevar a cabo para todo el rango de materiales impermeables que se utilizan en la construcción de núcleos impermeables de presas de tierra.
- 3) El *filtro frontera* D_{15b} que separa los filtros que cumplen, *de los que "no" cumplen la prueba NEF*, es, al igual que los límites de Atterberg y los parámetros de resistencia efectiva al cortante, único para un material impermeable dado; dicho filtro es independiente de las dimensiones del aparato de prueba usado en el laboratorio.

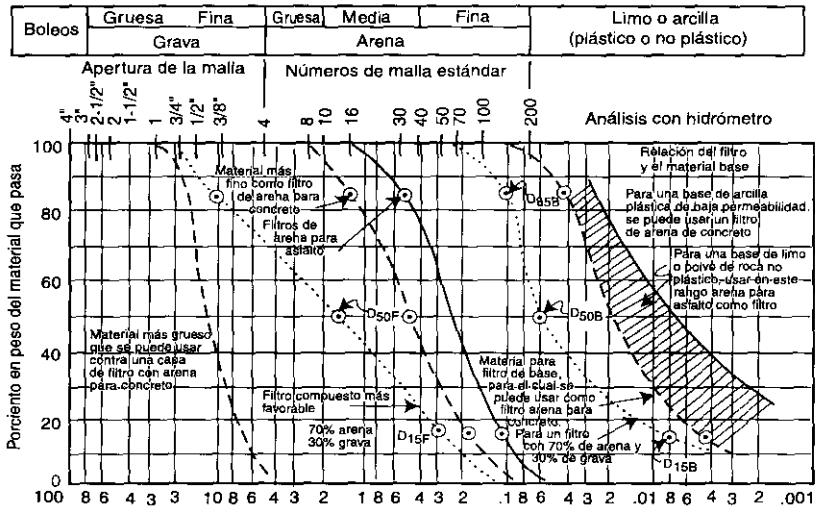


Figura 4.18 Criterio de diseño para filtros de protección.

- 1 Para evitar la pérdida de carga en el filtro $\frac{D_{15}^F}{D_{15}^B} > 4$ y la permeabilidad del filtro debe ser lo suficientemente grande para satisfacer un sistema particular de drenaje
- 2 Para evitar el movimiento de partículas de la base: $\frac{D_{15}^F}{D_{85}^B} < 5$; $\frac{D_{50}^F}{D_{50}^B} < 25$; $\frac{D_{15}^F}{D_{15}^B} < 20$;
 Para material de base muy uniforme ($C < 1.5$), D_{15}^F / D_{85}^B se puede aumentar a 6;
 Para material de base bien graduado ($C_u > 4$), D_{15}^F / D_{15}^B se puede aumentar a 40
- 3 Para evitar el movimiento del filtro dentro de las perforaciones en tubos de drenaje o juntas: $D_{85}^F / \text{ancho de la ranura} > 1.2$ a 1.4;
 $D_{85}^F / \text{diámetro de la perforación} > 1.0$ a 1.2
- 4 Para evitar la segregación, el filtro no debiera tener tamaños mayores a 3"
- 5 Para evitar movimientos internos de los finos, el filtro no debiera tener más del 5% de material que para la malla No. 200

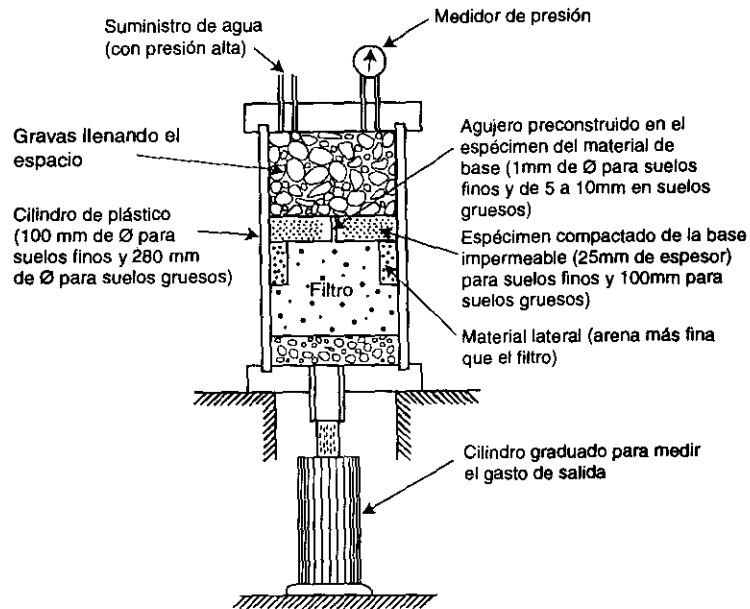


Figura 4.19 Detalles de la prueba del filtro sin erosión (fuera de escala).

Requisitos adicionales

Existen adicionalmente otros requisitos propuestos por algunos organismos e instituciones públicas para asegurar que los filtros cumplan las funciones antes señaladas (Poucell, 1982); estos requisitos son:

- 1) El tamaño máximo del material para filtro debe ser menor a 3" (7.5 cm), a fin de que la segregación sea mínima y evitar el arqueado entre partículas grandes durante la colocación.
- 2) El filtro no debe contener más de 5% de material que pasa la malla N° 200.
- 3) Las curvas de distribución granulométricas del material del filtro y del material base (que es el que se trata de proteger), deben ser aproximadamente paralelas cuando se dibujan en papel semilogarítmico.
- 4) Cuando el material base contiene un porcentaje grande de grava, el filtro debe diseñarse utilizando la porción de la curva de distribución granulométrica que es menor que la malla de 1" (2.52 cm).

- 5) El espesor mínimo del filtro debe ser de 1.0 m, a fin de que su construcción se facilite y se reduzcan los efectos de contaminación; sin embargo, el espesor del filtro deberá calcularse para que tenga la capacidad de desalojo del gasto máximo esperado que pueda salir a través de él (Marsal, 1974).
- 6) La compactación del filtro debe ser tal que alcance una densidad relativa no menor al 90%, o bien igual al especificado en la construcción de las zonas vecinas. Dicha compactación debe efectuarse con rodillo vibratorio en capas de espesor no mayor de 30 cm.
- 7) Durante la construcción es indispensable que se lleve un riguroso control de las características y especificaciones de los materiales de filtro, así como de su colocación y grado de compactación o densidad relativa, que deben cumplirse para garantizar el correcto funcionamiento del filtro.
- 8) Para prevenir el movimiento de las partículas del suelo dentro de o a través del filtro, el Cuerpo de Ingenieros del Ejército de los EUA (1955) exige se cumplan las siguientes condiciones:

$$\frac{15\% \text{ del tamaño del material del filtro}}{85\% \text{ del tamaño del suelo por proteger}} \leq 5 \quad (4.13)$$

y

$$\frac{50\% \text{ del tamaño del material del filtro}}{50\% \text{ del tamaño del suelo por proteger}} \leq 25 \quad (4.14)$$

Filtros graduados o de varias capas

Cuando se tienen materiales gruesos (como enrocamientos o boleos) sobre materiales finos erosionables (limos y arenas finas), conviene poner dos o más capas de filtros según se requiera, de manera que entre cada dos de los materiales de transición se evite la tubificación. Para estos casos tanto el Cuerpo de Ingenieros del Ejército, como el Bureau of Reclamation de los EUA, recomiendan que los materiales de los filtros y capas de protección tengan curvas granulométricas que sean más o menos paralelas entre sí; esta recomendación tiene por objeto evitar la segregación y los problemas que la misma ocasiona, como son el mal funcionamiento o taponamiento del filtro.

La figura 4.20 ilustra gráficamente esta recomendación y en ella se puede observar la gran uniformidad que, para capas delgadas de diferentes materiales en zonas de transición, deben requerirse para evitar la segregación antes señalada.

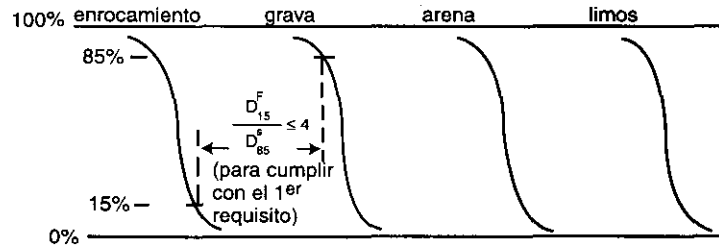


Figura 4.20 Curvas granulométricas.

Cuando se utiliza enrocamiento en los taludes aguas arriba de una presa o bordo de arcilla para la protección contra el oleaje y avenidas rápidas, se requiere tener este tipo de transición. La fig. 4.21 muestra el caso de una zona de transición para una tubería de alivio y la fig. 4.22 para un pavimento.

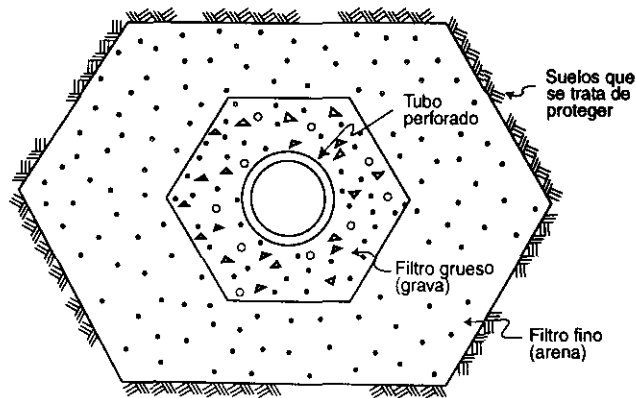


Figura 4.21 Zona de transición en un tubo dren.

Filtros para pozos y tubos ranurados

Siguiendo este mismo razonamiento señalado para el diseño de filtros en presas de tierra, para el caso de filtros alrededor de estructuras sólidas y rectas (drenes usando tuberías, por ejemplo) el Cuerpo de Ingenieros del *U.S. Army* (1955) llega a la siguiente recomendación:

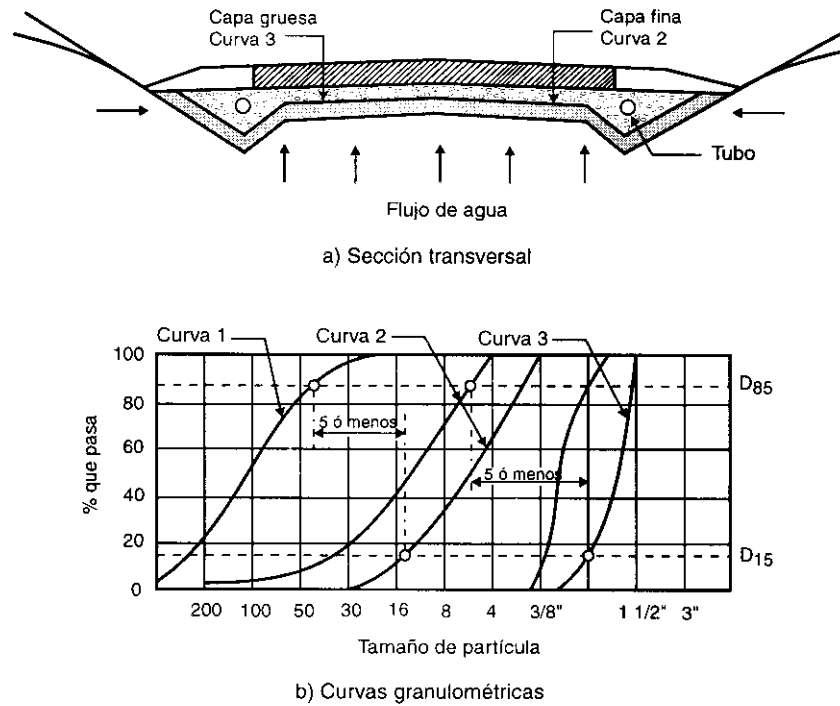


Figura 4.22 Granulometría del material utilizado en la zona de transición de la base de una carretera (Cedergren, 1989).

Para ranuras longitudinales con ancho "b":

$$\frac{D_{85}^f}{b} > 1.2 \text{ a } 1.4 \quad (4.15)$$

Para agujeros circulares de diámetro "d":

$$\frac{D_{85}^f}{d} > 1.0 \text{ a } 1.2 \quad (4.16)$$

donde D_{85}^f corresponde al 85% de la curva granulométrica del material que rodea a la tubería.

Estas recomendaciones están dadas también en la fig. 4.18.

El Bureau of Reclamation de los EUA (1973), para el caso de tubos perforados, señala que la granulometría de los materiales de filtro que circundan un tubo debe ser tal que se cumpla con la siguiente condición:

$$\frac{D_{85} \text{ del filtro más cercano al tubo}}{\text{abertura máxima del tubo - dren}} \geq 2 \quad (4.17)$$

Usos de geotextiles

En los últimos veinte años se han venido utilizando, como material de filtro, telas sintéticas permeables pero con aberturas lo suficientemente pequeñas para retener las partículas del suelo base. Esta alternativa resulta atractiva cuando no existen bancos de material granular cercanos a la obra. La simplicidad y el bajo costo de la instalación, la considerable resistencia a la tensión y el hecho de que estas telas no son susceptibles al cambio de las temperaturas, son también ventajas a favor de usar esta alternativa. Las telas sintéticas se utilizan también como separadores de materiales para evitar la interpenetración y la contaminación mutua entre suelos con diferentes propiedades o granulometrías.

Las membranas filtrantes se pueden agrupar en dos tipos:

- a) Telas sintéticas tejidas, hechas generalmente de polipropileno estabilizado (fig. 4.23).
- b) Telas sintéticas no tejidas, en las cuales las fibras sintéticas tienen arreglos aleatorios, hechas con polipropileno con, o sin protección de nylon, o de poliéster (fig. 4.24).

Cuando los geotextiles se utilizan como material de filtro, sólo son prácticos cuando el sentido del flujo es perpendicular al plano de la tela (Cedergren, 1989). En este caso el espesor del filtro es el mismo que el del geosintético, el cual es muy pequeño (del orden de milímetros); es muy importante por tanto asegurar que no existan perforaciones, desgarres o espacios entre los traslapes de los segmentos, ni aberturas muy grandes entre los filamentos de la tela, ya que de lo contrario puede haber una pérdida importante del suelo que se trata de proteger. La fig. 4.25 muestra un ejemplo típico donde el material geosintético se utiliza para evitar la remoción del material fino en

una zona sujeta a oleaje y corrientes de agua.. La fig. 4.26 muestra otros ejemplos donde las telas geosintéticas se utilizan como simples separadores o material de filtro.

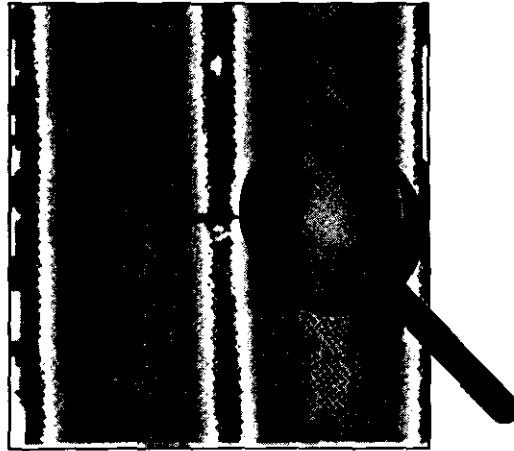


Figura 4.23 Geotextil tejido.

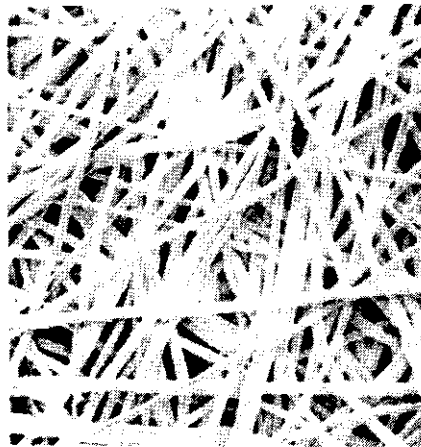


Figura 4.24 Geotextil no tejido.

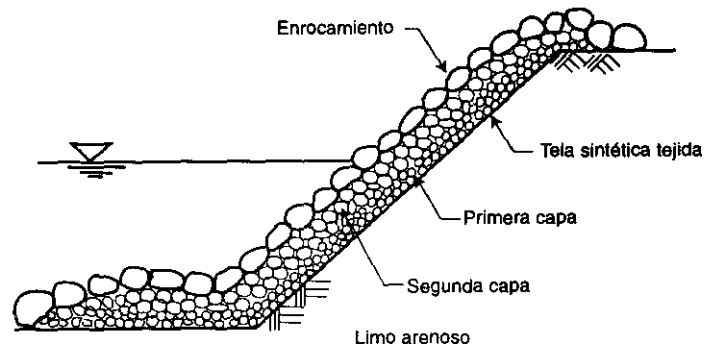
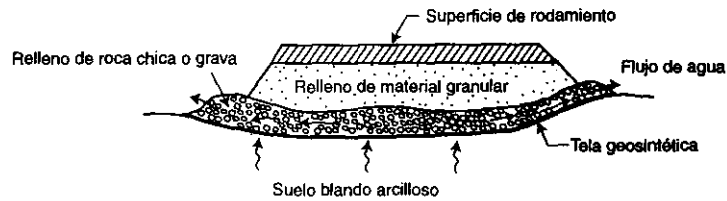
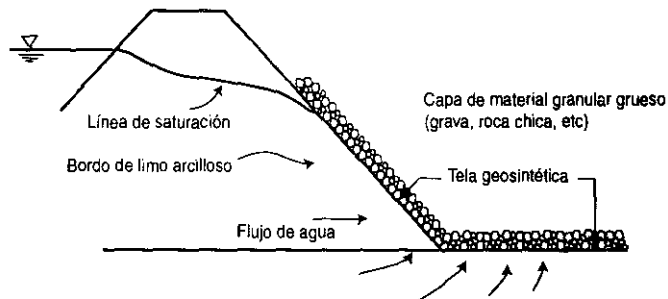


Figura 4.25 Uso de tela sintética tejida para proteger un borde contra la acción del oleaje.



- a) Uso de geotextil en un camino rural para separar el suelo blando de la roca y permitir el flujo ascendente del agua.



- b) Uso de geotextil para proteger contra la erosión por flujo de agua el talud y el pie de aguas abajo de un borde.

Figura 4.26 Uso de geotextil para proteger contra la erosión por flujo de agua el talud y el pie aguas abajo de un borde.

La selección de geotextiles para usarse como filtros se basa en la comparación de los tamaños de partículas en el suelo base con la distribución de poros de la tela y en pruebas de permeabilidad. La distribución de poros se determina haciendo pruebas de cribado con esferas calibradas de vidrio, haciendo pruebas de ascensión capilar o mediante análisis de fotografías (Auvinet, 1982). Las curvas de distribución de poros son muy semejantes a las obtenidas en las curvas de distribución granulométricas; la fig. 4.27 presenta algunas curvas típicas de distribución de poros. El orden de magnitud de la permeabilidad de estos materiales es de 10^{-1} cm/s a 10^{-2} cm/s.

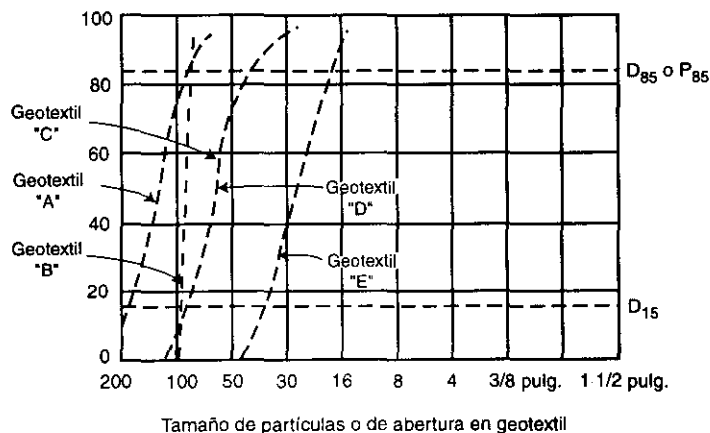


Figura 4.27 Curvas "graulométricas" o de tamaños de abertura en geotextiles para usarse como filtros (Cedergren, 1989).

Cedergren (1989) sugiere el siguiente criterio de selección de tamaños de poro en la membrana para evitar la tubificación:

$$\frac{85\% \text{ del tamaño del poro de filtro } (P_{85}^F)}{85\% \text{ del tamaño del suelo } (D_{85}^S)} \leq 1 \quad (4.18)$$

Ogink (1976) recomienda los siguientes criterios:

$$\frac{P_{90}^F}{D_{90}^S} < 1 \text{ para geotextiles tejidos} \quad (4.19)$$

$$\frac{P_{90}^F}{D_{90}^S} < 1.8 \text{ para geotextiles no tejidos} \quad (4.20)$$

Paute (1977) señala que los geotextiles tienen una tendencia más pronunciada a taponarse que los filtros granulares; la uniformidad de los poros es en este caso una desventaja. Las telas no tejidas, que presentan una mayor variedad de tamaños de poro, parecen comportarse mejor que los tejidos debido a que por lo menos los poros más grandes permanecen abiertos.

Auvinet (1982) concluye que las telas sintéticas presentan las siguientes ventajas y limitaciones:

- 1) Su capacidad de retención de partículas de suelo es muy adecuada y probablemente superior y más confiable que la de los filtros granulares.
- 2) Su capacidad drenante es alta en sentido transversal pero muy baja o casi nula en sentido longitudinal, por lo que en la mayoría de sus aplicaciones deben asociarse con un material granular.
- 3) Su susceptibilidad al taponamiento bajo ciertas condiciones puede constituir una limitación seria al uso de este tipo de filtros.
- 4) La continuidad de la protección obtenida con estos materiales depende de un control cuidadoso durante la construcción.
- 6) Su resistencia a la tensión no constituye una ventaja significativa cuando se producen grietas. Su capacidad autosellante es nula.

Una limitación adicional que da el Cuerpo de Ingenieros del Ejército de los EUA (1986), es que dado que se sabe muy poco sobre su comportamiento a largo plazo, **no** es recomendable su uso en áreas poco accesibles, en las caras de aguas arriba de las presas de tierra o para envolver mallas de piezómetros.

Finalmente, un cuidado que se debe tener cuando se utilizan geotextiles en taludes, es asegurar que el coeficiente de fricción entre la tela y el material adyacente es suficientemente grande para evitar la formación de un plano de debilidad.

Ejercicios del Capítulo IV

4.1 El suelo de cimentación de una presa tiene la siguiente distribución granulométrica.

Tamaño de los granos D en mm	Porcentaje de material menor que D (%)
1.8	100
0.13	90
0.078	70
0.057	50
0.041	30
0.035	20
0.029	10

Muestre, en una gráfica semilogarítmica, el rango de las curvas granulométricas prácticas que deberá tener el material de un filtro para satisfacer los criterios de Terzaghi.

4.2(a) Obtenga, en los términos del gradiente hidráulico "i" y del peso volumétrico del agua γ_w , la fórmula que da la fuerza de flujo sobre un volumen unitario de suelo.

(b) Deduzca la fórmula que da el gradiente hidráulico crítico para un flujo dirigido verticalmente hacia arriba, en términos de: 1) la gravedad específica de sólidos "Ss", 2) la porosidad "n", y 3) el peso volumétrico del agua " γ_w ".

(c) Sustituya en la fórmula anterior (del gradiente hidráulico crítico) valores numéricos típicos y demuestre que la unidad representa un valor promedio razonable del gradiente crítico.

- 4.3 (a) Establezca los criterios de Terzaghi para el diseño de filtros protectores.
- (b) Diga cuál de estos criterios es más importante y por qué.
- (c) ¿Considera usted necesario proveer de un filtro entre las zonas aguas arriba y aguas abajo del problema 3.15? Explique sus razones.
- 4.4 (a) Determine las fuerzas de flujo por unidad de volumen que actúan en la dirección de las líneas de flujo.
- (b) Considerando un flujo ascendente, determine el gradiente hidráulico crítico para una arena que tiene una gravedad específica de 2.65 y una porosidad de $n = 0.35$.
- 4.5 (a) Explique el criterio de Lane para analizar la seguridad contra tubificación en presas.
- (b) ¿Qué ventajas tiene este criterio sobre el método original de Bligh?
- (c) ¿Cuál es la objeción principal contra estos dos procedimientos?
- (d) ¿Qué factor importante se refleja empíricamente en estos dos métodos y que no toma en consideración el análisis de la red de flujo?
- 4.6 (a) ¿Qué medidas tomaría para tener un control adecuado de las presiones que se producen bajo la base de una presa de concreto por gravedad?
- (b) Dibuje un ejemplo en el que las condiciones geológicas puedan ser tales que estas medidas resulten insuficientes contra las presiones de la cimentación.
- (c) ¿Cómo se protegería usted contra detalles geológicos desconocidos que pudieran originar condiciones peligrosas en la cimentación o en las laderas de una presa?

5 PROBLEMAS DE FLUJO NO ESTABLECIDO

5.1 Vaciado y llenado rápido de una presa

Este tipo de flujo se presenta tanto en el vaciado como en el llenado rápido de una presa. Consideremos primeramente el VACIADO RÁPIDO y más adelante se analizará el caso de llenado rápido.

5.1.1 Vaciado rápido

El abatimiento del nivel del agua dentro del cuerpo de una presa con una frontera vertical aguas abajo* ($\lambda = 90^\circ$), se muestra en la figura 5.1.

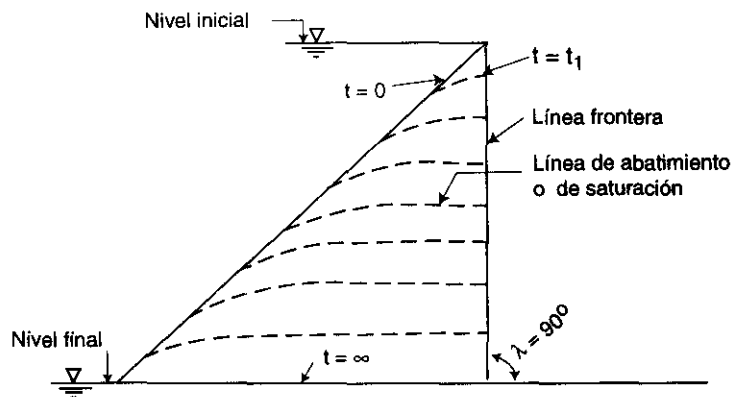


Figura 5.1 Abatimiento del nivel del agua en el cuerpo de una presa en función del tiempo.

* Esta puede marcar la división a partir de la cual el agua se va hacia el lado aguas arriba o hacia el lado aguas abajo en el caso de una presa homogénea; puede marcar también la división de la zona impermeable cuando ésta existe en el corazón de una presa.

Obsérvese en esta figura que las líneas de saturación o abatimiento allí obtenidas (o sea las líneas que señala el nivel del agua para varios tiempos) constituyen líneas de superficie libre, ya que ni son de flujo ni equipotenciales y la presión que actúa sobre ellas es la atmosférica.

La red de flujo al inicio del abatimiento ($t=0$) se muestra en la figura 5.2, y la correspondiente a un tiempo "t" cualquiera, en la figura 5.3.

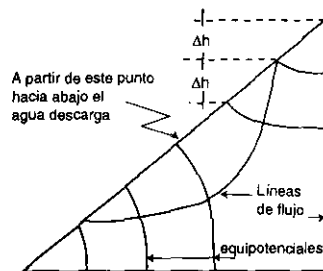


Figura 5.2 Red de flujo al inicio del abatimiento del nivel del agua.

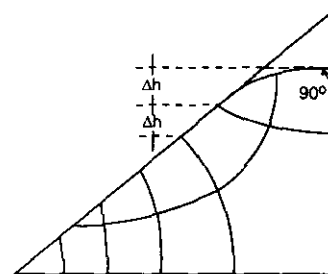


Figura 5.3 Red de flujo después de un tiempo "t" de haberse iniciado el abatimiento.

Obsérvese en las figuras anteriores que el Δh de la figura 5.3 es diferente (en este caso menor) al de la figura 5.2; de hecho la carga total h disponible va disminuyendo a medida que t aumenta.

En el caso de que $\lambda < 90^\circ$ (λ es el ángulo de talud frontera aguas abajo), el nivel superior del agua después de haberse iniciado el vaciado, no llega horizontal a la frontera impermeable, sino que forma un ángulo $\rho < \lambda$ como se muestra en la figura 5.4.

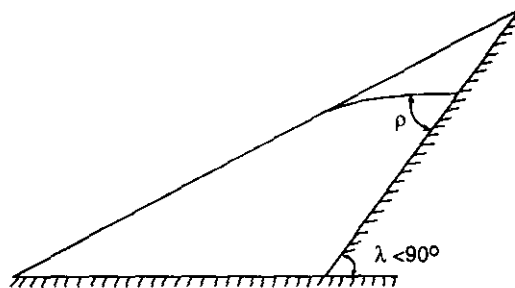


Figura 5.4 Nivel superior del agua después de iniciarse el vaciado cuando $\lambda < 90^\circ$.

Para este caso en que $\lambda < 90^\circ$, la red de flujo al inicio del vaciado tiene la forma mostrada en la figura 5.5.

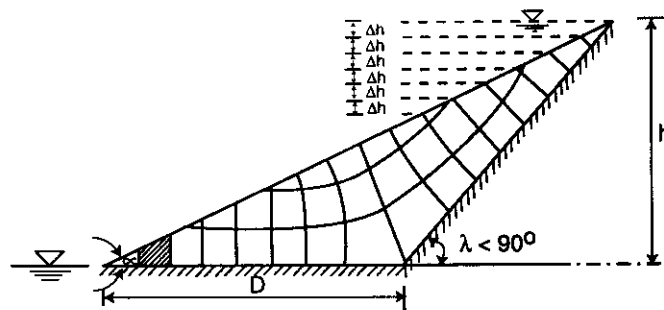


Figura 5.5 Red de flujo correspondiente al inicio del vaciado rápido cuando $\lambda < 90^\circ$.

Como se puede observar en esta última figura, la velocidad de salida al pie del talud aguas arriba (considerando por ejemplo el cuadrado sombreado), es prácticamente $v = k \tan \alpha$, ya que $i = \tan \alpha$.

Para analizar más a detalle este caso, es conveniente definir como porosidad efectiva \bar{n} a la relación que existe entre el volumen de vacíos que se puede drenar, entre el volumen total del suelo, es decir:

$$\bar{n} = \frac{V_{\text{aire}}}{V_{\text{total}}} = \frac{V_a}{V_t}$$

Para la mayor parte de las arenas \bar{n} se encuentra entre 0.1 a 0.2; para análisis preliminares se puede considerar un valor promedio. En general \bar{n} se determina en el laboratorio utilizando muestras inalteradas de arena, que al inicio se saturan; posteriormente se drenan y se determina el grado de saturación G_w en cada una; conociendo G_w se obtiene la relación de aire $G_a = 1 - G_w = \text{Vol. aire}/\text{Vol. vacíos}$, es decir:

$$G_a = \frac{V_a}{V_v}; \text{ o bien } V_a = V_v G_a$$

Por tanto, al llevar esta última expresión a la primera antes señalada, se tiene:

$$\bar{n} = \frac{V_v}{V_t} G_a = n G_a \quad (5.1)$$

donde n es la porosidad del suelo.

Agrandando la escala de la figura 5.5, en cualquier instante del flujo los cuadrados cerca de la línea de saturación serían como los mostrados en la figura 5.6.

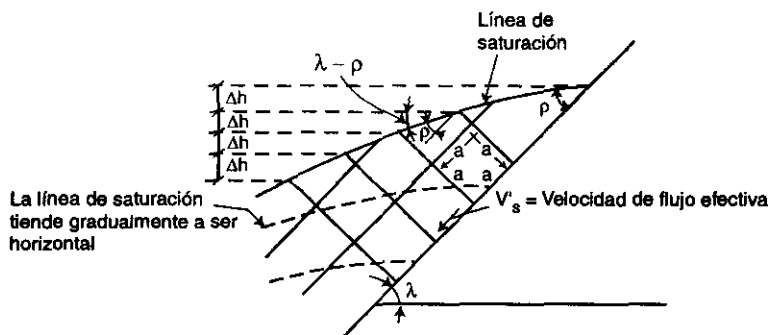


Figura 5.6 Detalle del abatimiento del nivel superior del agua cuando $\lambda < 90^\circ$.

De acuerdo con esta figura tenemos:

$$i = \frac{\Delta h}{a} \quad (5.2)$$

$$a = \frac{\Delta h}{\text{sen}(\lambda - \rho)} \cos \rho \quad (5.3)$$

La velocidad de flujo efectiva que considera sólo la porosidad efectiva ya señalada es, cerca de la frontera impermeable (ver figura 5.6), la siguiente:

$$v_s = \frac{ki}{n} = k_s i \quad (5.4)$$

donde:

$$k_s = \text{coeficiente del flujo} = k / \bar{n}$$

La velocidad de descarga seguirá siendo $v_d = ki$; ahora bien, de la ecuación (5.3) se tiene:

$$\Delta h = \frac{a \operatorname{sen}(\lambda - \rho)}{\cos \rho} \quad (5.5)$$

y llevando a la ecuación (5.2) se tendrá:

$$i = \frac{\Delta h}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\lambda - \rho)}{\cos \rho} \quad (5.6)$$

En esta última expresión se puede observar que si $\rho = \lambda$ el valor de $i = 0$ lo que implica que no puede haber flujo; de aquí se concluye que $\rho \neq \lambda$ cuando $\lambda < 90^\circ$. Para el caso de que $\rho = \lambda = 90^\circ$, al aplicar la ecuación (5.6) se obtiene una indeterminación ya que tanto el numerador como el denominador son cero.

Para este último caso la red de flujo cerca de la parte superior es como se muestra en la figura 5.7. En esta figura se puede observar que, a medida que el abatimiento se lleva a cabo, la velocidad va cambiando en un punto dado debido a que el gradiente hidráulico va cambiando. Así, el gradiente hidráulico en el punto A al inicio del abatimiento es muy diferente después de un lapso de tiempo "t", ya que la carga de agua va variando conforme la línea superior va bajando. Precisamente el significado de la indeterminación de "i" cuando $\rho = \lambda = 90^\circ$, es que el mismo va variando en cada punto a medida que se produce el abatimiento.

El porcentaje del área drenada con respecto a la total se puede obtener a partir de la figura 5.8.

De acuerdo con esta figura la cantidad de agua que se drena en el tiempo dt está dada por la siguiente expresión (ver el área sombreada en la figura 5.8):

$$dQ = \frac{dh}{2} (D + h \cot \lambda) \bar{n} \quad (5.7)$$

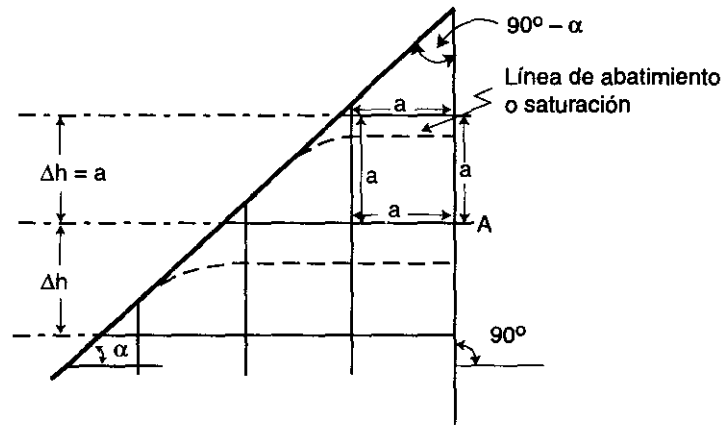


Figura 5.7 Variación de la línea de abatimiento para $\lambda = 90^\circ$.

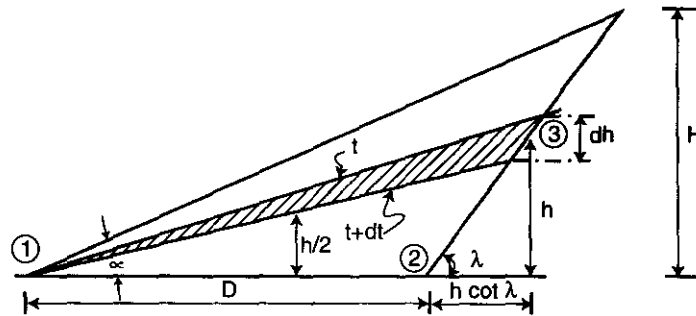


Figura 5.8 Área drenada en un lapso de tiempo dt .

Al considerar que la ley de Darcy se cumple para el flujo a través del volumen comprendido entre los puntos 1, 2 y 3 de la figura 5.8 (o sea considerando el gasto que falta drenarse), se tiene:

$$q = \frac{dQ}{dt} = kAi = k \frac{h}{2} \frac{h}{D + h \cot \gamma} \quad (5.8)$$

En la expresión anterior se está tomando como área media a $h/2 \times 1$ (considerando un ancho unitario) y como gradiente hidráulico efectivo a:

$$i = \frac{h}{D + h \cot \lambda}$$

Llamando:

$$T = \frac{tkH}{nD^2}$$

$$J = \frac{H}{D} \cot \lambda$$

y

$$U = \frac{\text{área drenada}}{\text{área inicial total}}$$

Al resolver e integrar las ecuaciones (5.7) y (5.8), de acuerdo con W.L. Shannon (ver discusión del artículo "Investigation of Drainage Rates Affecting Stability of Earth Dams", por F.H. Kellogg, Trans del ASCE, Vol. 113, 1948), se obtiene la expresión siguiente:

$$T = \frac{U}{1-U} + 2 J \ln \frac{1}{1-U} + J^2 U \quad (5.9)$$

La gráfica de esta expresión tiene la misma forma que se obtiene en la teoría de consolidación de Terzaghi, según se puede observar en la figura 5.9. Por tanto, para un tiempo cualquiera t , se puede obtener el factor T y de la ec. (5.9) o de la gráfica T versus U (fig. 5.9), se obtiene el U correspondiente.

5.1.2 Llenado rápido

La figura 5.10 muestra la red de flujo correspondiente a un tiempo t después del llenado rápido y la figura 5.11 muestra la evolución de la línea de saturación de llenado, conforme se incrementa el tiempo contado a partir del inicio.

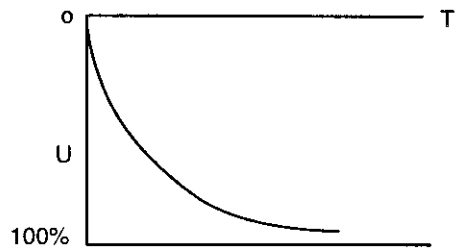


Figura 5.9 (a) Gráfica de U versus T en escala aritmética.

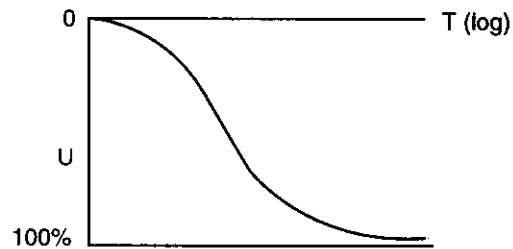


Figura 5.9 (b) Gráfica de U versus T en escala semilogarítmica.

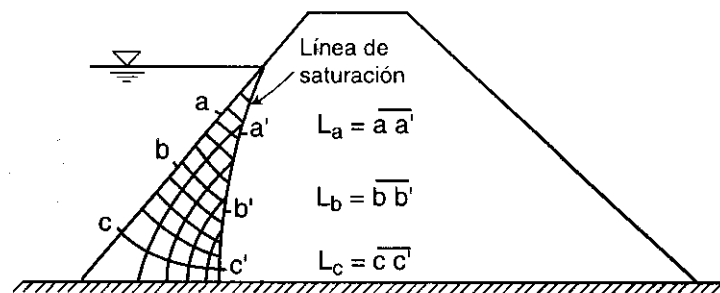


Figura 5.10 Red de flujo correspondiente a un tiempo " t " considerado a partir de que se realizó el llenado rápido.

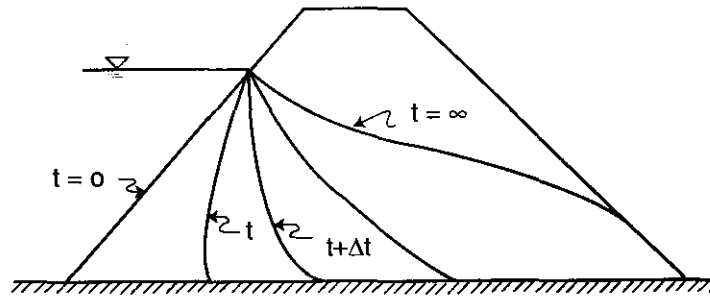


Figura 5.11 Curvas que muestran la secuencia de la línea frontera de saturación con el tiempo.

A fin de conocer el tiempo en que se realiza un cierto porcentaje de saturación (por ejemplo el 50%), se pueden suponer líneas rectas como las mostradas en la figura 5.12. La aproximación que así se obtiene es bastante buena desde el punto de vista práctico.

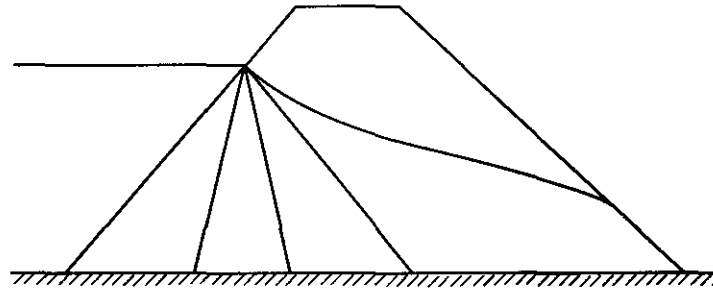


Figura 5.12 Aproximación de las líneas fronteras a través de líneas rectas.

En el caso de la saturación gradual, exceptuando al principio donde la velocidad teóricamente es infinita, las velocidades que se tienen son finitas; conviene señalar que tanto la forma de la curva de saturación como el valor de ρ , son función de k . De hecho ρ , "i" y v_s' (y consecuentemente k) están relacionados entre sí como se puede ver en las expresiones (5.4) y (5.6) y en la figura 5.13.

De acuerdo con la figura 5.13 b se tiene:

$$i = \frac{\Delta h}{a} = \tan \rho \tag{5.10}$$

referencia a la fig. 5.10 y suponiendo que las distancias $\overline{aa'} = L_a$, $\overline{bb'} = L_b$ y $\overline{cc'} = L_c$, si las relaciones L_a/i_a , L_b/i_b , L_c/i_c no son aproximadamente iguales, hay que corregir la línea de saturación aumentando o disminuyendo las longitudes "L" donde se necesite; el procedimiento se repite hasta hacer los ajustes necesarios para tener la proporcionalidad buscada. Teniendo el "i" correcto se tiene v_s' y consecuentemente se puede tener

el lapso de tiempo $\Delta t = \frac{\Delta L}{v_s'}$ correspondiente al desplazamiento de un punto a otro de la línea de saturación.

A partir del análisis del vaciado rápido, Shannon (1948) utiliza la variación de la función U (ver ecuación 5.9) con respecto al tiempo para obtener la siguiente expresión de v_s' :

$$v_s' = \frac{k}{100 \frac{n}{\text{sen} \rho} \left[\frac{h}{D} \right]^2} \frac{\partial U}{\partial T} \quad (5.2)$$

donde ρ es el ángulo de la línea de saturación con la horizontal.

Por lo tanto, dibujando la curva $\partial U/\partial T$ vs U, se puede también obtener v_s' en cualquier momento.

Para el análisis del vaciado rápido se puede hacer la misma aproximación de las líneas curvas por rectas, como se muestra en la figura 5.14.

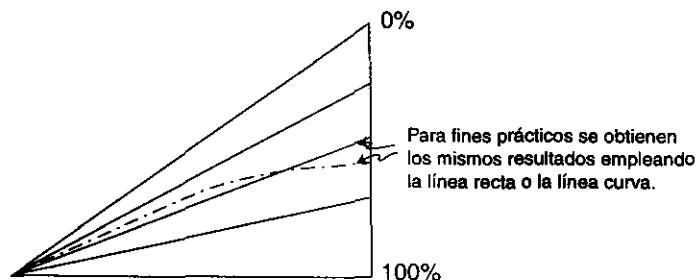


Figura 5.14 Aproximación con líneas rectas de la línea superior de vaciado rápido.

Como se puede observar en la figura 5.15, esta aproximación es semejante a la utilizada en la teoría de consolidación.

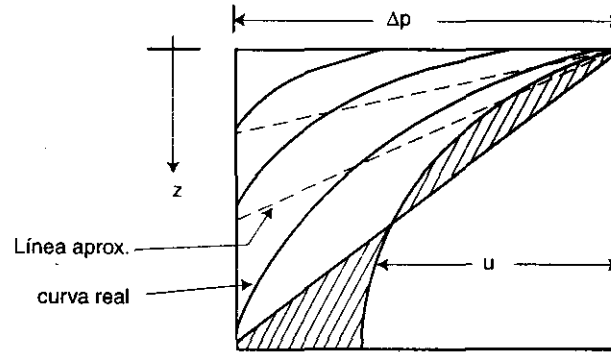


Figura 5.15 Aproximación utilizada en la teoría de consolidación.

En el caso que $\lambda < 90^\circ$, la aproximación se puede hacer en la forma señalada en la fig. 5.16.

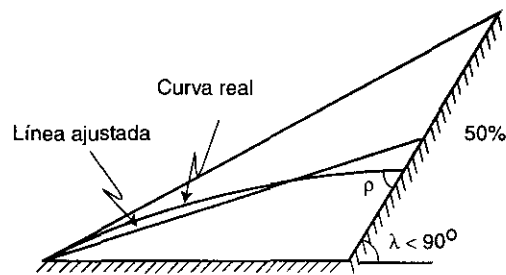


Figura 5.16 Aproximación utilizada en el caso de $\lambda < 90^\circ$.

5.2 Drenaje en pavimentos de aeropuertos

Cuando la base de los pavimentos se llega a saturar (como consecuencia de lluvias torrenciales, aumento del nivel freático, impermeabilización por congelamiento o taponamiento por finos en la parte superior de la base, etc.), el peligro de un rápido deterioro es muy grande. Es por tanto conveniente analizar el drenaje de las bases de

los pavimentos a partir de los conceptos de flujo no establecido. Para ello se considerará primeramente el caso de una base horizontal y posteriormente se verá el caso de una base inclinada.

Base horizontal

Haciendo las suposiciones simplificatorias mostradas en la figura 5.17 (representación del drenaje gradual por líneas rectas, descarga del agua sólo por el lado derecho y base totalmente saturada al inicio [$t=0$]), consideremos primeramente la forma como ocurre el drenaje de 0 al 50%, es decir, el drenaje en el triángulo 1-2-3 de dicha figura.

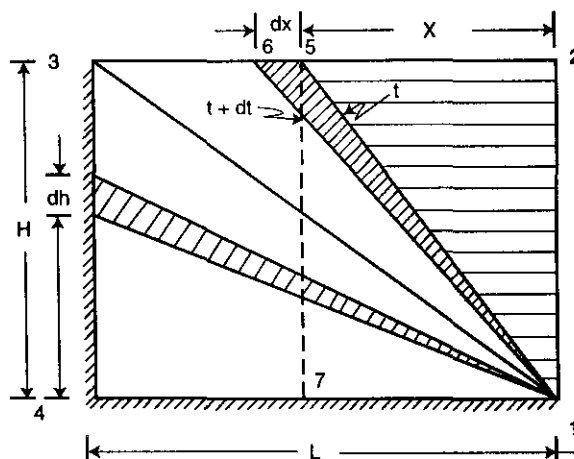


Figura 5.17 Representación del drenaje en una base horizontal de pavimento.

De la figura anterior se puede observar que la cantidad de agua que puede drenarse en la diferencia de tiempo dt , está dada por el área del triángulo sombreado 1-5-6, multiplicada por la porosidad efectiva, es decir:

$$dQ = \frac{\bar{n} H dx}{2} \quad (5.13)$$

Por otro lado, el flujo a través del triángulo 1-5-7 se puede obtener a partir de la ley de Darcy y de la definición de gasto por unidad de tiempo, es decir:

$$q = \frac{dQ}{dt} \quad (5.14)$$

$$y \quad q = kiA = k \frac{H}{x} \cdot \frac{H}{2} = \frac{kH^2}{2x} \quad (5.15)$$

Obsérvese en esta ecuación (5.15) que se está considerando como gradiente hidráulico H/x y como área media $H/2$.

Se puede tener una mayor flexibilidad a esa expresión si hacemos el gradiente hidráulico igual a:

$$i = \frac{H}{c_1 x}$$

donde c_1 es una coeficiente (constante) y el área a:

$$A = \frac{H}{c_2}$$

donde c_2 es también otro coeficiente igual o diferente a 2.

Si además llamamos a $c = c_1 c_2$, la ecuación (5.15) quedará como sigue:

$$\frac{dQ}{dt} = k \frac{H^2}{cx} \quad (5.16)$$

Llevando las ecuaciones (5.13) y (5.14) a la ecuación (5.15) se obtiene:

$$dQ = \frac{kH^2}{2x} dt = \frac{\bar{n}H dx}{2} \quad (5.17)$$

Separando variables e integrando, se tendrá:

$$kH^2 t = \bar{n}H \frac{x^2}{2} + \bar{C} \quad (5.18)$$

donde C = constante de integración.

Puesto que para $t=0$, $x=0$, la constante (C) es igual a cero, de la Ec. (5.18) se obtiene:

$$t = \frac{\bar{n}x}{2kH} \quad (5.19)$$

Si utilizamos la ecuación (5.16) en vez de la ecuación (5.15) se tendrá:

$$t = \frac{c\bar{n}x^2}{4kH} \quad (5.20)$$

Llamando nuevamente:

$$U = \frac{\text{área drenada}}{\text{área total}} \quad (5.21)$$

para $U \leq 50\%$ se tiene:

$$U = \frac{x \frac{H}{2}}{HL} = \frac{x}{2L} \quad (5.22)$$

Por otro lado definiendo el factor tiempo T a:

$$T = \frac{2tkH}{c\bar{n}L^2} \quad (5.23)$$

al llevar las ecuaciones. (5.22) y (5.23) a la ecuación (5.20) resulta:

$$T = 2U^2 \quad (5.24)$$

Esta ecuación es válida para $U \leq 50\%$. Para $U > 50\%$ se obtiene, de manera análoga, la siguiente expresión:

$$T = \frac{U}{2 - 2U} \quad (5.25)$$

Como se podrá observar, las ecuaciones (5.24) y (5.25) se pueden emplear de manera semejante a las utilizadas en la teoría de consolidación por Terzaghi para el cálculo del factor tiempo T en términos de U .

Base Inclinada

En el caso de una base inclinada, se puede hacer un razonamiento análogo al señalado para la base horizontal, pero introduciendo el factor pendiente.

$$S = \frac{H}{L \tan \alpha} \quad (5.26)$$

El significado de H , L y α se muestra en la fig. 5.18.

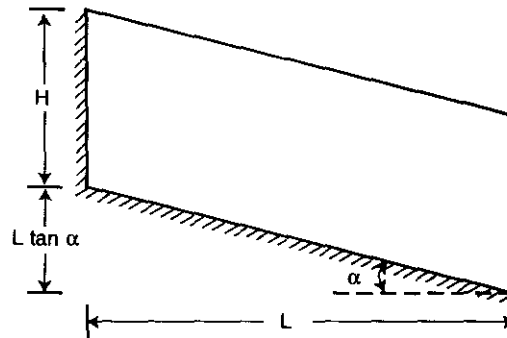


Figura 5.18 Base inclinada de un pavimento.

Las ecuaciones que resultan en este caso son las siguientes:

a) para $U \leq 50\%$

$$T = 2US - S^2 \ln \frac{S+2U}{S} \quad (5.27)$$

b) para $U > 50\%$

$$T = S + S \ln \frac{2S - 2US + 1}{(2 - 2U)(S + 1)} - S^2 \ln \frac{S + 1}{S} \quad (5.28)$$

Si se grafican los valores de $U\%$ versus el factor tiempo T , se obtendrán las curvas mostradas en la fig. 5.19. Es importante notar en esta figura que el factor S (ecuación 5.26) es menor a medida que la pendiente (ángulo α) es mayor.

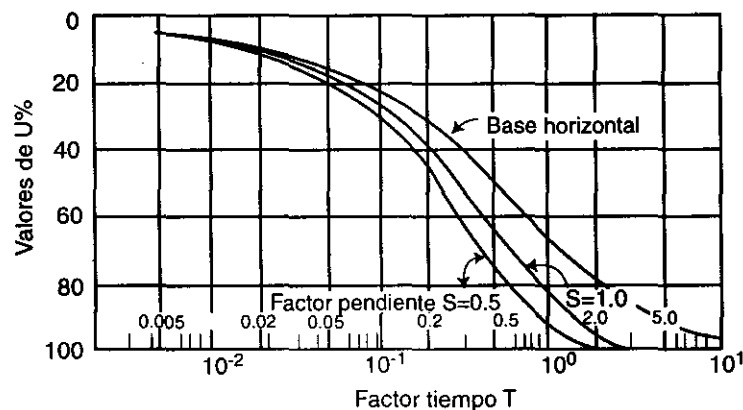


Figura 5.19 Curvas típicas del factor tiempo.

Se realizaron varias pruebas en modelos de laboratorio y varios estudios de campo para verificar los valores dados por esta teoría; en términos generales, los valores observados experimentalmente resultaron muy similares a los estimados en la teoría, según se puede ver en la gráfica de la figura 5.20. Las diferencias que se tuvieron se debieron en parte al "drenaje secundario" (agua almacenada que se drena más tarde) y a que las partículas de limo que existieron en el campo hicieron que el material de prueba fuera en realidad más impermeable. Existen en general, además, otros factores que pueden influir en estas diferencias, tales como la viscosidad del agua que hace que ésta sea retenida más tiempo, la estratificación que hay en el campo que hace que el material en realidad sea anisotrópico, e incluso la presencia de algunos errores experimentales.

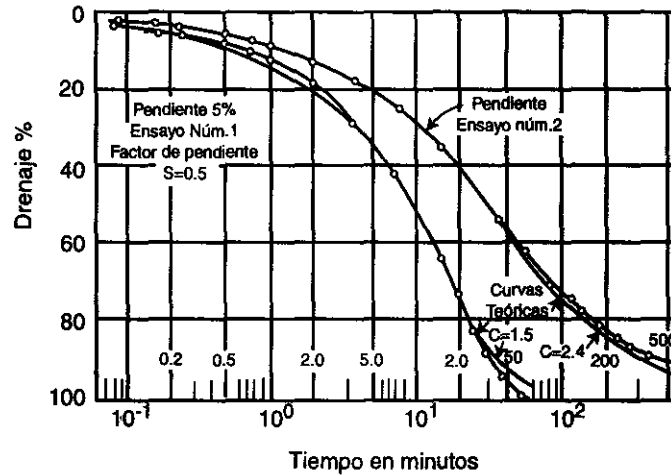


Figura 5.20 Comparación de las curvas teóricas de drenaje con los resultados de los ensayos de laboratorio.

Haciendo ahora referencia al valor de c , experimentalmente dicho valor se encuentra entre 1.5 y 2.4, teniendo un promedio de 2.0. La figura 5.21 muestra los resultados obtenidos a partir de modelos con pendientes diferentes. La curva que allí aparece se puede representar por la siguiente expresión:

$$c = 2.4 - \frac{0.8}{\sqrt{S}} \quad (5.29)$$

En general, se recomienda que los drenes se proyecten de manera que se alcance 50% del drenaje en un plazo no mayor de diez días. La forma de obtener el t_{50} requerido para alcanzar dicho drenaje, es empleando cualquiera de los siguientes procedimientos:

a) A partir de la ecuación (5.23) se tiene:

$$t_{50} = \frac{cnT_{50}L^2}{2kH} \quad (5.30)$$

En esta expresión el valor de c se obtiene de la figura 5.21 y el T_{50} de la figura 5.22; el resto de los parámetros se obtiene de la geometría del material empleado para el drenaje.

b) Usando la fórmula simplificada obtenida para el caso $T_{50} = 0.5$ y $c = 2$, la cual resulta:

$$t_{50} = \frac{\bar{n}L^2}{2k(H + L \tan \alpha)} \quad (5.31)$$

Esta última expresión es utilizada por el Cuerpo de Ingenieros de EUA y da una aproximación dentro de $\pm 10\%$.

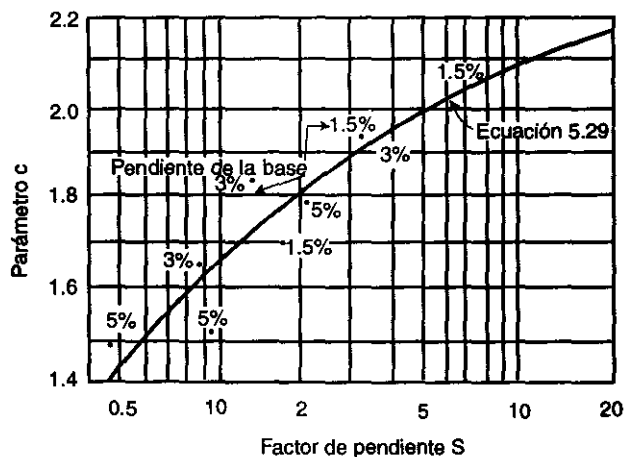


Figura 5.21 Relación entre el factor de pendiente y el parámetro c , obtenida de los ensayos sobre modelos con viscosidad.

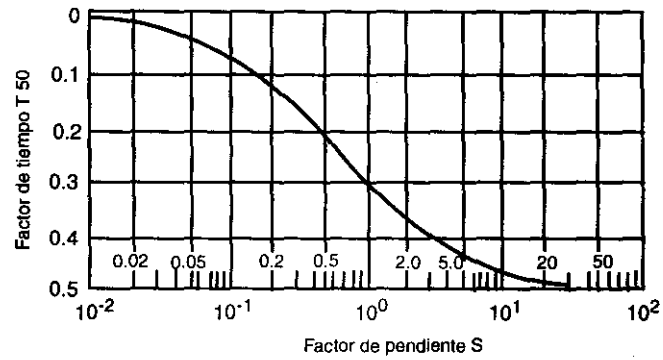


Figura 5.22 Relación entre el factor pendiente y el factor tiempo para un drenaje del 50%.

Ejercicios del capítulo V

5.1 Se desea construir un almacenamiento de agua y para ello es necesario construir un dique con una sección como la mostrada en la figura 1. El material que se empleará en el dique es el que resulte de la excavación para el almacenamiento.

Dado que no existe en el lugar material que permita instalar un corazón impermeable, se ha pensado poner un pavimento bituminoso que proteja el talud aguas arriba. Abajo de este pavimento irá un dren de arena que se continuará a lo largo de la base del dique a fin de permitir drenaje hacia el pie del talud aguas abajo.

Determine la relación que existe entre el tiempo transcurrido y la elevación del nivel de agua dentro del dren de arena, haciendo las siguientes suposiciones:

1. Suponer que el dren de arena en toda su longitud se satura totalmente como consecuencia de un rompimiento del pavimento, justamente abajo del nivel máximo de almacenamiento; el nivel de agua dentro del dren, en estas condiciones, se encuentra a la misma elevación que el nivel máximo del almacenamiento.
2. Para un tiempo $t = 0$, el nivel del agua en el almacenamiento se baja repentinamente a una elevación menor de donde se rompió el pavimento.
3. Tanto el terraplén como el material de la cimentación tienen permeabilidad que son considerablemente más bajas que el dren de arena.

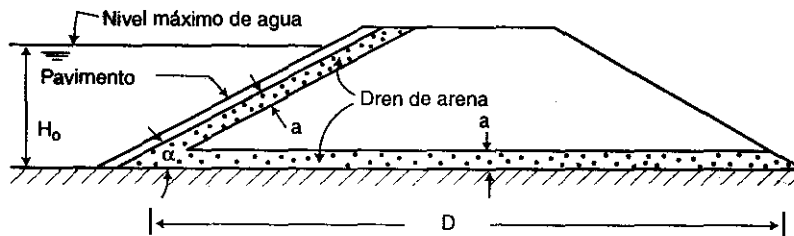


Figura 1

5.2 En la figura 2 se muestra la sección permeable aguas arriba de una presa, donde $k_{\text{máx}} = 4k_{\text{mín}}$. Considerando que el nivel de agua bajó repentinamente de la elevación de 22.50 m a la elevación 0.00:

a) Dibuje la red de flujo para la condición inmediata después del vaciado rápido. Suponga que el material de esta sección aguas arriba es incompresible y que se encuentra totalmente saturado. Para tal fin, utilice un número de equipotenciales entre 12 y 16 y una escala 1:300.

b) Para esta red determine y dibuje la fuerza de flujo por unidad de volumen a lo largo de la línea AB.

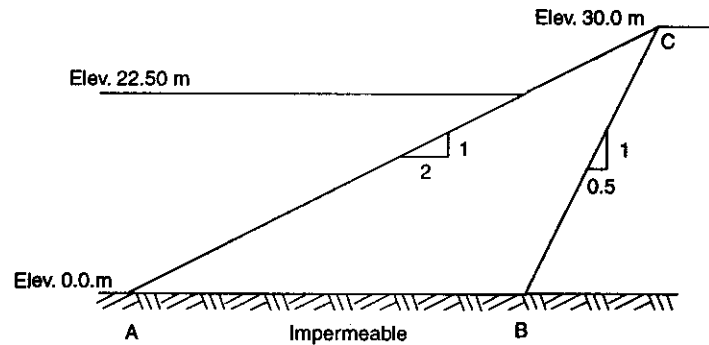


Figura 2

5.3 La pista de un aeropuerto tiene 90.0 m de ancho y está construida sobre una subrasante de arcilla. La base tiene un espesor de 0.75 m y está constituida por arena y grava limpia con un coeficiente de permeabilidad promedio de 100×10^{-4} cm/seg y una porosidad efectiva de 0.1. Las pendientes transversales de la pista son de 1.5%, con el punto más alto en el centro del claro.

a) Suponiendo que la base se satura totalmente y después se drena libremente a través de drenes colocados a lo largo de las orillas, dibuje una curva que muestre la variación del drenado en función del tiempo hasta alcanzar el 50% del drenado. De acuerdo con las condiciones dadas, el parámetro "c" (que interviene en la derivación teórica de la velocidad de drenaje) tiene un valor de 1.65.

b) Compare el tiempo requerido para alcanzar el 50% del drenado, obtenido en el inciso anterior, con el tiempo requerido para obtener ese mismo drenado pero calculado con la siguiente fórmula aproximada:

$$t_{50} = (\bar{n}L^2) / [2k (H + L \tan \alpha)]$$

c) ¿Considera usted satisfactoria la velocidad con que se drena la base de la pista aquí señalada?

5.4 Partiendo de lo mostrado en la figura 5.8, y tomando en cuenta las definiciones de los parámetros T, J y U del texto en el capítulo 5, deduzca la expresión de la ecuación 5.9 allí señalada.

6 FLUJO ESTABLECIDO A TRAVÉS DE LAS CIMENTACIONES DE PRESAS Y DE SUS LADERAS

El flujo a través de las cimentaciones permeables de presas, como es el caso de un depósito de aluvión en una boquilla angosta, así como el que pasa directamente a través de las laderas, corresponde en realidad a un flujo en tres dimensiones (ver fig. 6.1). A continuación se considerará el gasto que pasa por el aluvión y, posteriormente, se verá el gasto a través de las laderas.

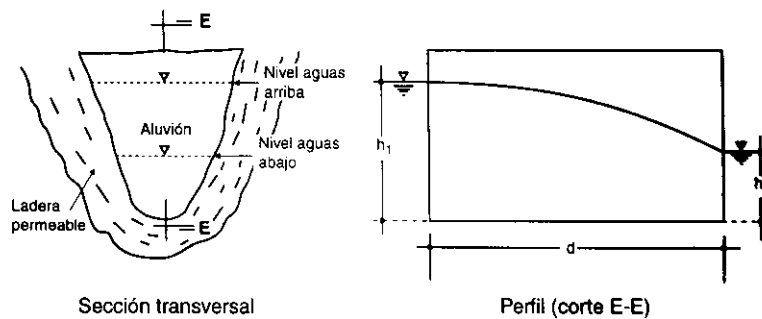


Figura 6.1 Sección transversal y perfil de un aluvión y la zona permeable de las laderas.

6.1 Flujo a través de la cimentación de una cortina sobre una sección estrecha

Consideraremos las secciones mostradas en la fig. 6.2 y las siguientes hipótesis:

1. La entrada y la salida del agua se analizan en planos verticales.
2. La base es horizontal.
3. La forma de la sección transversal es constante.

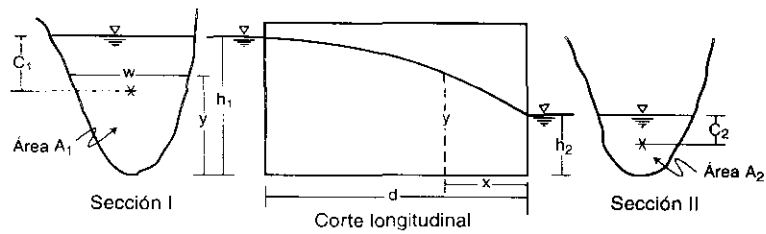


Figura 6.2 Flujo a través de un valle de sección constante.

Considerando cualquier forma de la sección transversal, el ancho "w" correspondiente a una ordenada "y" cualquiera, se puede expresar por la siguiente ecuación:

$$w = a + by + cy^2 \quad (6.1)$$

donde a, b y c son parámetros constantes.

Ahora bien, partiendo de la expresión de Dupuit para la determinación del gasto, se obtiene:

$$\begin{aligned} q &= kiA = k \frac{dy}{dx} \int_0^y w dy \\ &= k \frac{dy}{dx} \left[ay + \frac{by^2}{2} + \frac{cy^2}{3} \right] \end{aligned}$$

Separando variables e integrando la expresión anterior tenemos:

$$qx = k \left[\frac{ay^2}{2} + \frac{by^2}{6} + \frac{cy^4}{12} \right] + cte$$

para $x = d$, $y = h_1$, por tanto la "cte" de integración tiene el siguiente valor:

$$cte = \frac{qd}{k} - \left[\frac{ah_1^2}{2} + \frac{bh_1^3}{6} + \frac{ch_1^4}{12} \right]$$

Llevando esta expresión a la anterior se obtiene:

$$\frac{q}{k}(d-x) = \frac{a}{2}(h_1^2 - y^2) + \frac{b}{6}(h_1^3 - y^3) + \frac{c}{12}(h_1^4 - y^4)$$

Despejando el valor del gasto "q" para $x = 0$, $y = h_2$, se obtiene:

$$q = \frac{k}{d} \left[\frac{a}{2}(h_1^2 - h_2^2) + \frac{b}{6}(h_1^3 - h_2^3) + \frac{c}{12}(h_1^4 - h_2^4) \right] \quad (6.2)$$

Si el ancho "w" corresponde a una recta, $a=c=0$ (sección triangular); en tal caso la Ec. (6.2) será:

$$q = \frac{k}{d} \frac{b}{6} (h_1^3 - h_2^3) \quad (6.3)$$

Si el canal tiene la forma de un rectángulo, $b=c=0$; en este caso tendremos la fórmula de Dupuit vista anteriormente, es decir:

$$q = \frac{k}{2d} a (h_1^2 - h_2^2) \quad (6.4)$$

("a" es en este caso el ancho de la sección que habrá que multiplicar a "q", para tener el gasto total en la expresión original de Dupuit, Ec. 3.13).

Ahora bien, se puede demostrar (se deja al lector hacerlo), que en general el valor del gasto se puede expresar a través de la siguiente ecuación dada por A. Casagrande (1984):

$$q = \frac{k}{d} (M_1 - M_2) \quad (6.5)$$

donde,

$$M_1 = A_1 C_1 \quad M_2 = A_2 C_2$$

A_1 y A_2 son las áreas respectivas de las secciones I y II de la fig. No. 6.2, y C_1 , C_2 son las distancias de los centroides de esas áreas a la superficie del agua en dichas secciones.

De acuerdo con un estudio efectuado por Huard de la Marre (1956), el gasto bajo la cimentación que se analiza está dada por la siguiente expresión:

$$q = \frac{k}{d} [h_1 A_1 - h_2 A_2 - M_{xy}^t(B)] \quad (6.6)$$

donde M_{xy}^t es el *momento diferencial de inercia* de las áreas respecto a la base, es decir:

$$M_{xy}^t = A_1(h_1 - C_1) - A_2(h_2 - C_2)$$

Al comparar Casagrande las fórmulas (6.5) y (6.6) resultó que en realidad se trata de la misma fórmula; se deja al lector hacer esta comprobación.

6.2 Flujo a través de las laderas

Este flujo, como se verá en seguida, corresponde también a un problema de flujo en tres dimensiones. Para ello recordemos lo que establece la teoría de Dupuit (ver. fig. 6.3) en relación al gasto que pasa a través de una sección de lados verticales:

$$q = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2d}$$

Analizando este gasto separando la parte superior q_u e inferior q_L de la fig. 6.3, se había llegado al siguiente resultado (sección 3.2):

$$q = q_u + q_L \quad (6.8)$$

donde,

$$q_u = k \frac{[h_1 - h_2]^2}{2d} \quad (6.9)$$

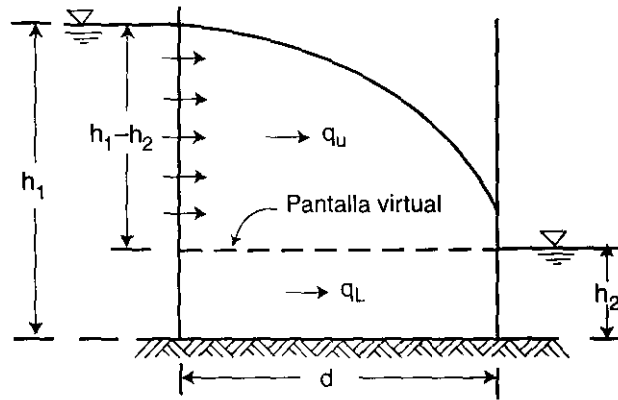


Figura 6.3 Flujo a través de una presa con paredes verticales.

$$q_L = kh_2 \frac{h_1 - h_2}{d} \quad (6.10)$$

De la ecuación (6.9) se tiene que la velocidad media de descarga en la parte superior es:

$$V_u = \frac{q_u}{h_1 - h_2} = k \frac{h_1 - h_2}{2d} \quad (6.11)$$

(Se está considerando como área en la parte superior a $A = h_1 - h_2$)

De la ecuación (6.10) se obtiene que esta velocidad en la parte inferior vale:

$$V_L = \frac{q_L}{h_2} = k \frac{h_1 - h_2}{d} \quad (6.12)$$

De las ecuaciones (6.11) y (6.12) se llega al siguiente resultado:

$$V_u = \frac{1}{2} V_L \quad (6.13)$$

Veamos ahora cuál es la solución técnica para el siguiente tipo de problema mostrado en la fig. 6.4.

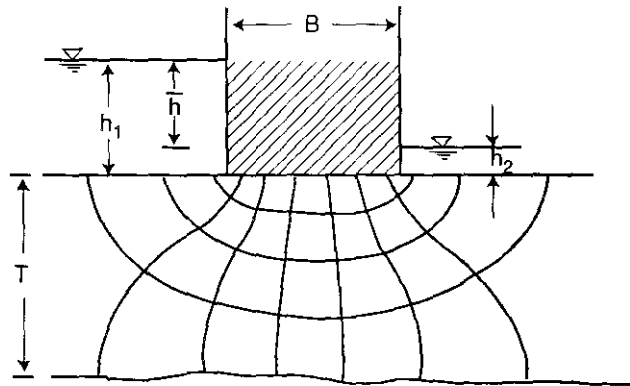


Figura 6.4 Flujo alrededor de una zona o cortina impermeable.

Llamando $\bar{h} = h_1 - h_2$, el gasto a través de la zona permeable de la fig. No. 6.4, está dado por la siguiente expresión, según se había visto a partir de las redes de flujo:

$$q = k \bar{h} \$ \quad (6.14)$$

donde $\$$ = factor de forma, el cual es función de la relación (T/B) . Para el caso de una presa de base plana y un estrato permeable uniforme como el mostrado en la fig. 6.4, Casagrande obtuvo las siguientes expresiones para el factor de forma $\$$ en función de (T/B) .

Para $B \leq T$:

$$\$ = \frac{1}{\pi} \text{Ln} \frac{13 + (B/T)^2}{2.54 \ B/T} \quad (6.15)$$

Para $B \ll T$:

$$\$ = \text{Ln} \frac{(5T/B)}{\pi} \quad (6.16)$$

Para $B \geq T$:

$$\$ = \frac{1}{0.88 + B/T} \tag{6.17}$$

La fig. 6.5 reproduce la gráfica mostrada por A. Casagrande (1984) en la 1a. conferencia Nabor Carrillo, donde se obtiene el valor de \$ en términos de la relación T/B.

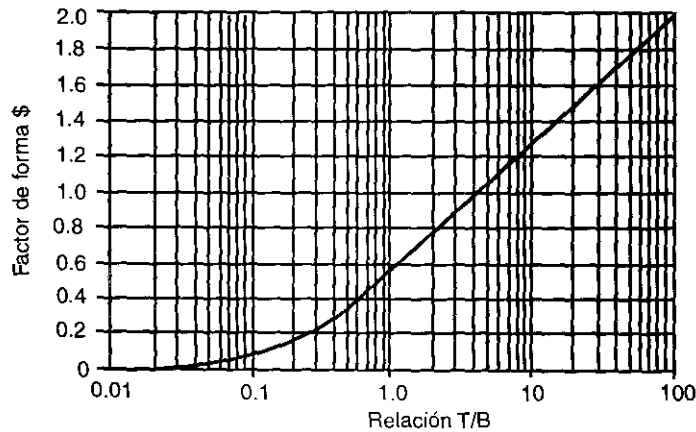


Figura 6.5 Factor de forma para un flujo alrededor de una zona impermeable, en función de la relación T/B.

Cabe señalar que los anteriores valores del factor de forma \$ indicados por las ecuaciones 6.15, 6.16 y 6.17, fueron publicados por primera vez por el alemán K. Dachler, en su libro *Grandwassertromang*, en el año 1936.

Regresando ahora al flujo a través de las laderas de una presa, la fig. 6.6 muestra la planta, perfil y corte correspondiente a laderas verticales en una frontera inferior impermeable totalmente horizontal.

Al considerar uno de los canales de flujo mostrado en la fig. 6.6-b, en un corte longitudinal a una de las laderas permeables, se tendrá el caso riguroso de Dupuit, con la particularidad quizás de que el canal está más ancho en sus extremos. Haciendo entonces referencia a este corte, la fig. 6.7 muestra esquemáticamente como se vería el mismo.

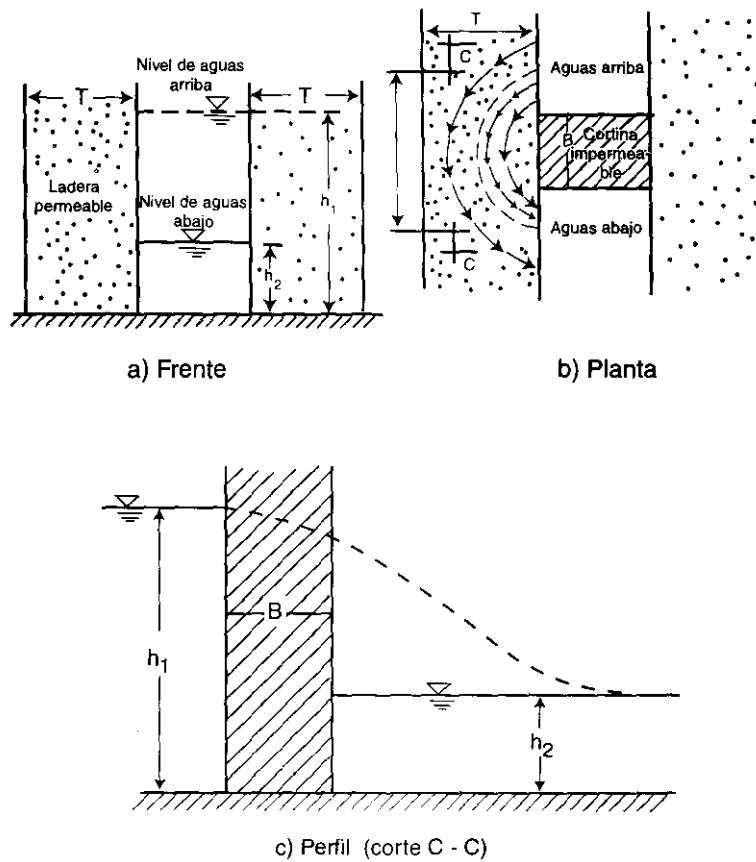


Figura 6.6 Frente, planta y perfil del flujo a través de una ladera permeable.

Al dividir en dos partes el flujo del problema mostrado en la fig. 6.7, la velocidad en la parte superior para el caso de tres dimensiones es igual, según se había visto anteriormente, a la mitad de la que resulta en la parte inferior, es decir:

$$V_u = \frac{1}{2} V_L$$

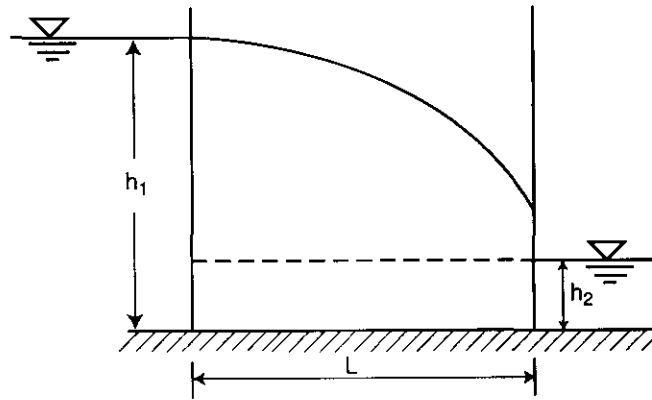


Figura 6.7 Corte esquemático a través de uno de los canales de flujo.

Suponiendo ahora una sección cualquiera de la boquilla como la mostrada por la fig. 6.8, el gasto total que pasa por ambas laderas será:

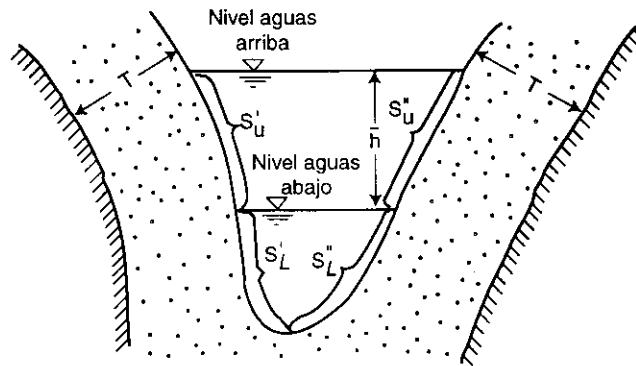


Figura 6.8 Sección transversal de una boquilla irregular con laderas permeables de espesor T.

$$q_{\text{total}} = q_u + q_L = k\bar{h}\left(S_L + \frac{1}{2}S_u\right) \quad (6.18)$$

donde

$$S_L = S'_L + S''_L$$

y

$$S_u = S'_u + S''_u$$

Es conveniente hacer notar que el gasto total dado por la expresión (6.18) está dado en unidades de volumen por unidad de tiempo, mientras que el gasto de la expresión (6.14) está dado en $l^3/\text{seg}/l$, donde "l" significa unidad de longitud. Además, se está suponiendo que el espesor T de la ladera permeable es constante.

En el caso particular de una boquilla con paredes verticales como el de la fig. 6.9, el gasto por *cada ladera* sería:

$$S_L = h_2$$

$$S_u = h_1 - h_2$$

$$\bar{h} = h_1 - h_2$$

$$q_{(\text{TOTAL DE 1 LADERA})} = k(h_1 - h_2) \left[h_2 + \frac{1}{2}(h_1 - h_2) \right] = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2}$$

Esta última expresión es la misma que presenta Casagrande en su conferencia Nabor Carrillo.

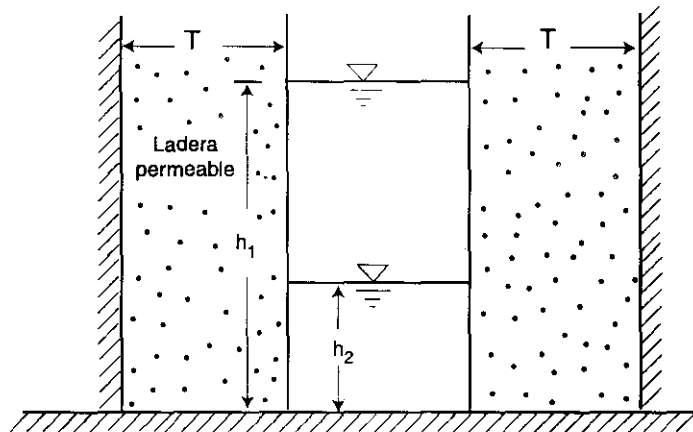


Figura 6.9 Boquilla y laderas permeables con paredes verticales.

7 FLUJO A TRAVÉS DE POZOS

7.1 Introducción

La aplicación que tiene la determinación del flujo a través de pozos de bombeo es múltiple, en particular cuando se trata de abatir el nivel freático por medio de ellos (para realizar por ejemplo una excavación en seco), o para determinar los coeficientes de permeabilidad *in situ*. En este capítulo se verá primeramente el flujo a través de pozos individuales, tanto en el caso de acuíferos confinados como el de acuíferos libres, y posteriormente se tratará el caso de sistemas de varios pozos.

7.2 Pozos individuales

a) Acuíferos confinados

Supóngase que se tiene una isla circular de radio R rodeada por agua y que se construye un pozo de radio r_0 en el centro, según se muestra en la fig. 7.1; dicho pozo recibe el nombre de «artésiano» o pozo confinado.

Determinemos cuál sería el abatimiento que se tendría en función del gasto que se extrae. Para ello considérese como el eje de coordenadas el eje mismo del pozo; en estas circunstancias se tiene que de acuerdo con la Ley de Darcy:

$$q = kiA$$

donde:

$$i = \frac{dz}{dr}$$

$$A = 2\pi rD$$

D = espesor del acuífero

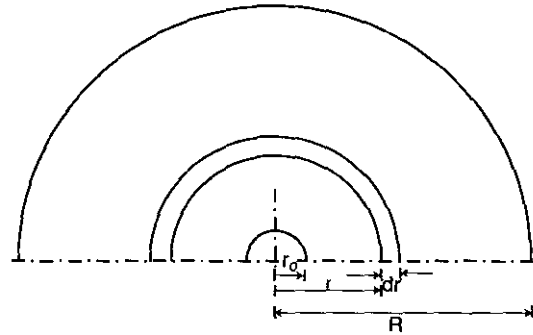
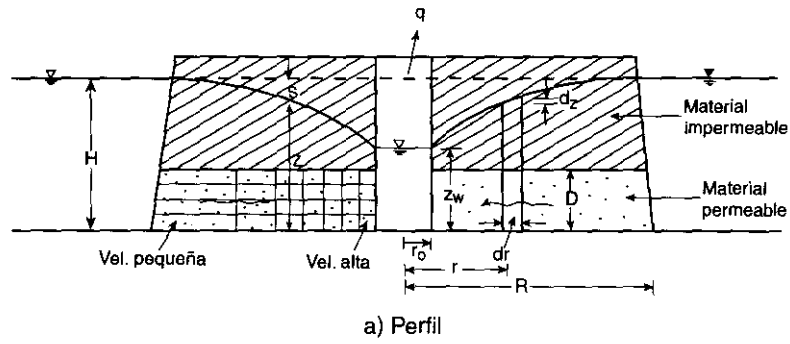


Figura 7.1 Perfil y media planta de un pozo confinado.

Es decir:

$$q = 2k\pi r D \frac{dz}{dr}$$

Arreglando variables e integrando se obtiene:

$$q \ln r = 2k\pi D z + \text{cte} \quad (7.1)$$

para $r=R$ y $z=H$, resulta

$$cte = q \ln R - 2\pi k D H \quad (7.2)$$

Llevando (7.2) a (7.1) se obtiene:

$$q(\ln R - \ln r) = 2\pi k D (H - z)$$

$$q \left[\ln \frac{R}{r} \right] = 2\pi k D S \quad (7.3)$$

donde $S = H - z$, es decir, es el abatimiento; o sea

$$S = \frac{q}{2\pi k D} \ln \frac{R}{r} \quad (7.4)$$

Es conveniente observar que en este caso no se ha hecho ninguna suposición simplificatoria, ya que las hipótesis de Dupuit son correctas (flujo horizontal y el gradiente i está dado, en todo punto de cualquier sección vertical, por la tangente de la superficie piezométrica), es decir:

$$i = \frac{dz}{dr}$$

Si se desea calcular el gasto « q » a partir de la expresión anterior se tendrá:

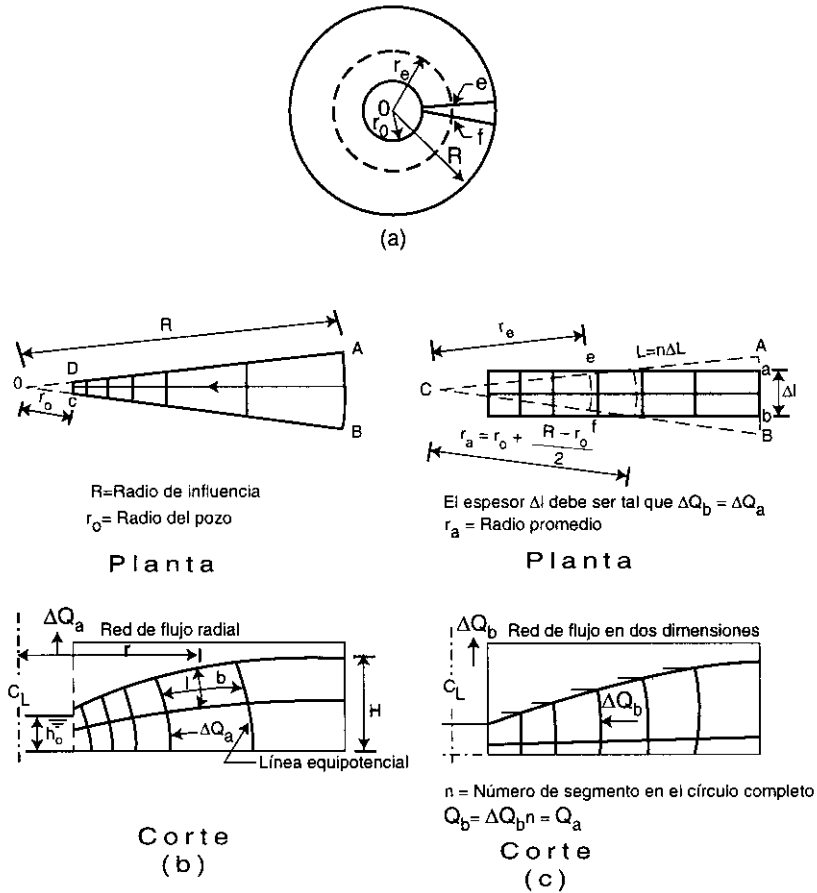
$$q = \frac{2\pi k D (H - z)}{\ln \frac{R}{r}} \quad (7.5)$$

b) Pozo en acuífero libre

Puesto que el flujo en un pozo converge tridimensionalmente y las pérdidas de carga tienden a concentrarse más que en el caso de un flujo en dos dimensiones (donde la red de flujo está compuesta por cuadrados), Taylor¹ demuestra que el requerimiento para

¹ Taylor, Donald W. (1948), *Fundamentals of Soil Mechanics*, John Wiley & Sons, págs. 192-194.

un flujo de tal naturaleza es que la relación b/l (ver fig. 7.2 b) sea inversamente proporcional al radio r , de manera que la relación rb/l sea la misma para todos los rectángulos.



- a).- Planta del sistema pozo-acuífero.
 b).- Segmento circular del suelo contribuyendo al flujo del pozo.
 c).- Segmento rectangular equivalente contribuyendo con el mismo flujo que en el sector circular de (b).

Figura 7.2 Uso de redes de flujo en dos dimensiones para resolver problemas de flujo radial (según Cedergren, 1989).

Cedergren² señala un procedimiento que puede emplearse para determinar el flujo a través del método usado en flujo de dos dimensiones (ya que resulta muy complicado lograr la anterior relación para cada uno de los rectángulos). La expresión que obtiene Cedergren para el cálculo del gasto total Q está dado por:

$$Q = kh \frac{n_f}{n_e} 2\pi r_e \quad (7.6)$$

donde n_f/n_e es el factor de forma de la red bidimensional constituida por cuadrados,

Q = gasto total

r_e = radio equivalente = $r_0 + 0.30(R - r_0)$

R = radio de influencia (ver fig. 7.2)

r_0 = radio del pozo

La determinación del gasto q se puede obtener también directamente a partir de la siguiente ecuación (ver fig. 7.3)

$$q = k 2\pi r z \frac{dz}{dr} \quad (7.7)$$

Separando variables queda:

$$q \frac{dr}{r} = 2\pi k z dz$$

Integrándose se obtiene:

$$q \ln r = 2\pi k \frac{z^2}{2} + \text{cte} \quad (7.8)$$

Para $r=R$ y $z=H$, de la ecuación (7.6) se obtiene el valor de la constante:

$$\text{cte} = q \ln R - \pi k H^2 \quad (7.9)$$

² Cadergren, (1989), *Seepage, Drainage and Flow Nets*, John Wiley & Sons, pág. 73.

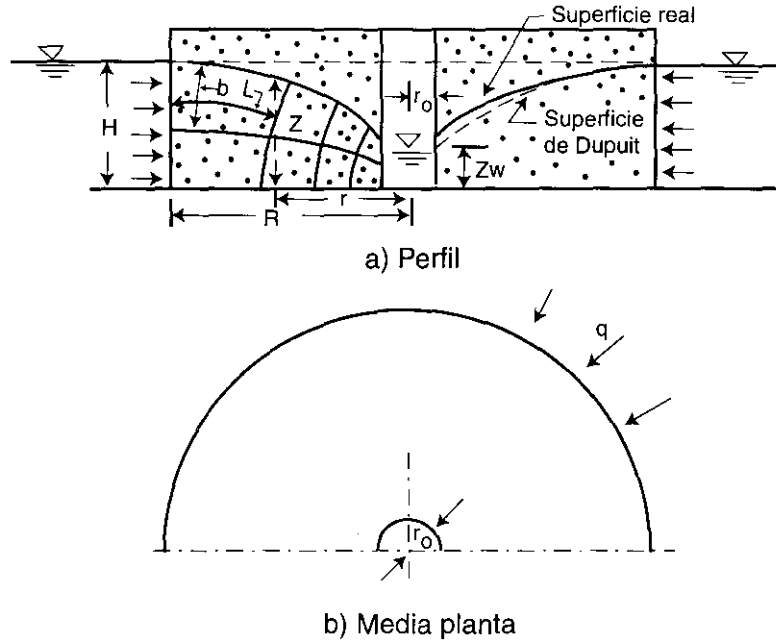


Figura 7.3 Perfil y media planta de un pozo en acuífero libre.

Llevando esta ecuación (7.9) a (7.6) se obtiene:

$$q \ln \frac{R}{r} = \pi k (H^2 - z^2) \quad (7.10)$$

Esta última expresión se conoce como la fórmula de Dupuit-Thiem. Despejando el valor de z de la expresión (7.10), se tiene:

$$z = \left[H^2 - \frac{q}{\pi k} \ln \frac{R}{r} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.11)$$

De igual manera el valor de q esta dado por:

$$q = \frac{\pi k (H^2 - z^2)}{\ln \frac{R}{r}} \quad (7.12)$$

Esta última expresión tiene un uso muy importante en la determinación del gasto en un pozo y la expresión (7.11) para determinar el abatimiento; ambas expresiones son rigurosas.

Si deseamos determinar el gasto en función del nivel que se tiene en el pozo, se tendrá, sustituyendo z por z_w en la ecuación (7.12), lo siguiente:

$$q = \frac{\pi k (H^2 - z_w^2)}{\ln \frac{R}{r_o}} \quad (7.13)$$

El valor de $q_{\text{máx}}$ se obtiene de hacer $z_w = 0$ en la expresión anterior:

$$q_{\text{máx}} = \frac{\pi k H^2}{\ln \frac{R}{r_o}} \quad (7.14)$$

Si queremos obtener q en términos de $q_{\text{máx}}$, al dividir la ecuación (7.13) sobre la (7.14) se obtiene:

$$\frac{q}{q_{\text{máx}}} = \frac{H^2 - z_w^2}{H^2} \quad (7.15)$$

Al dibujar $100 \frac{z_w}{H}$ vs $100 \frac{q}{q_{\text{máx}}}$, se obtiene la gráfica de la fig. 7.4.

Con base a la fig. 7.4 se puede ver que después del 50% de z/H , no es recomendable bajar más el nivel del pozo ya que sólo se consigue 25% más del gasto; de la ecuación (7.13) se puede observar que si se desea aumentar el gasto conviene aumentar el diámetro del pozo.

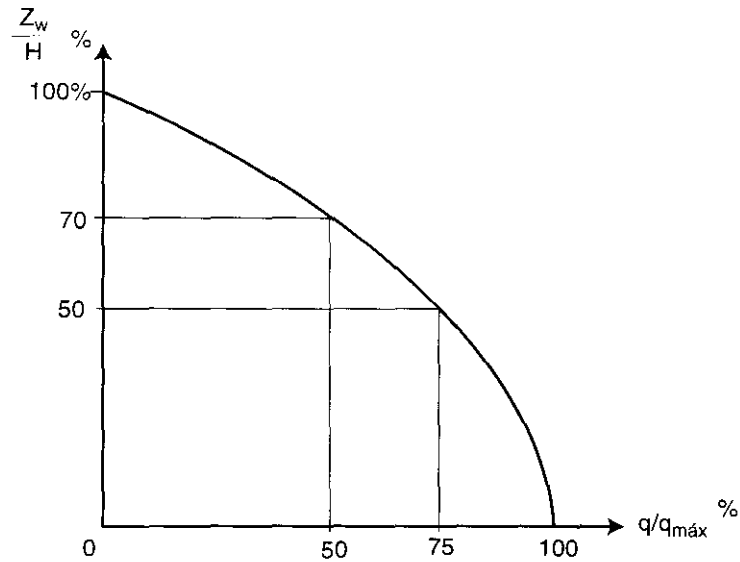


Figura 7.4 Valores de $\frac{q}{q_{máx}} \%$ vs $\frac{Z_w}{H} \%$.

La determinación del gasto "q" que se puede obtener de un pozo en acuífero libre, se puede calcular en dos partes como se ilustra en la fig. 7.5, considerando para ello que para el cálculo de q_1 se utiliza $H_s = H - z_w$ y la ecuación (7.14).

$$q_1 = \frac{\pi k (H - z_w)^2}{1n \frac{R}{r_o}} \quad (7.16)$$

El gasto q_2 se obtiene a partir de la ecuación (7.5), correspondiente a un acuífero confinado, es decir:

$$q_2 = \frac{2\pi k z_w (H - z_w)}{1n \frac{R}{r_o}} \quad (7.17)$$

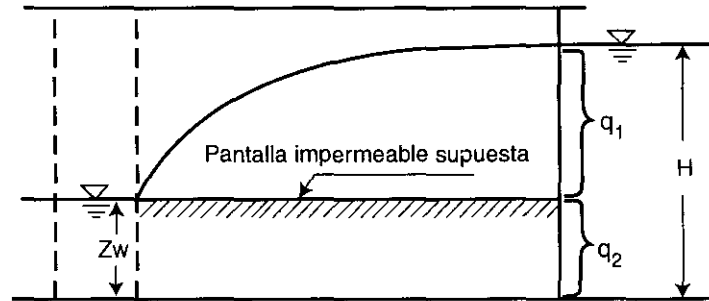


Figura 7.5 División simplificada del gasto que se extrae en un pozo en acuífero libre.

Sumando q_1 y q_2 se obtiene:

$$q_1 + q_2 = \frac{\pi k}{1n \frac{R}{r_o}} (H^2 - 2z_w H + z_w^2 + 2z_w H - 2z_w^2)$$

$$q = \frac{\pi k (H^2 - z_w^2)}{1n \frac{R}{r_o}}$$

que es la expresión (7.13) que ya habíamos determinado.

Resumiendo, las expresiones para obtener el gasto de un pozo son las siguientes:

a) Acuífero confinado

$$q = \frac{2\pi k D (H - z)}{1n \frac{R}{r}}$$

b) Acuífero no confinado

$$q = \frac{\pi k (H^2 - z^2)}{1n \frac{R}{r}}$$

7.3 Pozos con penetración parcial

I Acuífero confinado

Haciendo referencia a la fig. 7.6 y llamando h_s la penetración parcial del pozo y q_p el gasto correspondiente, al comparar este gasto con el que se tendría si la penetración fuera total (gasto q), la siguiente situación existiría:

si $q_p = q$, entonces $S_p > S$, puesto que el abatimiento se está concentrando en la parte superior del acuífero,

y si $S_p = S$, entonces $q_p < q$

S_p = abatimiento del nivel de agua en pozo con penetración parcial.

S = abatimiento del nivel de agua en pozo con penetración total.

D = espesor del acuífero confinado.

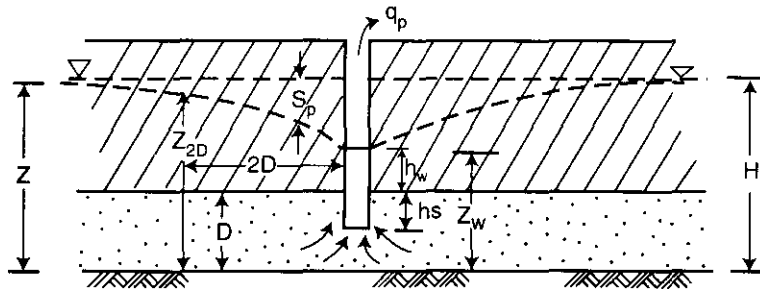


Figura 7.6 Pozo con penetración parcial en un acuífero confinado.

Sin embargo, para una distancia del pozo mayor de $2D$, se puede despreciar el efecto de la penetración parcial en lo que se refiere a la forma del flujo y al abatimiento. El análisis de pozos con penetración parcial es en general complicado, excepto para los casos muy simples. Uno de los métodos más utilizados es el que emplea la superposición de imágenes. De acuerdo con de Glee (1930)³, el abatimiento $z_{2D} - z_w$ (ver fig. 7.6), es igual a:

$$z_{2D} - z_w = \frac{q_p}{4\pi k} \left[\frac{2}{h_2} \ln \frac{\pi h_s}{2r_o} + \frac{0.20}{D} \right] \quad (7.18)$$

³ de Glee, G.J. *Over grondwaterstromingen bij waterronttrekking door middel van putten*, J Waltman Jr., Delft, 175 pp, 1930.

Expresión válida sólo si $1.3h_s \leq D$ y $h_s/2r_o \geq 5$. Considerando que para $r > 2D$ la curva de abatimiento se puede expresar como (Ec. 7.4):

$$H - Z_{2D} = S = \frac{q_p}{2\pi k D} \ln \frac{R}{2D} \quad (7.19)$$

el abatimiento total de un pozo con penetración parcial se obtiene de sumar las ecuaciones (7.18) y (7.19); es decir:

$$S_{\text{TOTAL}} = H - Z_w = (H - z_{2D}) + (z_{sD} - z_w) = \frac{q_p}{2\pi k} \left[\frac{1}{h_s} \ln \frac{\pi h_s}{2r_w} + \frac{1}{D} \ln \frac{R}{2D} \right] \quad (7.20)$$

Dividiendo el gasto q_p que se obtiene de esta expresión (7.20), entre el gasto q que se obtendría para el caso de un pozo con penetración total que produjera el mismo abatimiento que el de penetración parcial, se tendría:

$$\frac{q_p}{q} = \frac{\ln \frac{R}{r}}{\frac{D}{h_s} \ln \left[\frac{\pi h_s}{2r_o} \right] + 0.10 + \ln \frac{R}{2D}} \quad (7.21)$$

Dibujando esta ecuación para $R/r_o = 1000$, se obtiene la figura 7.7.

II Acuífero no confinado

En el caso de pozos con penetración parcial en acuíferos no confinados, ver fig 7.8, la siguiente expresión da una buena aproximación, cuando el abatimiento es pequeño en relación a H.

$$h_{2H} - h_w = \frac{q_p}{4\pi k} \left[\frac{2}{h_s} \ln \frac{\pi h_s}{2r_o} + \frac{0.20}{H} \right] \quad (7.22)$$

La fig. 7.7 se puede también utilizar para el cálculo de q_p/q cuando dicho abatimiento es efectivamente pequeño, cambiando simplemente D por H. Para mayores detalles

sobre este tema se recomienda ver la siguiente referencia: Muskat, M. *Physical Principles of Oil Production*, McGraw Hill, New York, pp 922; 1949.

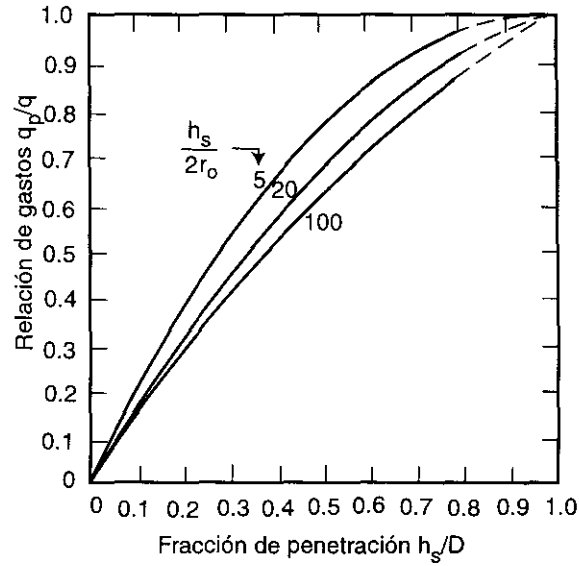


Figura 7.7 Relación de gastos q_p/q versus la fracción de penetración h_s/D , para $R/r_o = 1000$

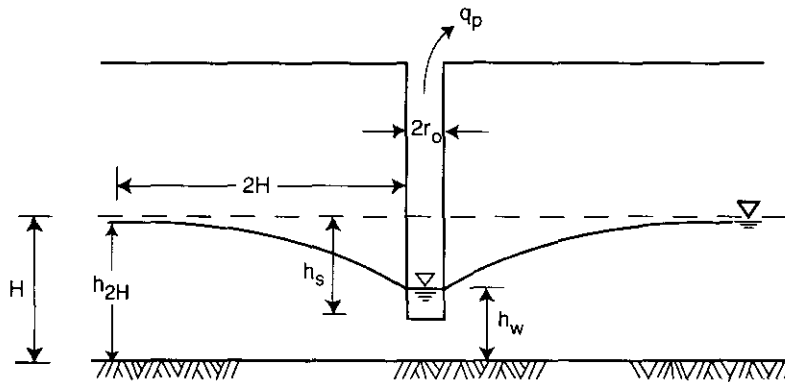


Figura 7.8 Pozo con penetración parcial en acuífero no confinado.

7.4 Radio de influencia

La hipótesis de que los pozos que se analizan se encuentran en medio de una isla deja de ser válida en la realidad y es importante definir a que distancia del eje vertical del pozo el abatimiento del nivel del agua es nulo o prácticamente nulo; esta distancia, que es lo que se conoce como radio de influencia, depende del gasto que se extrae del pozo y la mejor manera de determinarlo es haciendo varias observaciones directas en campo a través de pozos auxiliares llamados "de observación". Afortunadamente, en la estimación de los gastos hacia los pozos, el radio de influencia que se usa en los cálculos no es muy crítico.

7.5 Consideración de varios pozos en el cálculo del abatimiento

Para calcular el abatimiento del nivel de un acuífero cuando se utilizan varios pozos, se puede usar la ecuación llamada de Forchheimer, la cual se obtiene a partir de la ecuación de continuidad de flujo. Esta última ecuación se obtiene haciendo referencia a la fig. 7.9, como se indica a continuación:

a) Ecuación de continuidad

Al analizar el gasto que pasa a través del elemento mostrado en la fig. 7.9, se tiene que la diferencia de gastos, entre la salida y la entrada del elemento en las direcciones "X" y "Y", está dada por la ecuación siguiente:

$$dydz \frac{\partial V_x}{\partial x} dx + dx dz \frac{\partial V_y}{\partial y} dy = \Delta q \quad (7.23)$$

En caso de que haya continuidad de flujo, el gasto de salida debe ser igual al de la entrada y consecuentemente $\Delta q=0$. Lo anterior significa que:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (7.24)$$

Esta ecuación (7.24) representa la ley de continuidad en dos dimensiones. Si se considera el flujo en tres dimensiones esta ley estará dada por la expresión siguiente:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \quad (7.25)$$

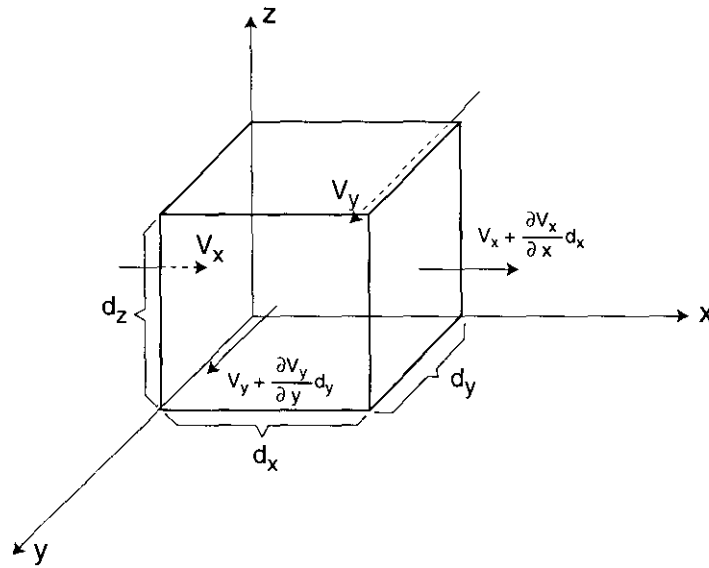


Figura 7.9 Elemento de suelo a través del cual pasa un flujo de agua en dos dimensiones.

Ahora bien, tomando en cuenta que en un medio isotrópico

$$V_x = k \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$V_y = k \frac{\partial h}{\partial y}$$

al llevar estas igualdades a la ecuación (24), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (7.26)$$

Esta última expresión es la ecuación diferencial de Laplace (ver Cap. 2, Ec. 2.3). En tres dimensiones dicha ecuación será:

$$\frac{\partial h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial h^2}{\partial y^2} + \frac{\partial h^2}{\partial z^2} = 0 \quad (7.27)$$

Ahora bien, Forchheimer, haciendo las suposiciones de Dupuit para el gradiente hidráulico del elemento de la fig. 10, donde z representa la carga de agua, obtuvo:

$$i_x = \frac{\partial z}{\partial x}; i_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

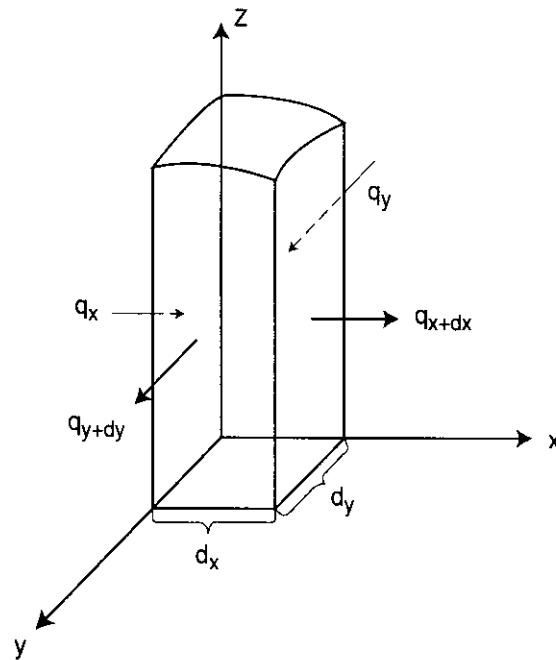


Figura 7.10 Elemento considerado como columna de suelo por Forcheimer para el análisis de flujo en pozos.

y estableció las expresiones siguientes para el gasto de entrada en la dirección x:

$$q_x = kiA$$

$$q_x = k \frac{\partial z}{\partial x} z \, dy \quad (7.28)$$

Tomando en cuenta que

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

resulta:

$$\frac{\partial z^2}{\partial x} = 2z \frac{\partial z}{\partial x}$$

es decir,

$$z \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial z^2}{\partial x} \quad (7.29)$$

Llevando la ecuación (7.29) a la ecuación (7.28) se tendrá:

$$q_x = \frac{k}{2} \frac{\partial z^2}{\partial x} \, dy \quad (7.30)$$

b) Gasto de salida con la dirección x:

$$q_{x+dx} = \frac{k}{2} \frac{\partial(z^2)}{\partial x} \, dy + \frac{k}{2} \frac{\partial^2(z^2)}{\partial x^2} \, dy \, dx \quad (7.31)$$

Para la dirección "y" se obtienen expresiones semejantes para la determinación de los gastos de entrada y salida, de manera que la diferencia total del gasto de salida y el de entrada, considerando flujo establecido, esté dada por:

$$\frac{\partial^2(z^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(z^2)}{\partial y^2} = 0 \quad (7.32)$$

que se conoce como ECUACIÓN DE FORCHHEIMER, la cual es similar a la de Laplace.

Al considerar la propiedad en este tipo de ecuaciones diferenciales donde se establece que: "si dos o más funciones son soluciones de esa ecuación diferencial, la suma de esas funciones también es solución", se puede hacer la superposición de los valores de la z^2 obtenidos para la solución de pozos individuales no confinados, es decir, considerando la ecuación (7.12) se obtiene que para un pozo:

$$z^2 = H^2 - \frac{q}{\pi k} \ln \frac{R}{r} \quad (7.33)$$

Para n pozos se tendrá:

$$Z^2 = H^2 - \sum_{i=1}^n \frac{q}{\pi k} \ln \frac{R_i}{r_i} \quad (7.34)$$

donde z^2 es el valor superpuesto de los n pozos (ver fig. 7.3 para recordar el significado de la nomenclatura). Obsérvese que el valor de H^2 es constante ya que depende de las condiciones de frontera; si se cambia, se cambiarán también las condiciones de frontera y consecuentemente la única parte que se suma de la expresión (7.33) es la parte variable. Tratándose del flujo en dos dimensiones, en el cual el gasto está dado por:

$$q = k \frac{h_1^2 - z^2}{2x}$$

se tiene

$$z^2 = h_1^2 - \frac{2xq}{k} \quad (7.35)$$

donde la parte variable es el término $2 \frac{xq}{k}$.

La ecuación (7.34) tiene una aplicación directa al caso en que se tengan varios pozos en los cuales se extrae el mismo gasto, según se muestra en la fig. 7.11.

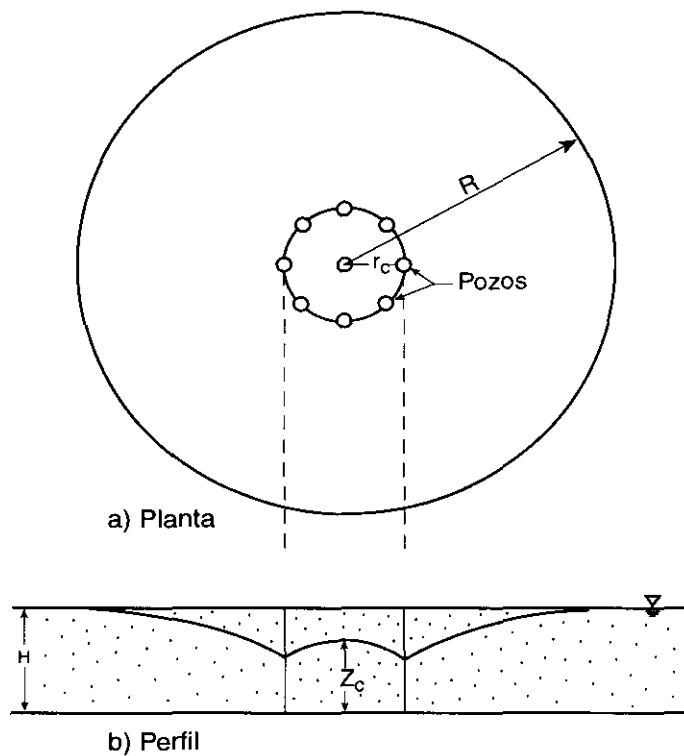


Figura 7.11 Sistema de pozos en los cuales se extrae un mismo gasto.

Para este caso la ecuación (7.34) es igual a:

$$Z_c^2 = H^2 - \frac{Nq}{\pi k} \ln \frac{R}{r_c} \quad (7.36)$$

donde,

N = número de pozos
 q = gasto en cada pozo
 Z_c = altura media en el grupo de pozos

Un detalle del abatimiento cerca de la zona de pozos se muestra en la fig. 7.12.

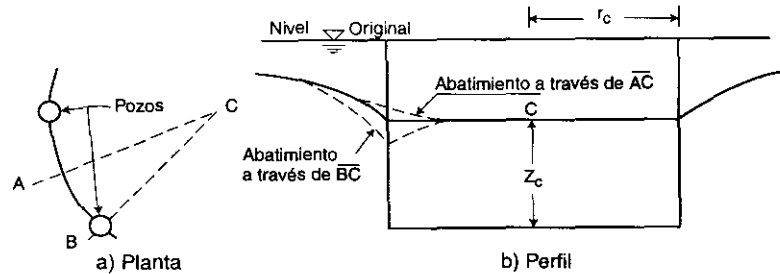


Figura 7.12 Detalle del abatimiento en la zona cercana a un sistema de pozos.

En la ecuación (7.36) se está suponiendo que las condiciones de frontera no cambian y que el radio de influencia R permanece constante; se sabe sin embargo que R es función de la cantidad de agua que se extrae por unidad de tiempo.

Para el caso de pozos confinados (ver fig. 7.1), la superposición es también válida y el abatimiento total en un punto está dado por:

$$S = \sum_{i=1}^n S_i$$

donde S_i = abatimiento debido al pozo i , [ver ecuación (7.4) en el punto considerado;
 n = número de pozos

7.6 Efecto de un pozo cerca de un depósito de agua

Para analizar este problema conviene suponer que se tiene un pozo imagen simétrico de recarga en el sitio donde se encuentra el depósito de agua. La fig. 7.13 muestra un

perfil donde se indica el pozo imagen y un detalle en planta de algunas líneas de flujo y líneas equipotenciales; la fig. 7.14 muestra en forma más completa como serían las familias de ambas líneas. Al aplicar la fórmula correspondiente a cada uno de los pozos se tendrá:

$$z_1^2 = H^2 + \frac{q}{\pi k} \ln \frac{R}{r_1} \quad (\text{pozo imagen}) \quad (7.37)$$

$$z_2^2 = H^2 - \frac{q}{\pi k} \ln \frac{R}{r_2} \quad (\text{pozo real}) \quad (7.38)$$

donde r_1 y r_2 se muestran en la fig. 7.13.

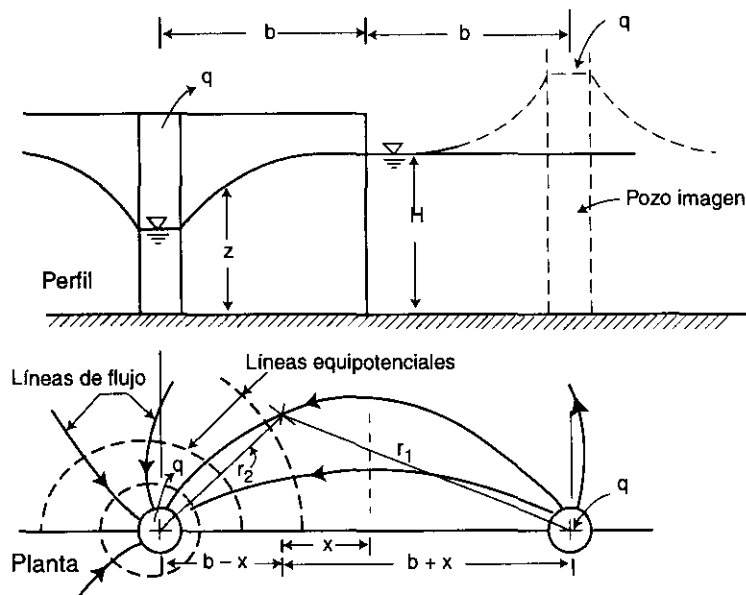


Figura 7.13 Pozo cerca de un depósito de agua.

Superponiendo ahora los dos efectos se obtiene:

$$Z^2 = H^2 - \frac{q}{\pi k} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (7.39)$$

En el caso de que las mediciones se hagan en un plano que pasa por la línea que une a los pozos y es perpendicular a la frontera del depósito de agua, la ecuación (7.39) resulta en la forma siguiente:

$$Z^2 = H^2 - \frac{q}{\pi k} \ln \frac{b+x}{b-x} \quad (7.40)$$

donde b es la distancia que hay del eje del pozo a la orilla del depósito de agua.

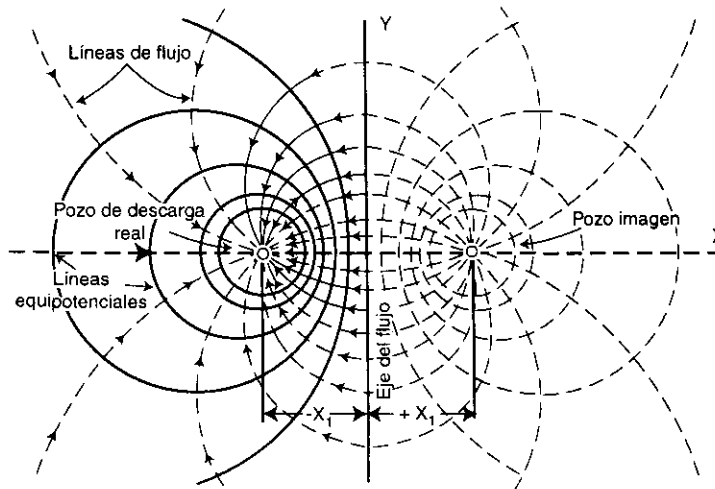


Figura 7.14 Red de flujo para pozo de descarga real y pozo imagen.

CASO ESPECIAL

Considérese el caso de un depósito de agua que descarga a un río o lago y dentro del cual se perfora un pozo con la idea de extraer agua de él (fig. 7.15).

De acuerdo con la fórmula de Dupuit, el gasto que llega al depósito de agua es:

$$\bar{q} = k \frac{(\bar{z})^2 - H^2}{2x} \quad (7.41)$$

Despejando a \bar{z} queda:

$$\bar{z}^2 = H^2 + \frac{2x\bar{q}}{k} \quad (7.42)$$

Cabe aclarar que la fórmula anterior corresponde a un flujo en dos dimensiones.

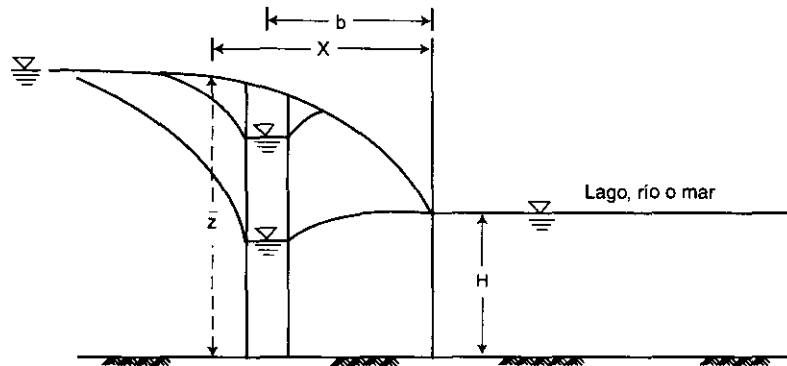


Figura 7.15 Depósito de agua descargando en un río o un lago.

Considerando ahora el gasto que se extrae del pozo y haciendo la superposición correspondiente, se obtiene:

$$Z^2 = H^2 + \frac{2\bar{q}x}{k} - \frac{q}{\pi k} \ln \frac{b+x}{b-x} \quad (7.43)$$

donde z es el nivel abatido después de poner en operación el pozo a una distancia x de la orilla del depósito

\bar{q} es el gasto que llega al depósito de agua

q es el gasto que se extrae del pozo

La nomenclatura de los demás parámetros corresponde al caso anterior. Si se desea determinar el momento crítico a partir del cual empieza a pasar agua del depósito de agua hacia el pozo, se puede considerar cuál es el gasto que se tiene en el momento en que la línea superior es horizontal para $x = 0$, es decir, el momento en que

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_{x=0} = 0$$

Por lo tanto, derivando la ecuación (7.43), se obtiene:

$$2Z \frac{dz}{dx} = \frac{2\bar{q}}{k} - \frac{q}{\pi k} \frac{d}{dx} \left[\ln \frac{b+x}{b-x} \right] = 0 \quad (7.44)$$

Puesto que:

$$\frac{d}{dx} \left[\ln \frac{b+x}{b-x} \right] = \frac{b-x}{b+x} \left[\frac{b-x+b+x}{(b-x)^2} \right] = \frac{2b}{b^2-x^2} \quad (7.45)$$

Para $x = 0$, la expresión anterior es igual a $2/b$. Por tanto, llevando este valor a la expresión (7.44), se tendrá:

$$2Z \frac{dz}{dx} = \frac{2\bar{q}}{k} - \frac{q}{\pi k} \cdot \frac{2}{b} = 0$$

Por tanto:

$$\frac{2\bar{q}}{k} = \frac{q}{\pi k} \cdot \frac{2}{b}$$

y $q_{\text{crítico}} = \bar{q} \pi b$

POZO CONFINADO (ver fig. 7.16)

Siguiendo el mismo razonamiento del pozo imagen que se dio para el caso no confinado, a partir de la Ec. (7.4) se llega a que el valor del abatimiento está dado por:

$$S = \frac{q}{2\pi kD} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (7.47)$$

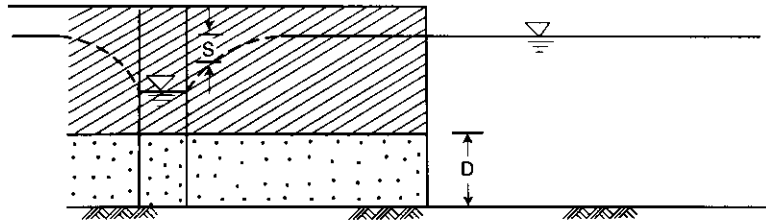


Figura 7.16 Pozo confinado cerca de un depósito de agua.

Considerando el "caso especial" visto en el pozo no confinado y siguiendo el mismo razonamiento, para el caso de tener un acuífero confinado el $q_{\text{crítico}}$ resulta exactamente igual al señalado por la expresión (7.46), siendo en este caso una fórmula rigurosa.

POZO NO CONFINADO DONDE "S" ES PEQUEÑO

Si el abatimiento $S \leq 0.1 H$ (ver fig. 7.17), se puede considerar como pequeño y, en tal caso, se podrá utilizar la expresión que a continuación se deriva.

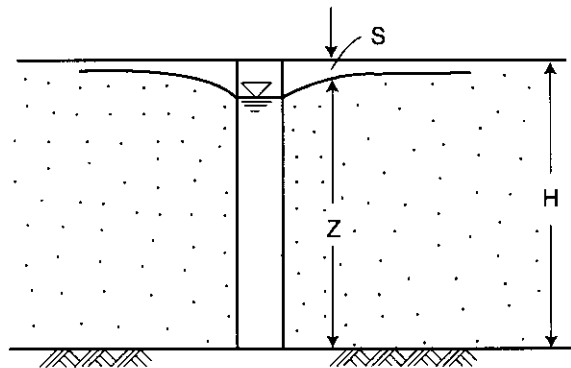


Figura 7.17 Pozo no confinado con abatimiento pequeño.

La fórmula que se aplica en este caso (ver Ec. 7.33) es la siguiente:

$$z^2 = H^2 - \frac{q}{\pi k} \ln \frac{R}{r}$$

o también;

$$H^2 - z^2 = (H - z)(H + z) = \frac{q}{\pi k} \ln \frac{R}{r} \quad (7.48)$$

Suponiendo $S \ll H$, se puede escribir

$$\begin{aligned} H + z &\cong 2H \\ H - z &= S \end{aligned} \quad (7.49)$$

Llevando las ecuaciones (7.49) a la ecuación (7.48), se tendrá:

$$2HS = \frac{q}{\pi k} \ln \frac{R}{r}$$

Es decir

$$S = \frac{q}{2\pi kH} \ln \frac{R}{r} \quad (7.50)$$

Esta última expresión resulta muy similar a la obtenida para el caso confinado, ecuación (7.47).

En el caso de tener varios pozos donde todos los abatimientos son pequeños, se podrán superponer todos los valores de S . Más aún, cuando se considera que el flujo en un pozo corresponde a un flujo no establecido, se puede suponer, como se verá más adelante, que S es muy pequeño.

7.7 Pozos de recarga

Este tipo de pozos, llamados también de inyección o invertidos, son utilizados para restituir el nivel de un depósito de agua o para impedir el avance de la intrusión salina

en áreas cercanas a la costa. La fig. 18 muestra el esquema de un ejemplo y la forma como se puede analizar este tipo de problema.

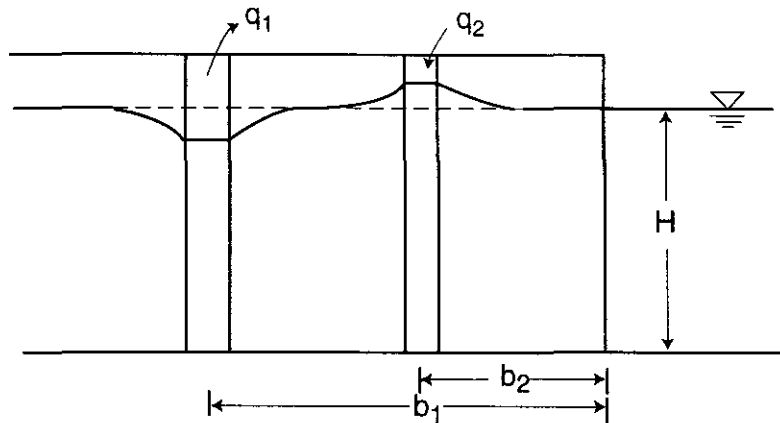


Figura 7.18 Consideraciones teóricas para el análisis de un pozo de recarga.

Tomando en cuenta las consideraciones teóricas hechas para los pozos imagen (Ec. 7.43), la fórmula que se tendrá en el ejemplo de la fig. 7.18 sería la siguiente:

$$Z^2 = H^2 + \frac{2\bar{q}x}{k} - \frac{q_1}{\pi K} \ln \frac{b_1 + x}{b_1 - x} + \frac{q_2}{\pi k} \ln \frac{b_2 + x}{b_2 - x}$$

Para analizar qué gasto q_2 se requiere para no modificar el agua libre, se puede proceder en forma semejante a como se hizo en el problema especial, es decir, determinando en la ecuación anterior:

$$\left[\frac{\partial Z}{\partial x} \right]_{x=0} = 0$$

Con lo cual se obtiene:

$$q_2 = q_1 \frac{b_2}{b_1} - \pi b_2 \bar{q} \quad (7.51)$$

7.8 Flujo no establecido en pozos

Cuando se realiza un bombeo cerca de un abastecimiento de agua, el flujo hacia el pozo se establece rápidamente; sin embargo, cuando no es así, se tiene un abatimiento del nivel piezométrico que varía con el tiempo hasta que el flujo se establece.

C.V. Theis propone una solución para el flujo no establecido en pozos en un artículo publicado en la revista *Civil Engineering* de mayo de 1940. Esta solución parte de la ecuación de continuidad del flujo de agua a través de los suelos (ver Todd, D.K., 1959; pp. 62), dada por la expresión siguiente:

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right] = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (7.52)$$

donde ρ es la densidad del fluido y t es el tiempo.

Se puede demostrar que (Todd, pp. 64):

$$\partial \rho = \frac{\bar{\rho} \bar{n}}{H \gamma_w} \partial p \quad (7.53)$$

donde p se refiere a la presión del agua ($= h \gamma_w$) y H es el espesor del acuífero (fig. 7.19). Por otro lado, sabemos que en un suelo isotrópico:

$$v_x = k \frac{\partial h}{\partial x}; \quad v_y = k \frac{\partial h}{\partial y}; \quad y \quad v_z = k \frac{\partial h}{\partial z} \quad (7.54)$$

Llevando las Ecs. (7.53) y (7.54) a (7.52), se obtiene la siguiente ecuación diferencial expresada en coordenadas ortogonales:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{\bar{n}}{kH} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (7.55)$$

Esta misma ecuación, expresada en coordenadas polares, se puede escribir como sigue:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\bar{n}}{kH} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (7.56)$$

En las expresiones anteriores el término kH se le da el nombre de **trasmisibilidad**.

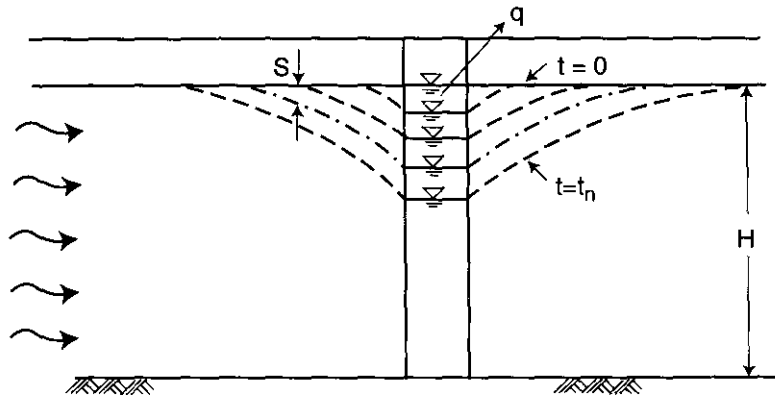


Figura 7.19 Variación del abatimiento del nivel del agua en un pozo con flujo no establecido.

La solución obtenida por Theis está basada en la analogía que existe entre el flujo de agua en suelos y la conducción del calor. Esta solución resultó igual a:

$$S = \frac{q}{4\pi kH} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau \quad (7.57)$$

donde

$$\tau = \frac{r^2 \bar{n}}{4kHt}$$

es decir, es una cantidad adimensional; se le asigna también la letra T por ser análoga al factor tiempo de la teoría de consolidación.

La integral de la Ec. (7.57) se puede expandir en una serie convergente y el resultado que se obtiene es igual a:

$$S = \frac{q}{4\pi kH} \left[-0.5772 - \ln \tau + \tau - \frac{\tau^2}{2.2!} + \frac{\tau^3}{3.3!} - \frac{\tau^4}{4.4!} + \dots \right]$$

para $\tau < 0.1$

$$S = (-0.5772 - \ln \tau) \frac{q}{4\pi kH} \tag{7.58}$$

Este caso resulta cuando r es pequeño o t es grande. La expresión anterior se conoce como fórmula de Theis-Lubin para $\tau < 0.1$.

Al dibujar en escala semilogarítmica el abatimiento S versus la distancia r al pozo, se tendrán las curvas mostradas en la fig. 7.20.

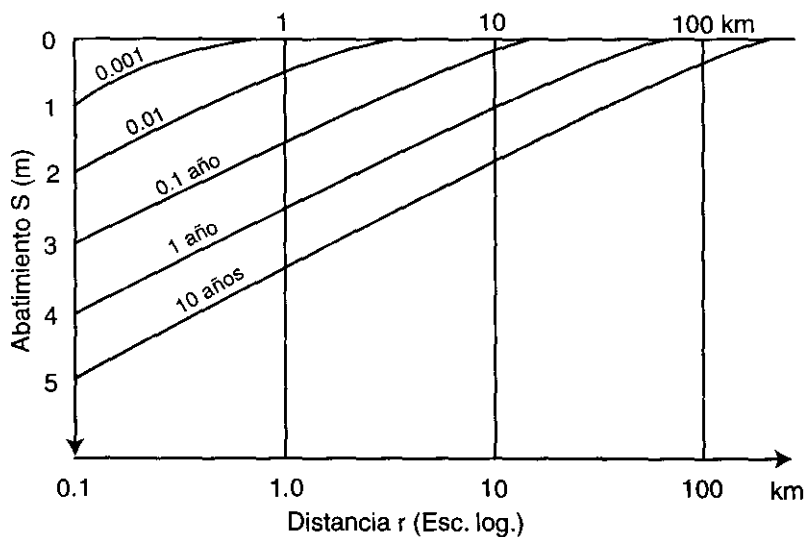


Figura 7.20 Variación del abatimiento S en función del tiempo de bombeo.

$$H^2 - z^2 = \frac{q}{\pi k} \left(\ln \frac{R_t}{r} - \frac{1}{\alpha} \frac{R_t^\alpha - r^\alpha}{R_t^\alpha} \right) \quad (7.60)$$

donde

$$R_t = c \sqrt{\frac{Hkt}{n}} \quad (7.61)$$

$c = 3.5$ a 2.8
 $\alpha = 1.0$ a 2.0

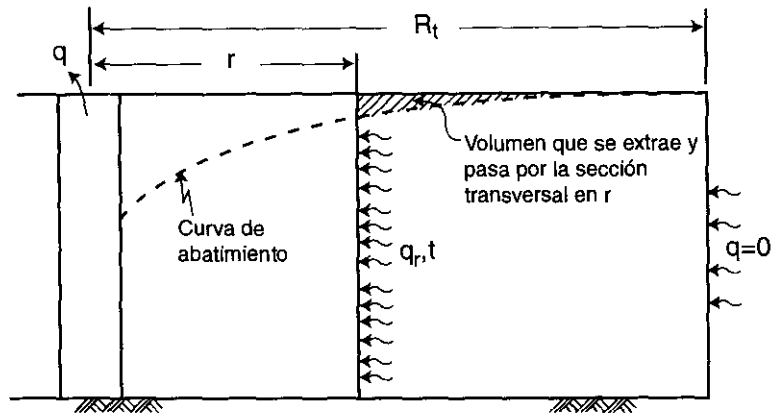


Figura 7.22 Representación gráfica del radio de influencia R_t y el gasto q_r , ambos funciones del tiempo t .

Ahora bien, para fines prácticos se pueden utilizar las fórmulas obtenidas para flujo establecido (Ec. 7.12) cuando los radios son pequeños. Para ello se utiliza un radio R_e (equivalente) que es desde luego función de R_t . La fig. 7.24 ilustra el significado de R_e . O sea, cerca del pozo se tiene la siguiente igualdad:

$$\ln \frac{R_e}{r} = \ln \frac{R_t}{r} - \frac{1}{\alpha} \frac{R_t^\alpha - r^\alpha}{R_t^\alpha}$$

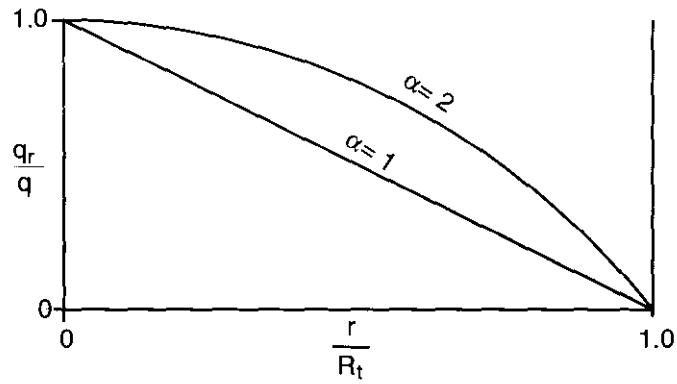


Figura 7.23 Variación de q_r en función de la distancia r y del parámetro α .

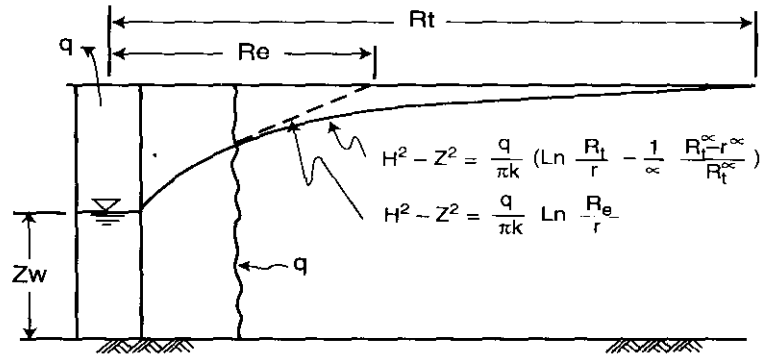


Figura 7.24 Representación gráfica de un radio equivalente R_e correspondiente a un flujo establecido.

O bien,

$$\ln \frac{R_t}{R_e} = \frac{1}{\alpha} \frac{R_t^\alpha - r^\alpha}{R_t^\alpha} \tag{7.62}$$

Obsérvese en la expresión anterior que el término $(R_1^\alpha - r^\alpha)/R_1^\alpha$ es aproximadamente igual a la unidad para valores pequeños de r (respecto a R_1). Para tal caso se tiene:

$$\begin{aligned} \text{para } \alpha = 1, \quad R_c &\sim 0.4 R_1 \\ \text{para } \alpha = 2, \quad R_c &\sim 0.6 R_1 \end{aligned}$$

Tomando el valor medio de los anteriores resulta: $R_c = R_1/2$.

Considerando lo anterior, se puede decir que para condiciones cercanas al pozo, o bien para casos en que $r \ll R_1$, se pueden aplicar las suposiciones de Dupuit y la ecuación de Weber se simplifica o se reduce a las siguientes expresiones.

$$H^2 - Z_w^2 = \frac{q}{\pi k} \ln \frac{R_1}{2r_o} \quad (7.63)$$

$$\text{donde,} \quad R_1 = c \sqrt{\frac{Hkt}{n}} \quad (7.64)$$

Las expresiones anteriores se conocen como las *ecuaciones simplificadas de Weber*, o de *Dupuit-Thiem*.

En caso de tener varios pozos dentro de un sistema de bombeo, las expresiones anteriores se pueden utilizar sustituyendo a r_o y z_w por r_c y z_c respectivamente (ver fig. 7.25), donde r_c = radio equivalente, y z_c = altura media en el centro del área equivalente.

Al igual que en el caso de flujo establecido, cuando el valor del abatimiento S es pequeño se puede suponer que

$$H + S = 2H$$

y puesto que $H^2 - z^2 = (H + z)(H - z)$, se puede escribir (ver ec. 7.49):

$$H^2 - z^2 = 2HS$$

Aplicando lo anterior a la fórmula de Weber (Ec. 7.60), se obtiene:

$$S = \frac{q}{2\pi kH} \left[\ln \frac{R_1}{r} - \frac{1}{\alpha} \frac{R_1^\alpha - r^\alpha}{R_1^\alpha} \right] \quad (7.65)$$

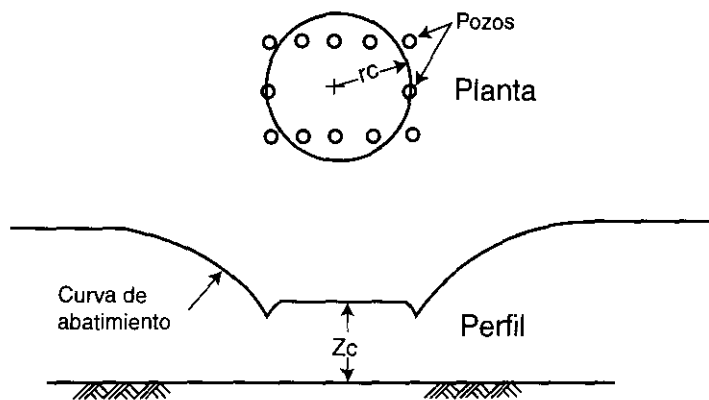


Figura 7.25 Planta y perfil de un sistema de varios pozos de bombeo.

En relación al radio de influencia, A. Casagrande (1968) recomienda el uso de la siguiente expresión:

$$R_i = \sqrt{\frac{4(\alpha + 2)}{\alpha} \cdot \frac{Hkt}{n}} \quad (7.66)$$

Para los valores de $\alpha = 1$, y $\alpha = 2$, los valores de R_i que se obtienen son:

$$\text{para } \alpha = 1, R_i = 3.5 \sqrt{\frac{Hkt}{n}}$$

$$\text{para } \alpha = 2, R_i = 2.8 \sqrt{\frac{Hkt}{n}}$$

Sustituyendo la Ec. (7.65) en la (7.64), el valor de S en términos del parámetro α resulta:

$$S = \frac{q}{2\pi kH} \left[\ln \sqrt{\frac{\alpha + 2}{\alpha \cdot T}} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha T}{\alpha + 2} \right)^{\alpha/2} \right] \quad (7.67)$$

donde

$$T = \frac{r^2 \bar{n}}{4Hkt}$$

Multiplicando numerador y denominador por 2, la Ec. (7.67) también se puede escribir como sigue:

$$S = \frac{q}{4\pi kH} \left[\ln \frac{\alpha + 2}{\alpha T} - \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} \left(\frac{\alpha T}{\alpha + 2} \right)^{\alpha/2} \right] \quad (7.68)$$

La expresión anterior para $\alpha = 1$ será:

$$S = \frac{q}{4\pi kH} \left[\ln \frac{3}{T} - 2 + \sqrt{4 \frac{T}{3}} \right] \quad (7.69)$$

y para $\alpha = 2$

$$S = \frac{q}{4\pi kH} \left[\ln \frac{2}{T} - 1 + \frac{T}{2} \right] \quad (7.70)$$

La expresión 7.68 se conoce como fórmula de Weber.

De manera semejante a como se simplificó la fórmula de Theis-Lubin para $T < 0.1$ (Ec. 7.58), la ecuación de Weber se simplifica como sigue:

$$\text{para } \alpha = 1, S = \frac{q}{4\pi kH} \left(\ln \frac{1}{T} - 0.9 \right)$$

$$\text{para } \alpha = 2, S = \frac{q}{4\pi kH} \left(\ln \frac{1}{T} - 0.3 \right)$$

Vale la pena hacer notar que, mientras la fórmula de Theis-Lubin no da un valor de R_t (porque supone que R_t es infinito), la ecuación de Weber sí lo proporciona.

La siguiente tabla muestra una comparación de los abatimientos observados y los estimados aplicando las Ecs. de Theis-Lubin y la de Weber, para un experimento efectuado en campo por C.V.Theis con los siguientes datos:

$$\begin{aligned}
 H &= 90' \\
 q &= 70 \text{ pies}^3/\text{min} \\
 k &= 0.093 \text{ pies}/\text{min} \\
 t &= 48 \text{ horas,} = 2880 \text{ min}
 \end{aligned}$$

$$\bar{n} = 0.2225$$

$$T = \frac{r^2 \bar{n}}{4kHt} = 2.3 \times 10^{-6} r^2$$

Tabla 1 Abatimientos calculados en base al experimento de C.V. Theis.

Ecuación	r	1'	10'	100'	200'	600'
Theis-Lubin	S	8.25	5.21	2.16*	1.27*	0.194*
Weber. $\alpha = 1$	S	8.40	5.32	2.03	1.23	0.226
$\alpha = 2$	S	8.50	5.41	2.33	1.41	0.194

* Estos valores coincidieron con los observados

Observando los valores presentados en la tabla 1, puede apreciarse que los resultados de los abatimientos obtenidos de aplicar las Ecs. de Theis-Lubin y la de Weber son muy similares.

Tomando en cuenta lo anterior, el valor final que recomienda A. Casagrande para estimar el radio de influencia R_t , es el siguiente:

$$R_t = \sqrt{\frac{10Hkt}{\bar{n}}} \quad (7.71)$$

que viene siendo un promedio del rango que establece la fórmula original.

7.9 Obtención del nivel de recuperación

La ecuación de Theis-Lubin se puede utilizar para conocer el efecto de recuperación del nivel piezométrico original de un sitio donde se estuvo bombeando, haciendo uso del principio de superposición que ya se comentó anteriormente. Llamando entonces a S_1 al abatimiento debido a la extracción y a S_2 el debido a la recuperación, aplicando a la Ec. (7.57) el principio de la superposición se tiene:

$$S = S_1 - S_2 = \frac{q}{4\pi kH} \left[\int_{T_1}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau - \int_{T_2}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau \right] \quad (7.72)$$

donde,

$$T_1 = \frac{r^2 \bar{n}}{4kHt_1} \quad \text{y} \quad T_2 = \frac{r^2 \bar{n}}{4kHt_2}$$

donde t_1 es el tiempo total desde que el bombeo se inició
y t_2 es el tiempo total desde que el bombeo se suspendió

Cuando la pendiente del abatimiento es muy grande en el flujo no establecido, significa que dicho abatimiento es grande; en tal caso conviene utilizar la fórmula de flujo establecido para la condición que se estudia (Ec. 7.13), es decir:

$$z_w^2 = H^2 - \frac{q}{\pi k} \ln \frac{R}{r_o} \quad (7.73)$$

En el caso de que la pendiente de la curva de abatimiento sea pequeña, se podrá utilizar la fórmula simplificada para $S < 10\%$.

Ejercicios del capítulo VII

7.1 Para la determinación del coeficiente de permeabilidad de un estrato permeable que se apoya sobre una base horizontal impermeable, se realiza una prueba de bombeo a través de un pozo. En el momento que se obtiene una condición estable del flujo se extrae un gasto q y los niveles del agua medidos a partir de la base impermeable, a las distancias r_1 y r_2 del pozo, son respectivamente z_1 y z_2 .

Suponiendo que el suelo es homogéneo e isotrópico, determine:

- 1) Una fórmula que le dé el coeficiente de permeabilidad del suelo en términos de las cantidades conocidas q , r_1 , r_2 , z_1 y z_2 .
- 2) El coeficiente de permeabilidad del suelo en unidades de 10^{-4} cm/seg, para los siguientes valores que fueron medidos.

$$\begin{aligned} q &= 18 \text{ lt/seg} \\ r_1 &= 7.60 \text{ m} \\ r_2 &= 30.30 \text{ m} \\ z_1 &= 14.60 \text{ m} \\ z_2 &= 13.60 \text{ m} \end{aligned}$$

- 3) El radio de influencia R , considerando que el nivel original del nivel freático estuvo a 16.6 m arriba de la base impermeable.

7.2 Explique el propósito de las siguientes ecuaciones, incluyendo el significado de cada término. Discuta las relaciones que existen entre estas ecuaciones:

$$(1) \quad Z^2 = H^2 - \frac{q}{\pi k} \cdot \ln \frac{R_1}{2r}$$

$$(2) \quad s = \frac{q}{4\pi kH} \left(\ln \frac{1}{T} - 0.6 \right)$$

$$(3) \quad S = \frac{q}{4\pi kH} \int_T^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau} d\tau$$

7.3 (a) Establezca el propósito de la siguiente ecuación y explique, por medio de un dibujo, el significado de cada cantidad.

$$Z^2 = H^2 + \frac{2\bar{q}}{k}x - \frac{q}{\pi k} \ln \frac{r_1}{r_2} \quad (1)$$

(b) Obtenga la Ec. 1 con la ayuda de la fórmula general de pozos

$$Z^2 = H^2 - \frac{q}{\pi k} \ln \frac{R}{r}$$

y la fórmula de Dupuit

$$\bar{q} = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2d}$$

(NOTA: Las cantidades correspondientes a estas fórmulas generales no están necesariamente relacionadas en forma directa con las cantidades de la Ec.1).

c) Reescriba la Ec. 1 para el plano vertical que pasa por el pozo y es normal a la frontera del agua, y determine el gasto crítico que constituye la transición entre el caso en que el agua extraída proviene del agua subterránea y parte proviene del depósito libre de agua.

7.4 A través de un estrato de arena que sobreyace un estrato horizontal impermeable (ver figura 1 anexa), fluye el agua subterránea hacia un río con nivel constante; la profundidad del agua en el río es de 6.0 m. A una distancia de 75.0 m de la frontera con el río, se realiza un pozo de prueba (de 0.3 m de diámetro) que se extiende a toda la profundidad del estrato permeable.

Antes de iniciar el bombeo el nivel del agua en el sitio del pozo era de 9.0 m por arriba de la base impermeable (o sea, 3.0 m arriba del nivel del agua en el río).

El gasto de extracción es de 283.50 l/min y se continúa hasta que el flujo queda establecido en el momento en que el nivel del agua en el pozo es de 5.1 m arriba de la base impermeable.

- (a) Obtenga, en términos de las cantidades conocidas, la ecuación que da el coeficiente de permeabilidad del estrato permeable; suponga que este es homogéneo e isotrópico.
- (b) Determine el valor numérico de k en unidades de cm/seg .
- (c) Establezca si la distancia existente entre la frontera del río y el pozo es necesariamente la distancia que debe usarse en su fórmula. Establezca también si el valor de k determinado es demasiado grande o demasiado chico.

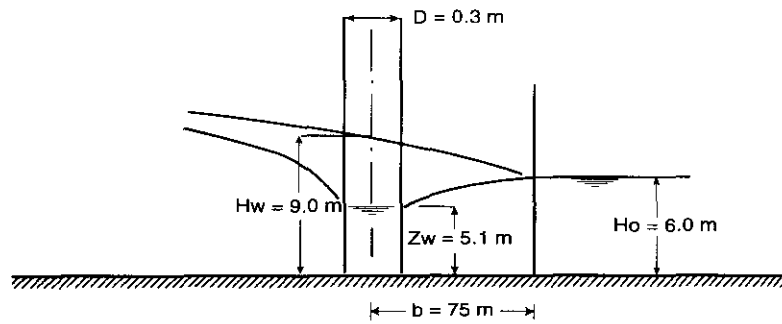


Figura 1 Esquema del problema 7.4
(fuera de escala)

APÉNDICE A

Procedimiento para dibujo de redes de flujo en secciones compuestas en presas

Cedergren, 1989, analiza un método para secciones compuestas con línea superior de corriente desconocida. Este método se basa en las ecuaciones siguientes; en primer lugar, de la condición de transferencia entre las líneas de flujo y las equipotenciales en la frontera de dos suelos con diferente permeabilidad, vista en la sección 3.4 del texto, se tiene:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{b}{c} \quad (\text{a.1})$$

k_1 : coeficiente de permeabilidad de la sección 1, donde la red está constituida por cuadrados.

k_2 : coeficiente de permeabilidad de la sección 2, donde la red está constituida por rectángulos de lados c y d (fig. A.1).

c : longitud entre dos equipotenciales en la sección 2.

b : longitud entre dos líneas de flujo en la sección 2.

Por otro lado, puesto que el gasto total q_1 que debe pasar por la sección 1, debe ser igual a q_2 de la sección 2, tenemos:

$$q_1 = k_1 h \frac{nf_1}{n_e} = q_2 = k_2 h \frac{nf_2}{n_e}$$

es decir,

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{nf_1}{nf_2} \quad (\text{a.2})$$

nf_1 : Es el número de canales de flujo **completos** que hay entre dos líneas equipotenciales adyacentes en la zona 1.

nf_2 : Es el número de canales de flujo **completos**, considerando que se tienen cuadrados (con relación de lados igual a la unidad), que hay entre dos líneas equipotenciales adyacentes en la zona 2.

Procedimiento:

El método se realiza por tanteos y la secuencia es la siguiente: (ver fig. A.1 donde $k_2 = 5k_1$)

1. Localizar los niveles de aguas arriba y aguas abajo, llamando h la diferencia de niveles (carga hidráulica); dividir la carga hidráulica h en incrementos Δh y dibujar una serie de líneas horizontales a intervalos de Δh como guía.
2. Asumir una posición de la línea de corriente superior en ambas zonas y dibujar una red de flujo preliminar, tratando de construir cuadros en la zona 1 y rectángulos en la zona 2; dichos rectángulos deberán tener una relación entre sus lados c/d aproximadamente iguales entre sí. Cuando se haya logrado ésto, la red de flujo deberá estar aproximadamente bien dibujada, aunque los rectángulos (zona 2) probablemente no cumplan la ecuación a.1.
3. Verificar la relación actual de k_2/k_1 para la red de flujo dibujada. Para realizar esta verificación se recomienda proceder de la siguiente forma:
 - a) Contar el número total de canales completos entre dos líneas equipotenciales adyacentes en la zona 1 y llamar a este número nf_1 ; para la figura A.1.a (red de flujo inicial), $nf_1=4$
 - b) Contar el número total de canales completos de flujo entre dos líneas equipotenciales adyacentes en la zona 2 y llamar a este número nf_2 ; para la figura A.1.a (red de flujo inicial), $nf_2 = b/c = 0.5$.
 - c) Determinar la relación actual k_2/k_1 , para la red de flujo dibujada, a partir de la relación dada por la Ec. (a.2); en el ejemplo de la fig. A.1.a, $\frac{nf_1}{nf_2} = \frac{4}{0.5} = 8$

- d) Si la relación calculada k_2/k_1 , en el paso anterior, es muy alta comparada con la relación obtenida en la Ec. (a.1), significa que la línea superior de corriente en la zona 2 es muy baja (nf_2 es pequeño) y debe ser elevada ("b" debe aumentarse); si la relación es muy baja, significa que la línea superior de corriente en la zona 2 es muy alta y debe ser bajada (b debe disminuirse para que nf_2 disminuya, y con ello la relación nf_1/nf_2 aumente). Una vez realizado el ajuste aproximado de la línea superior de corriente, se procede a construir una segunda red de flujo.
- e) Repetir los pasos del (a) al (d) hasta que la red de flujo sea la correcta.

Siguiendo este procedimiento para la fig. A.1a, se tiene:

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{nf_1}{nf_2} = \frac{4}{0.5} = 8$$

Se observa que la relación k_2/k_1 es superior a la correcta (que es [5]), y por lo tanto la línea superior de corriente en la zona 2 debe levantarse. En la red de flujo corregida de la figura A.1.b nf_1 disminuye a 3.5 y nf_2 aumenta a 0.7, obteniéndose:

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{nf_1}{nf_2} = 5$$

Puesto que el valor de la relación k_2/k_1 es igual a este último resultado, la red de flujo obtenida en la figura A.1.b se puede considerar correctamente dibujada.

En la fig. A.2 se muestra la misma red de flujo, pero con diferentes combinaciones de líneas equipotenciales y líneas de flujo, como se aprecia en la tabla A1.

Tabla A1

Fig.	nf-1	nf-2	nf-1/nf-2	k_2/k_1	q_1	q_2
A.2a	3.5	0.7	5	5	$0.44k_1h$	$0.088k_2h$
A.2b	3.5	0.7	5	5	$0.44k_1h$	$0.088k_2h$
A.2c	3.5×5	3.5	5	5	$0.44k_1h$	$0.088k_2h$

donde,

$$q_1 = k_1 h \frac{nf_1}{n_e}$$

$$q_2 = k_2 h \frac{nf_2}{n_e}$$

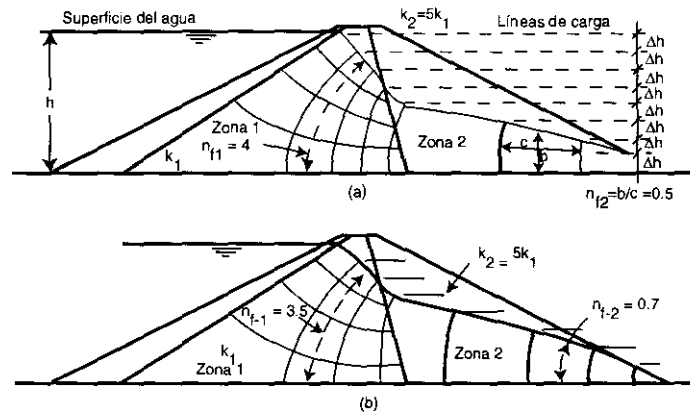


Fig A.1 Método para construir las redes de flujo en secciones compuestas. a) Primer intento de trazo de la red de flujo. b) Red de flujo terminada (Cedergren, 1989).

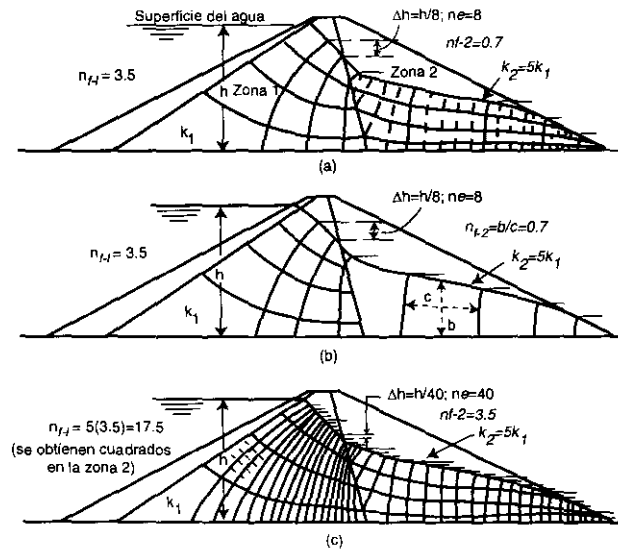


Figura A.2 Formas de una red de flujo (Cedergren, 1989).



APÉNDICE B

Teoría de la sección transformada

Esta teoría consiste en reducir el problema de flujo a través de un suelo anisotrópico al caso del flujo por un suelo homogéneo e isotrópico. Con esta reducción se logra que la ecuación de Laplace y sus soluciones sean aplicables para analizar el flujo a través del medio anisotrópico.

La teoría de la sección transformada es un simple artificio de cálculo que se logra mediante una sencilla transformación de coordenadas de manera que, en la nueva sección obtenida, se considera isotrópica con $k_x = k_y$; se supone también que todas las condiciones de flujo que interesan en el problema en cuestión sean iguales a las prevalencientes en la sección original donde $k_x \neq k_y$, sólo que la geometría del problema ha cambiado.

Se someterá la región de flujo a una transformación de coordenadas en la que la coordenada "x" se transforme a otra x', tal que

$$x' = \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} \cdot x; \Rightarrow \text{entonces} \Rightarrow \frac{dx'}{dx} = \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} \quad (\text{b.1})$$

Considerando ahora la ecuación fundamental de flujo establecido en dos dimensiones, se tiene:

$$\frac{k_x}{k_y} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{b.2})$$

De la ecuación (b.1) tenemos:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x'} \cdot \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} \quad (\text{b.3})$$

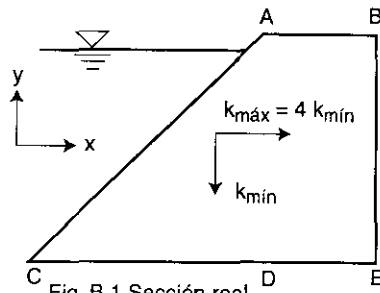


Fig. B.1 Sección real

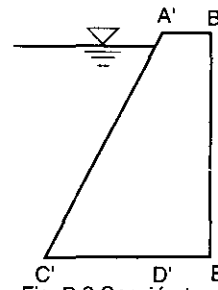


Fig. B.2 Sección transformada

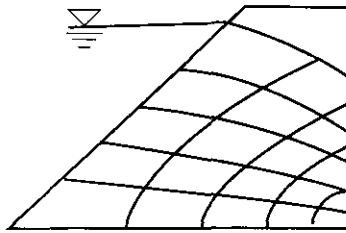


Fig. B.3 Red de flujo, en suelo anisotrópico

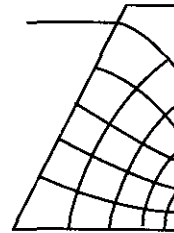


Fig. B.4 Red de flujo, en suelo isotrópico

$$\text{Factor de reducción: } F = \sqrt{k_{\text{máx}} / k_{\text{mín}}} = \sqrt{4} = 2$$

Figura B Sección transformada.

Derivando nuevamente la expresión anterior respecto a x , se tiene:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial h}{\partial x'} \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} \right] = \frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{\partial h}{\partial x'} \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} \right] \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}$$

Finalmente la expresión anterior se reduce a la siguiente:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x'^2} \cdot \frac{k_y}{k_x} \quad (\text{b.4})$$

Llevando (b.4) a (b.2), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 = \nabla^2 h \quad (\text{b.5})$$

donde la ecuación (b.5) es la ecuación de Laplace correspondiente al caso isótropo. Así la zona de flujo original de la fig B.1 se transforma en la fig B.2; las dimensiones horizontales se modifican según

$$x' = \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} \cdot x,$$

en tanto que las dimensiones en la dirección vertical no se modifican.

De la misma forma anterior es evidente que si hacemos el cambio de coordenadas de y por y' , tal que:

$$y' = \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} \cdot y$$

se llegará a una transformación donde se modifican las dimensiones verticales, pero no las horizontales.

Veamos ahora el gasto en la sección transformada. Para ello conviene recordar que el diferencial de gasto que pasa por un elemento de suelo en dos dimensiones, está dado por la siguiente expresión:

$$dq = k_x \frac{\partial h}{\partial x} dy + k_y \frac{\partial h}{\partial y} dx \quad (\text{b.7})$$

En el caso de un suelo isotrópico, donde $k_x = k_y = k$, la expresión anterior nos queda:

$$dq = k \left(\frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy \right) \quad (\text{b.8})$$

Tomando en cuenta la expresión (b.3) para la sección transformada, de la expresión (b.7) se obtiene:

$$dq = k_x \frac{\partial h}{\partial x'} \sqrt{\frac{k_y}{k_x}} dy + k_y \frac{\partial h}{\partial y'} \sqrt{\frac{k_x}{k_y}} dx'$$

ya que de la ec. (b.1),

$$dx = \frac{dx'}{\sqrt{k_y / k_x}}$$

Haciendo operaciones en la anterior expresión de dq, se obtiene:

$$dq = \sqrt{k_x k_y} \frac{\partial h}{\partial x'} dy + \sqrt{k_y k_x} \frac{\partial h}{\partial y'} dx'$$

Finalmente la ecuación anterior se puede escribir como sigue:

$$dq = \sqrt{k_x k_y} \left(\frac{\partial h}{\partial x'} dy + \frac{\partial h}{\partial y'} dx' \right) \quad (b.9)$$

Al comparar la Ec. (b.9) con la del gasto a través de un elemento de suelo isotrópico en dos dimensiones (Ec. b.8), se observará que el gasto calculado usando la sección transformada se obtiene utilizando una permeabilidad igual a:

$$\bar{k} = \sqrt{k_x k_y} \quad (b.10)$$

APÉNDICE C

Líneas de igual presión o isobáricas

Para determinar las líneas de igual presión o líneas isobáricas, definidas como las líneas que tienen la misma carga de agua, conviene dibujar las líneas equipotenciales y una familia de líneas horizontales equidistantes entre sí por Δh . El siguiente ejemplo, mostrado en la figura de abajo, ilustra lo anterior.

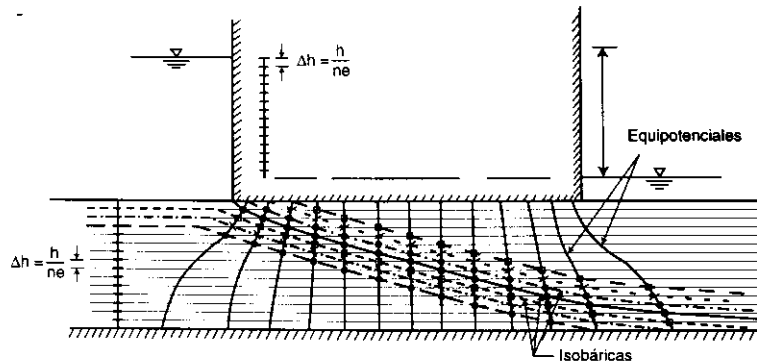


Figura C.1 Trazo de líneas isobáricas.

Observe que la pendiente de estas líneas isobáricas depende de la dimensión de Δh ; si Δh es más grande, la pendiente será mayor. La figura anterior se puede construir con cualquier h y cualquier espesor del estrato permeable.

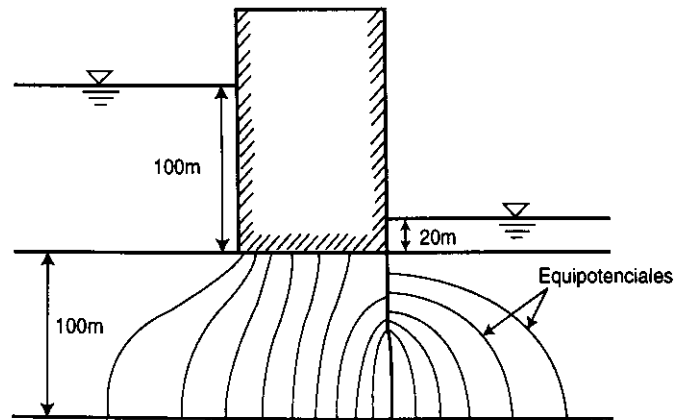
Entre las aplicaciones que pueden tener estas líneas están:

- 1 Visualizar cómo se pierde energía a medida que penetramos en la red de flujo.

- 2 Analizar la variación de la presión de poro en cualquier punto, y consecuentemente el cambio en la resistencia del suelo.
- 3 Estabilidad de las estructuras dentro de la zona de flujo, incluyendo la base de la presa.

Ejercicios del Apéndice C

C.1 Suponiendo que las líneas equipotenciales que se muestran en la siguiente figura son correctas, dibuje las líneas de igual presión para intervalos de 10 metros de carga.



APÉNDICE D

Transformaciones conformales

Mediante el empleo de las transformaciones conformales se pueden resolver varios problemas de flujo en dos dimensiones a través de un procedimiento analítico. Básicamente este procedimiento consiste en determinar una función que transforme un problema de un dominio (o plano), en el que se busca la solución, a partir de otro donde ya se conoce.

Supongamos por ejemplo que la función $\omega = \phi + i\psi$ es una función analítica de $z = x + iy$, es decir $\omega = f(z)$, y supóngase que el número complejo $x_1 + iy_1$ se localiza en el punto P_1 en el plano z (fig. a). Como ω es función de z , deberá haber un punto Q_1 en el plano ω (fig. b) que corresponda al punto P_1 en el plano z . Por ejemplo, si $\omega = z^2$, y queremos saber cual es el punto que en el plano ω corresponde al punto $z = 4 + 2i$ del plano z (fig. a), se hace lo siguiente:

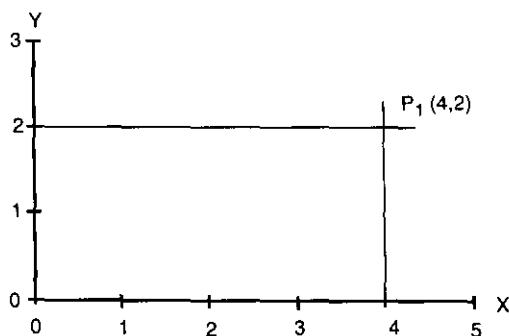


Figura a Localización del punto P_1 en el plano z .

$$\omega = (\phi + i\psi) = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 \quad (d.1)$$

Al igualar las partes reales y las imaginarias se tiene:

$$\begin{aligned}\phi &= x^2 - y^2 \\ \psi &= 2xy\end{aligned}\tag{d.2}$$

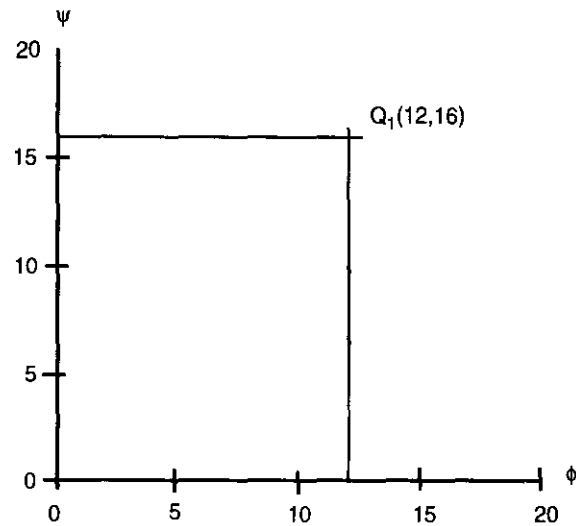


Figura b Localización del punto Q_1 en el plano ω .

Sustituyendo en (d.2) los valores de $x_1=4$ y $y_1=2$ se obtiene que el punto buscado en el plano ω es: $\omega = 12 + 16i$ (fig. b).

De manera similar, considerando una secuencia de puntos se tendrá que para una curva determinada en el plano z , se puede obtener la curva correspondiente en el plano ω . Sea por ejemplo la función $z = \omega^2$; en este caso se tiene:

$$x + iy = (\phi + i\psi)^2 = \phi^2 + 2\phi\psi i - \psi^2\tag{d.3}$$

consecuentemente,

$$\begin{aligned}x &= \phi^2 - \psi^2 \\ y &= 2\phi\psi\end{aligned}\quad (\text{d.4})$$

Estas últimas expresiones son las ecuaciones paramétricas que dan la transformación entre los puntos de los dos planos.

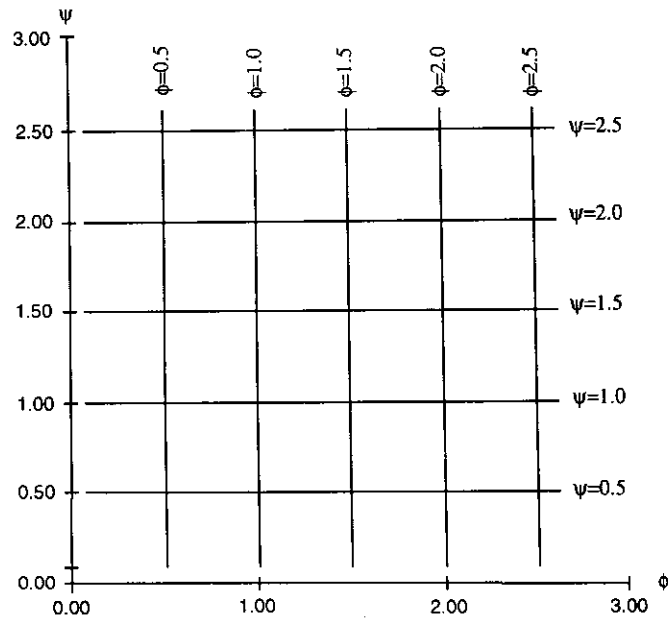


Figura c Funciones ϕ y ψ en el plano ω .

Si consideramos que las curvas en plano ω son líneas paralelas a los ejes como se muestra en la fig. c, las curvas correspondientes al plano z son dos familias de parábolas que se intersectan ortogonalmente como se aprecia en la fig. d. Lo anterior se puede ver fácilmente si se considera por ejemplo que en el plano ω , $\phi = c_1$ (líneas paralelas al eje ψ) y $\psi = c_2$ (líneas paralelas al eje ϕ). Por lo tanto, al sustituir en las Ecs. (d.4), se tiene:

$$y = 2c_1\psi, \quad x = c_1^2 - \psi^2$$

Al eliminar ψ de estas ecuaciones se obtiene:

$$x = c_1^2 - \frac{y^2}{4c_1^2} \quad (d.5)$$

La ecuación (d.5) corresponde a una familia de parábolas que se abren hacia la izquierda del eje x con foco en el origen.

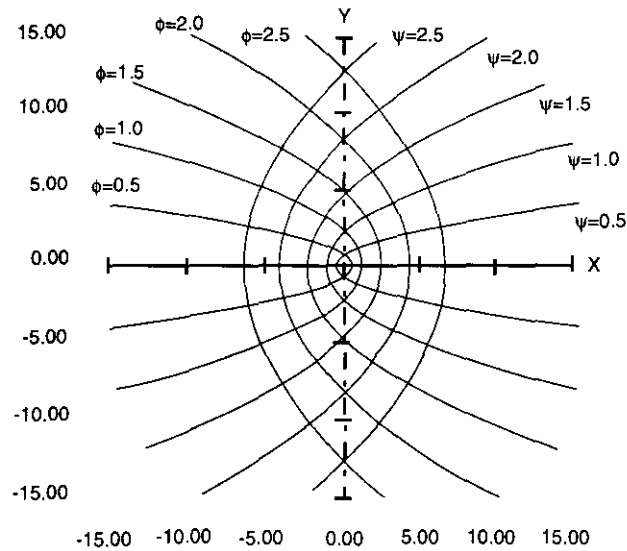


Figura d Funciones ϕ y ψ en el plano z.

De manera semejante se tiene que para $\psi = c_2$, se obtiene:

$$x = \frac{y^2}{4c_2^2} - c_2^2 \quad (d.6)$$

Esta última ecuación corresponde a una familia de parábolas cofocales que se abren hacia la derecha.

Si se considera a Ψ como una función de flujo y ϕ como una función equipotencial, la función $z = \omega^2$ transforma un sistema de flujo uniforme en el plano ω en un sistema de flujo con parábolas cofocales en el plano z . Este fue precisamente el punto clave usado en la solución de Kozeny para el flujo a través de una presa de tierra con un filtro horizontal en la base (fig. e).

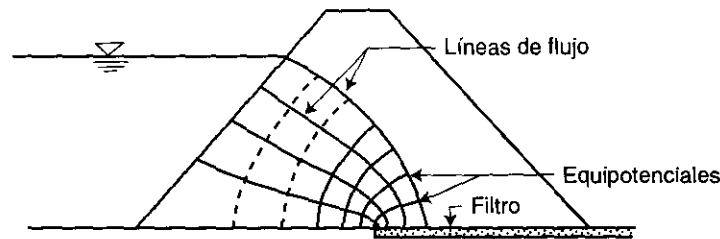


Figura e Red de flujo cerca de la descarga de un filtro horizontal en una cortina.

Lo anterior nos indica que desde el punto de vista práctico, las transformadas se pueden utilizar para mostrar cómo sería la red de flujo en un problema dado, y por otro lado nos muestran el tipo de expresiones matemáticas o curvas que se pueden emplear en problemas de flujo en dos dimensiones.

Obsérvese que las ecuaciones (d.5) y (d.6) se pueden también expresar de la siguiente forma:

$$y^2 = 4\phi^2(\phi^2 - x)$$

$$y^2 = 4\psi^2(\psi^2 + x)$$

Otro ejemplo de transformadas conformales es el siguiente. Para la función $\omega = \text{arc cos}(z/t)$, donde t es una constante, las familias de curvas que se obtienen son las siguientes:

$$\frac{x^2}{t^2 \cosh^2 \psi} + \frac{y^2}{t^2 \sinh^2 \psi} = 1 \quad \text{elipses cofocales}$$

$$\frac{x^2}{t^2 \cosh^2 \phi} - \frac{y^2}{t^2 \sinh^2 \phi} = 1 \quad \text{hipérbolas cofocales}$$

Las figs. f y g muestran las dos familias de curvas que se obtienen, y las figs. h e i representan dos casos prácticos donde se aplicarían las curvas mostradas en la fig. g.

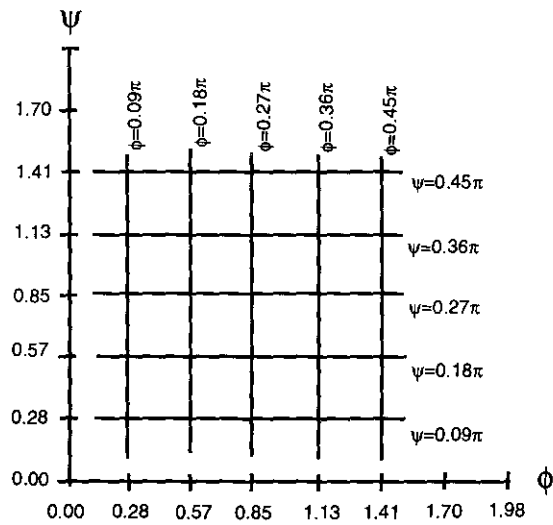


Figura f Funciones ϕ y ψ en el plano w.

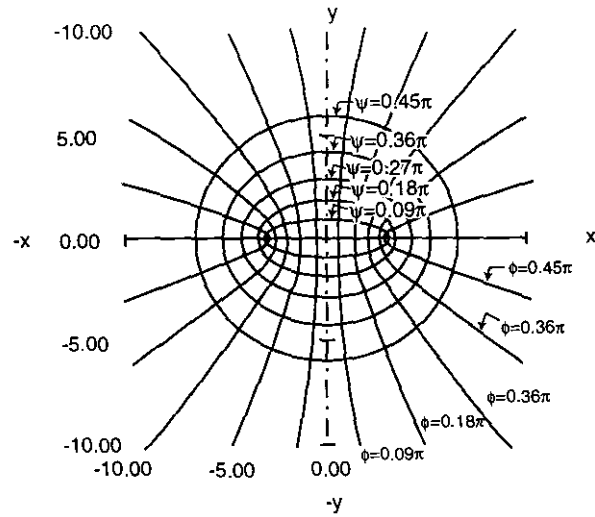


Figura g Funciones ϕ y Ψ en el plano z .

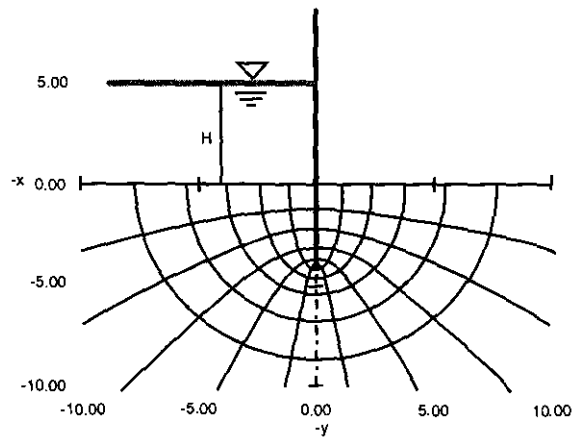


Figura h Flujo a través de una tablaestaca.

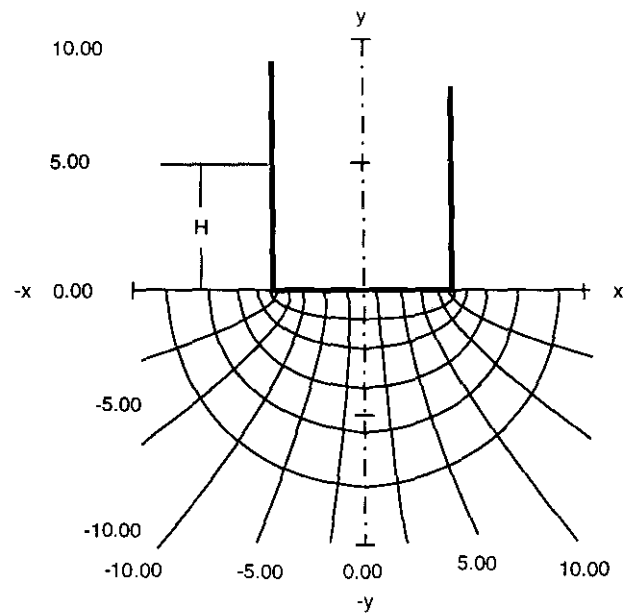


Figura i Flujo de aguas a través de la cimentación de una presa.

REFERENCIAS

- Auvinet G. (1982), "Conceptos recientes en materia de filtros para usos geotécnicos". Memorias del Simposio *Uso de Medios Filtrantes en Ingeniería Sanitaria y Mecánica de Suelos*. Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos. pp 47-60.
- Bear J., (1972), *Dynamics of Fluids in Porous Media*, American Elsevier Publishing Inc., (No. en la biblioteca QC-151-B35).
- Bertram, G. E. (1940), *An Experimental Investigation of Protective Filters*, Harvard Soil Mechanics, Series N° 7, Harvard University. E.U.A.
- Bureau of Reclamation; EUA. (1973), *Design of Small Dams*, U. S. Government Printing Office, Washington, D. C., 2ª edición.
- Bureau U. S. of Reclamation (1963), *Earth Manual*, 1a. edición revisada.
- Casagrande A. (1961), *Control of Seepage Through Foundations and Abutments of Dams*, Harvard Soil Mechanics, Series No. 63.
- Casagrande A. (1984), *Control of Seepage Through Pervious Foundations and Abutments of Dams*, primera conferencia Nabor Carrillo. S.M.M.S.
- Casagrande A. (1968), Notas del curso Engineering 262, dictado en la Universidad de Harvard.
- Casagrande A. (1925-1940), *Seepage Through Dams, Contributions to Soils Mechanics*, Boston Society of Civil Engineers, pp. 295-336.
- Casagrande A. y W. L. Shannon (1951), *Base Course Drainage for Airport Pavements*, *Transactions del ASCE*, Paper No. 2516.
- Cedergren, H. (1989), *Seepage, Drainage, and Flow Nets*, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc., pp 151-200.

Cedergren H. R., (1977), *Drainage of Highway and Airfield Pavements*, Wiley Interscience.

COMECOM, (1969), *Research Report Concerning Seepage Around Hydraulic Structures and Protective Actions Against Seepage*. Manuscrito en Budapest.

Corps of Engineers, U. S. Army., (1955), "Drainage and Erosion Control- Subsurface Drainage Facilities for Airfields". Part III, Chapter 2, *Engineering Manual*, Washington, D.C.

Davis S. N. y R. de Wiest, (1971), *Hidrología*, Ed., Ariel.

Forchheimer, P., (1930), *Hydraulic*, 3er. ed. Teabner, Leipzig, Berlin.

Harr M., (1962), *Groundwater and Seepage*, McGraw-Hill Book.

Huard de la Marre, D., (1956), "Expressions exactes de débits d' infiltration dans des barrages tridimensionnels á parois verticales", *Comptes Rendus Acad. Sci.*, Paris, Vol. 242, No. 9, pp. 1125 - 1127.

Juárez Badillo E. y A. Rico, (1974), *Mecánica de Suelos III*, Limusa.

Kazda I., (1990), *Finite Element Technique in groundwater Flow Studio*, Elsevier.

Lubochkov, E. A., (1955): *Design of Protective Filters of Hydraulic Structures* (en ruso); tesis doctoral, Leningrado.

Marsal R. J. y D. Reséndiz, (1968), *Análisis del flujo de aguas en presas*, publicación No. 183 del Instituto de Ingeniería, UNAM.

Marsal R. J. y D. Reséndiz, (1975), *Presas de tierra y enrocamiento*, Cap. 6, Limusa.

Marsal R. J., (1974), *Presas pequeñas.- Notas sobre diseño y construcción*, Publicación No. 326 del Instituto de Ingeniería, UNAM.

Muskat, (1937), *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media*, McGraw-Hill.

- Ogink, H. J. M., (1975), *Investigations on the Hydraulic Characteristics of Synthetic Fabrics*, Delf Hydraulics Laboratory; Publication N° 146.
- Parzen E., (1964), *Stochastic Processes*, Holden-Day Inc., San Francisco.
- Paute, J. L., (1977), *Distribution du diametre des pores des non-tissés et commentaires sur le phénomène du Colmatage*, CISETG, LCPC, París.
- Polubarina-Kochina, (1962), *Theory of Groundwater Movement*, English Translation, Princeton Univ. Press.
- Poucell, R. (1982). "Uso de filtros en geotecnia", simposio sobre Criterios para el uso de medios filtrantes en ingeniería sanitaria y mecánica de suelos, Sociedad Mexicana de Mecánica de Suelos. pp. 25-46.
- Sherard, J. L. y Dunnigan, L. P. (1989). "Critical Filters for Impervious Soils". *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 115, N° 7. pp. 927-947.
- Sherard, J. L., (1967), Woodward, R. J., Gizienski, S. F. y Clevenger, W. A., *Earth and Earth-Rock Dams*, John Wiley, Cap. 2.
- SRH, (1970), *Manual de Mecánica de Suelos*, quinta edición, Secretaría de Recursos Hidráulicos.
- Taylor, D. W., (1954), *Fundamentals of Soil Mechanics*; John Wiley, N. Y.
- Terzaghi, K., (1943), *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley, N. Y.
- Tristán A., (1975), "Programa para resolver el flujo establecido en suelos por el método de elementos finitos", *Revista de Ingeniería*, UNAM, julio-septiembre.
- Tood D., (1959), *Groundwater Hidrology*, Wiley.
- Verruijt A., (1970), *Theory of Groundwater*, Macmillan.
- Yang S. T., (1949), *Treatment of Seepage Problems by the Relaxation Method*.

Flujo de agua a través de suelos, se terminó de imprimir el mes de noviembre de 2000 en los talleres de Impresión y Diseño. Se utilizó tipografía *Times New Roman* de 10:12. Para los interiores se usó papel couché de 135 kg y para los forros papel de 135 kg. La edición consta de quinientos ejemplares.

El Libro de *Flujo de Agua a través de Suelos* escrito por el Dr. Raúl Flores Berrones, contiene los principios y la teoría fundamental requerida para comprender y solucionar cualquier problema con esta materia. Las matemáticas que en él se emplean son sólo las indispensables y su contenido se enfoca principalmente al análisis y solución de problemas prácticos, tales como el flujo de agua a través del cuerpo y la cimentación de presas de tierra o lagunas estabilizadoras receptoras de aguas residuales, flujo a través excavaciones, mecanismos de tubificación, análisis de fuerzas de flujo en la estabilidad de terraplenes; problemas de flujo transitorio, como los que se tienen durante el llenado o vaciado rápido de una presa; flujo a través de suelos estratificados, etc. Más aún, contiene temas que no se encuentran en ningún otro libro de texto, como es el caso del flujo en tres dimensiones como el que ocurre a través de los aluviones o laderas de boquillas estrechas. La aplicación de los conceptos incluidos en el capítulo del flujo a través de pozos puede ser de gran utilidad en problemas relacionados a pruebas de bombeo para determinar la permeabilidad *in situ* del suelo, el efecto de la recarga de acuíferos, la intrusión salina en pozos cercanos a la costa, etc. El libro contiene además ejercicios de aplicación al final de cada capítulo y cuatro apéndices donde se detallan algunos aspectos que complementan el contenido del texto.

Aunque el texto está orientado a cubrir la materia de FLUJO DE AGUA A TRAVÉS DE SUELOS, que el autor imparte desde hace más de veinte años en la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, su aplicación práctica puede ser de gran utilidad a los profesionistas relacionados al sector agua, tal como es el caso de los ingenieros sanitarios y ambientales interesados en conocer el flujo de contaminantes a través de suelos en plantas de tratamiento de aguas residuales, los ingenieros geotecnistas e hidráulicos que desean conocer el gasto de las fugas de agua a través de la cortina de una presa de tierra y enrocamiento, o a través de la cimentación de una cortina de concreto, los ingenieros constructores que desean conocer la cantidad de agua que deberán extraer mediante bombeo durante la excavación requerida para la cimentación de una obra, etcétera.

La formación académica del Dr. Flores Berrones en la Universidad de Harvard, en la UNAM y en el Instituto Tecnológico de Massachusetts, aunada a su trayectoria en la práctica profesional dentro del sector agua durante cerca de veinte años, le han permitido acumular suficiente experiencia y conocimiento en la materia objeto de este libro, de suerte que su contenido resulta en un buen balance de la teoría con la aplicación práctica de los temas tratados. Expresidente de la Sociedad Mexicana de Suelos, el Dr. Flores Berrones es actualmente investigador de tiempo completo en el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua y miembro del Sistema Nacional de Investigadores, de la Academia Mexicana de Ciencias y de la Academia Nacional de Ingeniería.

Álvaro Alberto Aldama Rodríguez

